中国科学院指定考研参考书

第3版

高等数学导论

中国科学技术大学高等数学教研室 编

上册

GAODENG SHUXUE DAOLUN

中国科学技术大学出版社

中国科学院指定考研参考书目

★《高等数学导论》(第3版)(上)、(下)
★《高等数学导论学习辅导》
★《线性代数》
★《复变函数》
★《数学物理方程》(第2版)
★《近世代数引论》
★《数值分析方法》
★《概率论与数理统计》(第2版)
★《力学》(基础物理教程丛书)
★《热学》(基础物理教程丛书)
★《电磁学》(基础物理教程丛书)
★《原子物理学》(基础物理教程丛书)
★《光学》(基础物理教程丛书)
★《应用光学》
★《流体力学》(修订版)
★《等离子体物理原理》
★《综合化学》——要点、例题、习题
★《无机化学》——要点、例题、习题(第2版)
★《物理化学》——概念辨析、解题方法
★《有机化学》(第2版)
★《有机化学》——习题与解答
★《高分子化学》
★《定量化学分析》
★《地球化学》
★《自动控制原理》
★《线性系统理论和设计》
★《信号与系统理论、方法和应用》
★《编译原理和技术》(第2版)
★《模拟集成电路》
★《十六位微型计算机原理、接口及其应用》(修订版)
★《微型计算机原理与接口技术》(第2版)
★《16位－32位微机组成原理》
★《软件技术基础》
★《简明生物化学》
★《细胞生物学》
★《神经生理学》
★《现代生物学导论》
★《科技考古论丛》
★《自然辩证法原理》(第3版)

责任编辑 林 诗
封面设计 刘俊霞

2007

定价：28.00元

ISBN 978-7-312-02141-1

高等数学导论

第3版(上册)

中国科学技术大学高等数学教研室　编

中国科学技术大学出版社
2007·合肥

图书在版编目(CIP)数据

高等数学导论.上册/中国科学技术大学高等数学教研室编.—3版.—合肥:中国科学技术大学出版社,2007.8

ISBN 978-7-312-02141-1

Ⅰ.高… Ⅱ.中… Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 129711 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号,邮编:230026
http://press.ustc.edu.cn

印刷 中国科学技术大学印刷厂

发行 中国科学技术大学出版社

经销 全国新华书店

开本 850mm×1168mm 1/32

印张 18.25

字数 490 千

版次 1988 年 9 月第 1 版 2007 年 8 月第 3 版

印次 2007 年 8 月第 7 次印刷

印数 31001—32000 册

定价 58.00 元

内 容 提 要

本“导论”是中国科学技术大学非数学专业通用的讲义，是在近50年的使用过程中，经过不断修订、充实而成的. 与同类书相比，其广度有所拓宽，论证定理、公式逻辑严谨，编排内容循序渐进，阐述概念联系实际，深入浅出. 为加深对概念、定理等的理解和掌握，书中编有丰富的例题，以及复习思考题、习题和总复习题.

本“导论”分上、下两册出版. 上册讲述单变量函数微积分与空间解析几何. 下册讲述多变量函数微积分、级数与常微分方程. 另配学习辅导一册.

本册内容包括函数的极限、单变量函数的微分学、单变量函数的积分学、可积常微分方程和空间解析几何共5章.

本“导论”可作为理工科院校非数学专业或师范类院校数学专业的教材或教学参考书，也可供具有一定数学基础的读者自学.

第 3 版 序

本版按照中国科学技术大学改为四年制后对非数学专业学生应具备的数学基础的要求，结合第 2 版以来的教学实践和教学研究，在保留第 1 版和第 2 版特色的原则下修订而成. 除对全书作全面的修订外，还对某些内容进行改写，使之更加精练. 全书分上、下两册，教学约需 240 学时，内含习题课 20 学时.

广大读者与同行为本书的修订提供了很多宝贵的建议和意见. 本次修订工作主要由杨孝先教授负责，并得到数学系领导陈发来、宋光天、梁进、张韵华教授的大力支持. 对此，我们表示由衷的谢意.

因经验与水平的关系，本版一定还有错漏或不妥的地方，热忱期望读者与同行批评指正. 又因时间紧迫，本次修订未经全部原编者审核，发现的有关问题由修订者负责.

编　者

2007 年 7 月

第 2 版序

《高等数学导论》第 1 版自 1988 年 9 月出版以来，已经历了 6 年的教学实践. 本次我们根据在教学过程中积累的第一手材料，并吸取了多次使用本书的同行们提出的极其宝贵的意见，将第 1 版的一些内容进行了修改. 另外，我们还根据当前国内外同类教材的发展动向加进了一些内容. 这样一来，就使本书的理论更系统、更完整. 第 2 版采用按章按节配备习题，并于每章末增加总复习题，以加强对基本概念和基础理论与方法的理解和提高读者的解题能力. 书末附有习题的答案.

参加第 2 版编写工作的有中国科学技术大学高等数学教研室的杨孝先、薛春华、陈秋桂，以及函数论教研室的顾新身等同志.

第 2 版由数学系副主任朱国城同志主审. 他认真地审阅了原稿，并提出了不少改进的意见. 此外，余红兵同志还提供了一些十分有意义的习题. 从而使本书在内容上、处理方法上以及总复习题上都增色许多. 对此编者们都表示衷心感谢.

限于编者水平，故教材中可能存在不妥之处，希望广大读者提出批评和指正.

编 者

1994 年 1 月

第 1 版 序

我怀着喜悦的心情,期待着“高等数学导论”的出版.

每当我和我的同事们在修订这部“导论”时,不免回忆起那些为“导论”的诞生和发展作出过卓越贡献的专家、教授和学者,他们的名字将永远铭刻在我们的心中.

“导论”的前身是“高等数学讲义”. 早在中国科学技术大学成立的初期,在原数学系系主任华罗庚教授,原高等数学教研室主任关肇直教授,副主任艾提教授及龚昇教授的亲切关怀和直接指导下,就已成立了以曾肯成教授为主笔的“讲义”编写小组. 他们根据当时高教部所颁发的高等数学大纲,结合我校的特点,陆续地编写出了供除数学系外其它各系通用的“高等数学讲义”. 这部讲义文笔生动,语言简练,深入浅出,通俗易懂,所以它一出现,就得到了外系师生的热烈欢迎和一致好评.

1977 年,中国科学技术大学重新恢复了招生. “讲义”又先后经过了史济怀教授、徐澄波教授、蔡宗熹教授、钟立敏副教授、夏宗威副教授以及高等数学教研室许多教师的试教、修订、充实,逐渐形成了现在的“导论”.

这次出版的“导论”共分上、中、下三册和一本配套的习题集. 各册的内容分别为:单变量函数微积分;空间解析几何、多变量函数微积分及场论;级数与常微分方程.

尽管现在已经有了很多物理型的高等数学教程,但是“导论”仍有其独特之处.

由于高级中学的数学教材已经改革,函数的概念、极限论及微积分的计算法作为教学内容之一已有比较详尽的叙述. 考虑到这些因素,“导论”已把现行教材的极限论补充得更加完善,使其不再

是中学极限论的简单重复，而是它的深化和发展. 具体做法是：删去传统的初等函数一节，并以单调有界数列必有极限为公理建立起极限论. 凡所涉及的定理如柯西收敛准则，闭区间连续函数的性质等都给以严格的论证.

高等数学的概念及方法都是从研究各种物质形态及各种运动形式的数量关系而产生的. 例如，导数或积分的概念就是从速度、切线或曲边梯形的面积引入的；而第二型面积分，线积分各是从流体流过闭曲面的流量，力场对沿曲线运动的质点所作的功抽象而成的. “导论”除了注意从实际问题引入这些概念外，还对所涉及的各种定理及公式，例如勾通微分学与积分学的牛顿－莱布尼兹公式、高斯定理、重积分的计算公式等的物理背景或几何直观都作了说明，以消除微积分的神秘感.

在讲述微分方程时，一旦解已求得，“导论”又引导去讨论解的物理意义，以使读者认识到数学不仅是一些符号、公式的堆积，而且是解决物理、力学中所遇到的问题之有力武器.

关于场论的处理，“导论”则引进哈密顿算符▽和外微分形式，这就使得梯度、散度、旋度及其各种公式统一于一体，便于记忆.

为了紧密配合“导论”，在“讲义”原有习题的基础上，又从历届研究生的试题，国内外高等数学竞赛题中精选了一批有意义的题目，进行分类、加工、充实，自成一习题集.

“导论”的其它特点在此就不一一赘述了.

正是由于“导论”保持了原有“讲义”的特色，而且还进行了切合实际的改革，所以它也受到兄弟院校师生的青睐. 如有的院校采用这套教材进行教学，效果良好. 因此“导论”的出版就是有价值的.

在使用这一教材的过程中，常庚哲、何琛、陶懋颀等教授；陈龙玄、杜锡录、顾新身、王天威、陈祖墀、张鄂堂、周永佩、张声雷、杨孝先、吴肇曼、李金平等副教授；缪柏其博士；曾宪立、尹业富、汪惠迪、陈群标、徐俊明、奚宏生等讲师，提出了许多建设性的意见，这

些意见我在定稿时已加以利用.

配套的习题集是由高等数学教研室陈秋桂讲师在校正了全部答案,并作了重新编排后完成的;我还要指出的是高等数学教研室的薛春华讲师,她也参加了"讲义"的修订工作.

由于水平所限,谬误与不妥之处实属难免,敬请读者批评指正.

陈登远

1987年10月于合肥

目　录

1 函数的极限

极限理论是高等数学或微积分学的基础，它是研究函数性质的有力工具，也是高等数学 区别于初等数学的显著标志. 因此，本章主要用精确的数学语言来讨论数列极限、函数极限，并引出高等数学中有着广泛应用的一类重要的连续函数.

1.1 数 列 极 限

1.1.1 实数集与连续性公理

这里对本书使用的关于集合的记号给予说明. 集合是一个无法明确定义，只能描述的基本概念. 把具有某种(或某些)属性的并可相互区别的事物构成的总体叫做集合. 构成集合的每一个事物称为集合的元素. 今后常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 等等表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$，等等表示集合的元素. a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记为 $a\in A$；a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记为 $a\overline{\in}A$ 或 $a\notin A$. 例如，全体自然数构成一个集合，每个自然数是集合的一个元素，记为 $\mathrm{N}=\{1,2,\cdots\}$ 叫做自然数集；又如，全体整数构成一个集合，每个整数是集合的一个元素，记为 $\mathrm{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$. 叫作整数集.

一般的情形下，用 $K=\{x|P(x)\}$ 表示由满足某个相同的条件 $P(x)$ 的一切元素 x 构成的集合，例如，有理数集为

$$\mathrm{Q}=\left\{x \mid x=\frac{p}{q}, \text{且 } p\in \mathrm{Z}, q\in \mathrm{N}\right\}$$

又如，实数集为

$$\mathrm{R}=\{x \mid x\text{ 是实数}\}$$

不含任何元素的集合称为空集，用$\varnothing$表示.

设有两个集合 A,B，凡是 $a\in A$ 都有 $a\in B$，则称 A 是 B 的子集，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作"A 包含于 B"或"B 包含 A". 例如 $\mathrm{N}\subset\mathrm{Q}$，$\mathrm{Q}\subset\mathrm{R}$，或有 $\mathrm{N}\subset\mathrm{Q}\subset\mathrm{R}$，并规定：任何 A 都有$\varnothing\subset A$.

若 $A\subset B$，且至少存在一个元素 $a\overline{\in}A$，而 $a\in B$，则称 A 为 B 的真子集合.

设有两个集合 A,B，由至少属于其中一个集合的元素的全体构成的集合，称为 A 与 B 的并，记为 $A\cup B$，即有

$$A\cup B=\{x \mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}$$

同时属于 A,B 的元素的全体构成的集合，称为 A 与 B 的交，记为 $A\cap B$，即有

$$A\cap B=\{x \mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}$$

设 E 是非空的实数集，M 与 m 都是已知的实数. 若对任何的 $x\in E$，都有 $x\leqslant M$，就称 M 是 E 的上界，并称 E 是有上界的集合. 若对任何的 $x\in E$，都有 $x\geqslant m$，则称 m 是 E 的下界，并称 E 为有下界的集合. 既有上界又有下界的集合称为有界集合.

若集合 E 的上界也属于 E，就称它为 E 的最大元素，记为 $\max E$. 同样，若集合 E 的下界也属于 E，就称它为 E 的最小元素，记为 $\min E$. 易见，这样的最大元素或最小元素显然是唯一的.

一个实数的集合若是由有限个实数构成就称为有限数集，由无穷多个实数构成的集合称为无限数集. 有限数集必是有界集合，且必有最小元素与最大元素. 然而，一般的数集就未必有界，即使有界也未必具有最大元素或最小元素.

例如，$E=\{x\in R \mid x>0\}$就是既无上界又无最小元素的数集. 实际上，若不然，假定 M 为它的上界，但存在 $x=2M\in E$，并有 $x>M$. 这与假设矛盾，故 E 无上界. 其次，假定有 $p=\min E$，且 $p>0$，但有 $0<\dfrac{p}{2}\in E$，且 $p>\dfrac{p}{2}$，故与 p 为最小元素显然矛盾. 因此

E 中无最小元素.

又如，$F=\{x\in R|0<x<1\}$. 显然它的下界 $m=0$，上界$M=1$，故是有界集合. 易证 F 既无最小元素也无最大元素. 但是，不属于数集 F 的两个数 0 与 1 具有如下的性质：数集 F 中无小于 0 的数，而当任意给定一个正数 ε 时，总有小于 $0+\varepsilon$ 的数；同样，数集 F 中无大于 1 的数，而任意给定正数 ε 之后，总有大于 $1-\varepsilon$ 的数，即 0 与 1 分别是数集 F 的最大下界与最小上界. 通常把它们分别称为数集 F 的下确界与上确界.

定义　设给定非空的数集 E，且 $E\subset R$. 若存在这样的实数 β 满足：

(1) 对一切的 $x\in E$，有 $x\leqslant\beta$；

(2) 对任意给定的正数 ε，总存在 $x\in E$，使 $\beta-\varepsilon<x$，则称 β 为数集 E 的上确界，记为

$$\beta=\sup E \quad 或 \quad \beta=\sup_{x\in E}\{x\}$$

同样，若存在这样的实数 α 满足：

(1) 对一切的 $x\in E$，有 $\alpha\leqslant x$；

(2) 对任给的正数 ε，总存在 $x\in E$，使 $\alpha+\varepsilon>x$，则称 α 为数集 E 的下确界，记为

$$\alpha=\inf E \quad 或 \quad \alpha=\inf_{x\in E}\{x\}$$

从确界的定义不难看出：β 是数集 E 的最小的上界，而 α 是它的最大下界.

若数集 E 无上界，就是任意给一个数 M，E 中总有大于 M 的数，则这个数集 E 无上确界；同样，若数集 E 无下界，则它也无下确界. 若数集 E 中有最大数，则这个最大数就是它的上确界；同样，若数集中有最小数，则这个最小数就是它的下确界.

因为有限个数之中必有最大数和最小数，所以其最大数就是由这有限个数构成的数集的上确界；其最小数就是由这有限个数构成的数集的下确界.

例 有上界的非空整数集必有最大数.

证 设 E 是有上界的非空整数集. 因为 E 是非空的,所以存在整数 $m_1 \in E$. 又因为 E 有上界,故存在数 M,使得对 E 中的任何整数 m,都有 $m \leqslant M$. 今考虑数集 $F=\{x \mid m_1 \leqslant x \leqslant M, x \text{ 为整数}\}$. 易见,$F$ 是有限集. 由于 $m_1 \in E, m_1 \in F$,故知 $E \cap F$ 非空. 因此 $E \cap F$ 是有限的整数集. 从而 $E \cap F$ 必有最大数 m_0. 容易明白,m_0 就是整数集 E 的最大数.

有了前面的准备后,可得到如下的连续性公理. 它是我们今后讨论问题的出发点.

连续性公理 有上界的非空数集必有上确界.

由这个公理立即可推出如下结果.

定理 1 有下界的非空数集必有下确界.

证 设 $E \subset R$,且 $E \neq \varnothing$,有下界. 令 $F=\{-x|_{x \in E}\}$,故 F 是有上界的非空数集. 由连续性公理知,$\beta=\sup F$ 是存在的. 于是对一切 $x \in E$,有 $-x \leqslant \beta$,或 $x \geqslant -\beta$,而对任给的正数 ε,存在一个 $x_0 \in E$,有 $\beta-\varepsilon<-x_0$,即 $-\beta+\varepsilon>x_0$. 从而得到 $-\beta=\inf E$.

定理 2 对任意的 $x \in R$,存在唯一的整数 m,使 $m \leqslant x<m+1$.

证 令 $E=\{n \mid n \leqslant x, n \text{ 是整数}\}$,且 $E \neq \varnothing$. 则由前面的例知 E 有最大数 m,即 $m \in E$,且对任意的 $n \in E$,都有 $n \leqslant m$,故 $m=\sup E$. 因为 $m \in E$,所以 $m \leqslant x$. 剩下只要证明 $m+1>x$ 就行了. 采用反证法,若不然,假定 $m+1 \leqslant x$,则有 $m+1 \in E$,这显然与 $m=\sup E$相矛盾. 故有 $m+1>x$. 总之有

$$m \leqslant x<m+1$$

最后,假定存在满足定理条件的两个整数 m 与 m_0,且 $m<m_0$. 从 $m \leqslant x<m+1$ 以及 $m_0 \leqslant x<m_0+1$ 与 $m<m_0$ 推出

$$x<m+1 \leqslant m_0 \leqslant x$$

这显然是矛盾的. 故有 $m_0=m$,即这样的整数 m 是存在且唯一的.

注意:若 $x \in R$. 今用记号$[x]$表示不超过 x 的最大整数,则由

定理 2 知，有

$$x-1<[x]\leqslant x$$

推论 1　对任意的实数 $a>0,b>0$，则可取适当的自然数 n，使 $na>b$.

证　由定理 2 知，一定存在比 $\frac{b}{a}$ 大的自然数，今取它为 n，即有 $\frac{b}{a}<n$，或 $na>b$.

推论 2　在任意两个不同的实数之间都存在有理数.

证　设有两个不同的实数 a,b，且 $a<b$. 由推论 1 知，可取适当的自然数 n，使 $n(b-a)>1$，即 $b-a>\frac{1}{n}$.

令 $m=[na]$，由 $m\leqslant na<m+1$，有

$$a<\frac{m+1}{n}=\frac{m}{n}+\frac{1}{n}<a+(b-a)=b$$

其中 $\frac{m+1}{n}$ 是有理数.

类似地，在任意两个不同的实数之间都存在无理数.

实际上，与推论 2 的证法相同，可取自然数 n，使

$$n(b-a)>\sqrt{2}$$

有

$$a<\frac{m+\sqrt{2}}{n}<b$$

其中 $\frac{m+\sqrt{2}}{n}$ 是无理数.

今后所说的数都指实数，除特殊声明之外. 超出了实数范围就认为是无意义的. 常用 x,y,z,t 等等表示变数(或变量)；用 a,b,c,d 等等表示常数(或常量). 数集都指 R 的子集. 区间是数集 R 特殊的子集，无穷区间 $(-\infty,+\infty)=\mathrm{R}$，但符号“$-\infty$”与“$+\infty$”不是数.

设取定一数轴 L，我们知道，任一实数 a 都对应着数轴 L 上唯一的一点 A；反之，数轴 L 上的每一点 A 也唯一地表示一个实数 a（图 1.1）. 即全体实数和数轴上的点存在着一一对应的关系. 正是由于这种对应关系，所以在今后的许多场合中，将不严格区分数轴上的一点与其对应的数，常把数 a 称为点 a.

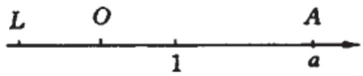


图 1.1

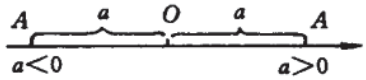


图 1.2

任给一个数 a，在数轴上对应的点为 A，考察点 A 到原点 O 的距离 OA. 若 a 非负，这个距离就是数 a，$OA=a$；若 a 小于零，则 $OA=-a$. 因此无论数 a 有怎样的符号，即无论点 A 在原点 O 的左方或右方，距离 OA 总是一个非负实数（图 1.2）. 我们将这个与数 a 相对应的非负实数称为数 a 的绝对值，记为 $|a|$，即

定义

$$|a|=\begin{cases} a & a\geqslant 0 \\ -a & a<0 \end{cases}$$

数的绝对值具有以下性质：

1° 设 a,b 是二实数，且 $|a|\leqslant b$，则 $-b\leqslant a\leqslant b$；反之亦真.

证 设 $|a|\leqslant b$，由绝对值的定义得 $a\leqslant b$ 和 $-a\leqslant b$. 后一不等式可写成 $a\geqslant -b$，从而得到

$$-b\leqslant a\leqslant b$$

反之由 $-b\leqslant a\leqslant b$ 得 $a\leqslant b$ 和 $-a\leqslant b$. 但 a 与 $-a$ 之一是 a 的绝对值，故有

$$|a|\leqslant b$$

从数轴上看，这个性质说明适合不等式 $|a|\leqslant b$ 的点必落在点 $-b$ 和点 b 之间.

2° 设 a,b 是二实数，则

$$|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

就是二数和的绝对值不大于它们各自绝对值的和，不小于各自绝

对值的差.

证 因为

$$-|a|\leqslant a\leqslant|a|$$

$$-|b|\leqslant b\leqslant|b|$$

于是得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|$$

由性质 1°这个不等式就是

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

又因

$$|a|=|(a+b)+(-b)|\leqslant|a+b|+|-b|$$

而$|-b|=|b|$,移项即得

$$|a|-|b|\leqslant|a+b|$$

若以$-b$代替性质 2°中的不等式之b又得

$$|a|-|b|\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|$$

就是二数差的绝对值不大于它们各自绝对值的和,不小于各自绝对值的差.

3° 设a,b是二实数,则

$$|ab|=|a||b|$$

就是二数积的绝对值等于它们各自绝对值的积.

4° 设a,b是二实数,且b不为零,则

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$$

就是二数商的绝对值等于它们各自绝对值的商.

作为练习,我们把这两个性质的证明留给读者.

命题 1 实数集E有界,当且仅当存在$M>0$,使对$\forall x\in E$,都有$|x|\leqslant M$.

证 设E为有界集,故存在下界m_1与上界m_2,使对$\forall x\in E$,都有$m_1\leqslant x\leqslant m_2$. 令$M=\max\{|m_1|,|m_2|\}$,则对$\forall x\in E$,都有$|x|\leqslant M$.

反之,若存在 $M>0$,对 $\forall x\in E$,都有 $|x|\leqslant M$,或有 $-M\leqslant x\leqslant M$. 于是 $-M$ 是 E 的下界,而 M 为 E 的上界.

实数集 $\{x\,|\,|x-a|<\delta,\delta>0\}$,称为点 a 的 δ 邻域,它等价于 $a-\delta<x<a+\delta$,即以 a 为心长度为 2δ 的开区间 $(a-\delta,a+\delta)$. 实数集 $\{x\,|\,0<|x-a|<\delta,\delta>0\}$ 称为点 a 的去心 δ 邻域. 实数集 $\{x\,|\,a-\delta<a,\delta>0\}$ 与 $\{x\,|\,a<x<a+\delta,\delta>0\}$ 分别称为点 a 的左侧与右侧 δ 邻域. 实数集 $\{x\,|\,M<x<+\infty,M>0\}$ 与 $\{x\,|\,-\infty<x<-M,M>0\}$ 分别称为 $+\infty$ 邻域与 $-\infty$ 邻域.

1.1.2 数列极限的定义

今引入函数(映射)的概念.

定义 映射 $f:X\to Y$,其意义是对 $\forall x\in X$ 都有 Y 中一个确定的元素 $y=f(x)$ 与之对应,称非空集合 X 是 f 的定义域,记为 $D(f)$,而称 $V(f)=\{y\,|\,\exists x\in D(f),y=f(x)\}$ 为映射(函数) f 的值域,称 $x\in D(f)$ 为函数 $y=f(x)\in V(f)$ 的原像或自变量,$y=f(x)$ 称为 x 的像或因变量.

什么叫数列? 一个数列是从 N 到 R 的一个映射,即有 $f:n\to a_n$. 或者说,数列是定义在全体自然数上的函数 $a_n=f(n)$. 当自变量 n 依次取自然数的值时,函数 $f(n)$ 的值可以排列成先后有序的一串实数

$$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$$

这样的有序数串称为数列,简记为 $\{a_n\}$,其中的每一个数叫做数列的**项**,第 n 项 a_n 叫做数列的**通项**. 例如

$$\left\{\frac{1}{n}\right\},\left\{\frac{n}{n+1}\right\},\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\},\{(-1)^{n-1}\}$$

就分别表示数列

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$$

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$$

$$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{(-1)^{n-1}}{n},\cdots$$

$$1,-1,1,\cdots,(-1)^{n-1},\cdots$$

在所列举的这些数列中容易看出，前三个数列随着 n 无限增大时无限接近于定数 0,1,0，或者说 0,1,0 各是它们的极限；而最后一个数列正好相反，当 n 无限增大时它始终在 1 和 -1 这两点来回跳动不接近于任何定数，或者说这个数列不以任何数为它的极限.

一般说来，如果数列 $\{a_n\}$ 当 n 无限增大时无限接近于定数 a，就称 $\{a_n\}$ 的极限是 a. 为了精确地给出数列极限的定义，我们再深入地分析**无限接近**的数学含义.

设想在数轴上标出定数 a 和数列的项 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，既然随 n 不断增大，a_n 要无限接近于 a，那么从直观上看来，就是当 n 相当大后，点 a_n 都要落在点 a 的附近，与 a 的距离很小. 现在任意给定一个正数 ε，作一个以 a 为中心的 ε 邻域. 于是凡落在这个邻域中的那些点 a_n 与点 a 的距离都必小于 ε. 对于任意给定的 ε 邻域，我们顺次地观察数列 $\{a_n\}$ 中的各项，它们中的每一个或者落在邻域 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 中，或者留在这个邻域外，但是，如果有无限多项留在邻域 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 之外，就是无论在数列多么靠后的地方，总要遇到这样的项，它与点 a 的距离大于 ε. 这时当然不能说 a_n 无限接近于 a 了. 故若 a_n 无限接近于 a，那么留在邻域 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 外的项一定只有有限多个. 设这有限多个项的最大下标是 N，于是下标大于 N 的所有各项，亦即从第 $N+1$ 项开始的各项 $a_n(n>N)$ 就都统统落在 ε 邻域 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 中了(图 1.3)！用数学

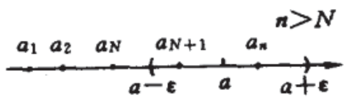


图 1.3

式子表示，就是满足了不等式

$$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$$

即

$$|a_n-a|<\varepsilon \quad (n>N)$$

也就是说所有这些 $a_n(n>N)$ 与点 a 的距离小于 ε. 但是要 a_n 能无限接近于 a,就不应该仅对某一固定的 ε,找到如上所述的 N,而应该是对任意的正数 ε 都能相应地找到 N.

综上所述,所谓数列 $\{a_n\}$ 无限接近于 a,就是对任意给定的正数 ε,都可找到这样一个下标 N(它通常与 ε 有关,记为 $N(\varepsilon)$),使 a_N 以后所有的项全部落在区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 中. 将这个结论用数学语言表达时,就有

定义 设有数列 $\{a_n\}$ 与定数 a. 若对任意给定的正数 ε,总存在这样的自然数 $N(\varepsilon)$,使得当 $n>N$ 时,不等式

$$|a_n-a|<\varepsilon$$

成立,则称 a 是数列 $\{a_n\}$ 的极限,记成

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a \quad 或 \quad a_n\to a(n\to\infty)$$

数列 $\{a_n\}$ 以 a 为极限也说成数列 $\{a_n\}$ **收敛于** a.

这个定义用 ε,N 的简练语言把数列极限的概念完全精确地刻画出来,称之为**极限的 ε-N 定义**.

易见,这个定义共分四小段. 第一与第四小段为"任意给定正数 ε,及 $|a_n-a|<\varepsilon$",它说明数列 $\{a_n\}$ 无限接近于 a,正因为 ε 具有任意性,不等式才表明数列 $\{a_n\}$ 接近于 a 的无限性;第二与第三小段为"总存在自然数 $N(\varepsilon)$,当 $n>N$ 时",它用自变量(序号)n 说明不等式 $|a_n-a|<\varepsilon$ 不仅是能够成立的,且能保持成立. 数列 $\{a_n\}$ 的极限为 a,是在无限过程中,a_n 才转化为 a. 而在任何有限的过程中,即任何确定的自然数 n,a_n 都仅是 a 的近似值. a 与 a_n 是密切相联的,任何有限过程仅解决极限 a 的近似计算,只有在无限过程中,才解决了精确的极限值是什么的问题.

没有极限的数列,常称为**发散数列**.

今后在证明某些极限问题时,往往要使用反证法,即要使用

“数列$\{a_n\}$的极限不是 a，或$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq a$ 的叙述”. 它的精确叙述为

如存在某个正数 ε_0，对任意的自然数 N，总存在某一个 $n_0>N$，使不等式

$$|a_{n_0}-a|\geqslant\varepsilon_0$$

成立. 则称定数 a 不是数列$\{a_n\}$的极限，记为

$$\lim_{n\to\infty}a_n\neq a \quad 或 \quad a_n \not\to a\ (n\to\infty)$$

下面考察几个简单的例子.

例 1 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}=0$.

证 对任意给定的正数 ε，要使

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

直接解不等式，只能得到 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$. 就用 1.1.1 定理 2 的推论 1，可取自然数 $N(\varepsilon)$，使 $N(\varepsilon)\cdot\varepsilon>1$，即只须取 $N(\varepsilon)=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$. 于是，对任给的正数 ε，总存在自然数 $N(\varepsilon)=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$，当 $n>N(\varepsilon)$ 时，有

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}-0\right|<\varepsilon$$

成立. 由极限的定义知，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}=0$.

例 2 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}=0$，其中 $\alpha>0$.

证 对任意给定的正数 ε，要使

$$\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|=\frac{1}{n^\alpha}<\varepsilon$$

直接解不等式，有

$$n>\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

故可取自然数 $N(\varepsilon)$，使 $N(\varepsilon)\cdot\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}>1$，只须取 $N(\varepsilon)=\left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]+1$. 于是，对任给的正数 ε，总存在自然数 $N(\varepsilon)=\left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]+1$，当 $n>N(\varepsilon)$时，有

$$\left|\frac{1}{n^{\alpha}}-0\right|<\varepsilon$$

成立. 由极限的定义知，对任意的正数 α，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=0$$

例 3 设$|q|<1$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

证法一 对任给的正数 ε，要使

$$|q^n-0|=|q^n|=|q|^n<\varepsilon$$

直接解不等式，得到

$$n\lg|q|<\lg\varepsilon$$

由于 $0<|q|<1$，故 $\lg|q|<0$，因此有 $n>\frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$. 可取 $N(\varepsilon)=1+\left[\frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}\right]$. 于是，对任给的正数 ε，总存在自然数 $N(\varepsilon)=1+\left[\frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}\right]$，当 $n>N$ 时，有

$$|q^n-0|<\varepsilon$$

成立，即当$|q|<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$；

证法二 已知$|q|<1$，则存在 $\alpha>0$，使 $|q|=\frac{1}{1+\alpha}$，而

$$(1+\alpha)^n=1+n\alpha+\frac{n(n-1)}{2!}\alpha^2+\cdots+\alpha^n>n\alpha$$

故 $|q|^n<\frac{1}{n\alpha}$. 对任给的正数 ε，要使

$$|q^n-0|=|q^n|<\varepsilon$$

只要 $\frac{1}{n\alpha}<\varepsilon$，从而取 $N(\varepsilon)=1+\left[\frac{1}{\alpha\varepsilon}\right]$，则当 $n>N(\varepsilon)$时，就有

$$|q^n-0|<\varepsilon$$

从而当$|q|<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

例 4 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n+4}{2n^2+n-4}=\frac{1}{2}$.

证 当 $n>4$ 时，有

$$\left|\frac{n^2-n+4}{2n^2+n-4}-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}\left|\frac{n-4}{2n^2+n-4}\right|<\frac{3n}{4n^2}<\frac{1}{n}$$

对任给的正数 ε，要使

$$\left|\frac{n^2-n+4}{2n^2+n-4}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon,$$

只要 $\frac{1}{n}<\varepsilon$. 故只要 $N(\varepsilon)=\max\left\{4,\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1\right\}$，就有

$$\left|\frac{n^2-n+4}{2n^2+n-4}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+4}{2n^2+n-4}=\frac{1}{2}$$

例 5 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.

证 因为

$$\left|\frac{2^n}{n!}-0\right|=\frac{2^n}{n!}=\frac{2\cdot 2\cdot\cdots 2\cdot 2}{1\cdot 2\cdot\cdots(n-1)\cdot n}<2\cdot\frac{2}{n}=\frac{4}{n}$$

故对任给的正数 ε，总存在自然数 $N=\left[\frac{4}{\varepsilon}\right]+1$，当 $n>N$ 时，有 $\frac{4}{n}<\varepsilon$，从而有

$$\left|\frac{2^n}{n!}-0\right|<\varepsilon$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$$

例 6 求证当 $a>1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$.

证 借助二项式展开可知，若 $\lambda>0, n>1$，则

$$(1+\lambda)^n>1+n\lambda$$

令 $1+\lambda=a^{\frac{1}{n}}$，这个不等式变为

$$a>1+n(a^{\frac{1}{n}}-1)$$

所以

$$0<a^{\frac{1}{n}}-1<\frac{a-1}{n}$$

于是对于任意给定的正数 ε，要使 $|a^{\frac{1}{n}}-1|<\varepsilon$，只须 $\frac{a-1}{n}<\varepsilon$，即 $n>\frac{a-1}{\varepsilon}$. 故可取自然数 $N=\left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right]+1$，则当 $n>N$ 时，就有 $|a^{\frac{1}{n}}-1|<\varepsilon$，从而得到 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$.

例 7 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$.

证 因为

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{3}\right|&=\left|\frac{1}{6n^2}-\frac{1}{2n}\right|\\&=\frac{1}{2n}\left(1-\frac{1}{3n}\right)<\frac{1}{2n}<\frac{1}{n}\end{aligned}$$

所以对于任给的正数 ε，可取自然数 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$，当 $n>N$ 时有 $\frac{1}{n}<\varepsilon$，从而有

$$\left|\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$$

这说明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$$

例 8 证明:数列$\{(-1)^{n-1}\}$发散.

证 采用反证法,若不然,假定此数列有极限 α. 若 $\alpha\leqslant 0$ 时,存在某个正数 $\varepsilon_0=1$,对任意的自然数 N,总存在奇数 $n_0>N$,有

$$|(-1)^{n_0-1}-\alpha|=|1-\alpha|=1-\alpha\geqslant 1$$

成立;

若 $\alpha>0$,对任意的自然数 N,总存在偶数 $n_0^*>N$,有

$$|(-1)^{n_0^*-1}-\alpha|=|-1-\alpha|=1+\alpha>1$$

成立,总之可得与假设矛盾的结论,即数列$\{(-1)^{n-1}\}$发散.

1.1.3 收敛数列

设$\{a_n\}$是无穷数列,若存在实数 a,使得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则称$\{a_n\}$是收敛数列;如果$\{a_n\}$不收敛,便说它发散,即对任意实数 a,$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 都不成立,就称$\{a_n\}$是发散数列.

在 1.1.2 中已引进了数列极限的"ε-N"定义,并用这一定义考察了一些数列的极限. 为了进一步地求数列的极限,需要论证数列极限的若干重要性质与运算法则,其证明的方法有一定的代表性,请大家仔细领会.

(一) 收敛数列的性质

1° 收敛数列有唯一的极限

证 设收敛数列$\{a_n\}$有两个不同的极限 a 及 a'. 令 $d=|a-a'|$,则 d 是一个不为零的正常数. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,故对给定的正数 $\varepsilon=\dfrac{d}{2}$,存在自然数 N_1,使得当 $n>N_1$ 时,有不等式$|a_n-a|<\dfrac{d}{2}$成立,又因 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a'$,故对同一正数 $\varepsilon=\dfrac{d}{2}$,也有自然数 N_2 存在. 使得当 $n>N_2$ 时,不等式$|a_n-a'|<\dfrac{d}{2}$成立. 设 $N=\max(N_1,N_2)$,则当 $n>N$ 时就有

$$|a-a'|=|a-a_n+a_n-a'|\leqslant|a_n-a|+|a_n-a'|$$

$$< \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d$$

这与原假设$|a-a'|=d$矛盾，所以收敛数列不可能有两个不同的极限，即数列$\{a_n\}$的极限是唯一的.

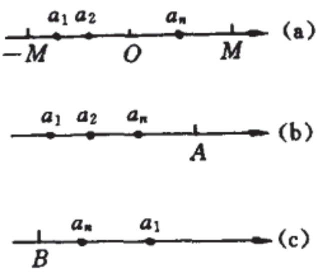


图 1.4

给定数列$\{a_n\}$，如果存在一正数M，使得对一切自然数n都有$|a_n| \leqslant M$，就称数列$\{a_n\}$是**有界的**. 这时数列的全部项都落在区间$[-M,M]$上(图 1.4a)；如果存在数A，使得对一切自然数n都有$a_n \leqslant A$，则称数列$\{a_n\}$有**上界**(图 1.4b)；如果存在数B，使得对一切自然数n都有$a_n \geqslant B$，则称数列$\{a_n\}$有**下界**(图 1.4c). 令$M=\max\{|A|,|B|\}$，则对一切自然数n都有$|a_n| \leqslant M$. 于是可写成如下的命题：

命题 2 数列$\{a_n\}$有界，当且仅当存在$M>0$，使对一切自然数n都有$|a_n| \leqslant M$. 显然，一个数列如果是有界的，则必有上界，亦有下界，但有下界的数列不一定有上界，如数列$\{n\}$有下界，而无上界；同样也存在有上界而无下界的数列，如$\{-n\}$. **不论数列是无上界或无下界或两者皆无，统称为无界.**

2° 收敛数列必是有界数列

证 设数列$\{a_n\}$收敛于a，则对于正数$\varepsilon=1$，存在自然数N，使得当$n>N$时，不等式$|a_n-a|<1$成立. 但由

$$|a_n - a| \geqslant |a_n| - |a|$$

所以当$n>N$时有

$$|a_n| < |a| + 1$$

就是说数列$\{a_n\}$至多只有前N项$a_1, a_2, \cdots, a_N$不满足这个不等式. 因此如果取

$$M = \max(|a|+1, |a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|)$$

则对一切自然数必有$|a_n| \leqslant M$，即$\{a_n\}$是有界数列.

既然收敛数列必有界，所以**无界数列就必发散**. 如数列$\{n\}$，$\{-n\}$，$\{(-1)^{n+1}n\}$都无界，故是发散数列，那么有界数列是否一定收敛呢？请看数列$\{(-1)^{n-1}\}$，它是有界的，但并不收敛. 就是说**有界数列不一定收敛**.

3° 设数列$\{a_n\}$收敛于a，数列$\{b_n\}$收敛于b，且$a>b$，则从某项开始恒有$a_n>b_n$

证 取正数$\varepsilon=\dfrac{a-b}{2}$，因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，所以存在自然数$N$，当$n>N$时不等式

$$|a_n-a|<\frac{a-b}{2},\ |b_n-b|<\frac{a-b}{2}$$

同时成立，因此得

$$a_n>a-\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}$$

$$b_n<b+\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}$$

所以当$n>N$时恒有$a_n>b_n$.

推论 如果数列$\{a_n\}$收敛于a，且$a>b$(或$a<b$)，则从某项开始恒有$a_n>b$(或$a_n<b$). 其中b是常数.

证 在性质3°中取$b_n=b$，即数列$\{b_n\}$是一个常数列$\{b\}$. 则从某项开始必有$a_n>b$.(用类似的方法可证明$a_n<b$).

特别，当$b=0$时，如果数列$\{a_n\}$收敛于a，且$a>0$(或$a<0$)，则从某项开始恒有$a_n>0$(或$a_n<0$). 常称为极限的保号性，今后经常使用.

4° 设数列$\{a_n\}$收敛于a，数列$\{b_n\}$收敛于b，且从某项开始恒有$a_n\leqslant b_n$，则$a\leqslant b$

证 假若不然，设$a>b$，则由性质3°可知，当n充分大时，不等式$a_n>b_n$成立. 这与假设$a_n\leqslant b_n$矛盾. 故有$a\leqslant b$.

这里要注意的是：若$a_n<b_n$，则不一定有$a<b$. 例如$-\dfrac{1}{n}<$

$\frac{1}{n}$，但

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

（二）收敛数列的四则运算法则

如果两个或多个收敛数列存在某种关系，它们的极限一般来说也有相应的关系. 这很好的反映在收敛数列之间的四则运算及其他一些性质中. 在某些场合这些性质提供了计算极限的方便法则.

定理 设数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$都收敛，则

(1) 它们的和与差所构成的数列$\{a_n \pm b_n\}$也收敛，且有

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n \pm \lim_{n\to\infty}b_n$$

(2) 它们的积所构成的数列$\{a_nb_n\}$也收敛，且有

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n \cdot \lim_{n\to\infty}b_n$$

特别，$\lim\limits_{n\to\infty}ca_n = c\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，其中 c 为常数；

(3) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n \neq 0$ 时，它们的商所构成的数列 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 也收敛，且有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$$

证 (1) 由于 $a_n-b_n=a_n+(-b_n)$，所以只须证明关于和的结论就行了.

设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，则对任意给定的正数 ε，存在自然数 N_1，使得当 $n>N_1$ 时有 $|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$；也存在自然数 N_2，使得当 $n>N_2$ 时有 $|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}$. 取 $N=\max(N_1,N_2)$，则当 $n>N$ 时就有

$$|(a_n+b_n)-(a+b)|\leqslant|a_n-a|+|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$$

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，由收敛数列的有界性可知存在正数 M，使对一切自然数有 $|b_n|\leqslant M$. 因为

$$\begin{aligned}|a_nb_n-ab|&=|a_nb_n-ab_n+ab_n-ab|\\&\leqslant|a_n-a||b_n|+|a||b_n-b|\end{aligned}$$

所以

$$|a_nb_n-ab|\leqslant M|a_n-a|+|a||b_n-b|$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，故对任给的正数 ε，存在自然数 N_1，使当 $n>N_1$ 时有 $|a_n-a|<\varepsilon$；也存在自然数 N_2，使当 $n>N_2$ 时有 $|b_n-b|<\varepsilon$. 取 $N=\max(N_1,N_2)$，则当 $n>N$ 时就有

$$|a_nb_n-ab|\leqslant M\varepsilon+|a|\varepsilon=(M+|a|)\varepsilon$$

由于 $(M+|a|)\varepsilon$ 也是任意的正数，故得

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=ab=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n$$

如果数列 $\{b_n\}$ 是一个常数列 $\{c\}$，即它的每一项都等于常数 c，显然这个常数列的极限也是 c，则(2)化成

$$\lim_{n\to\infty}ca_n=\lim_{n\to\infty}c\lim_{n\to\infty}a_n=c\lim_{n\to\infty}a_n$$

就是常数可以提到极限号外.

(3) 因为 $\dfrac{a_n}{b_n}=a_n\cdot\dfrac{1}{b_n}$，所以只要证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$$

设 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b\neq0$，则对任给的正数 ε，存在自然数 N_1，使得当 $n>N_1$ 时有 $|b_n-b|<\varepsilon$. 由此有 $|b|-|b_n|<\varepsilon$，即 $|b_n|>|b|-\varepsilon$. 若取 $\varepsilon=\dfrac{|b|}{2}$，则存在自然数 N_2，使得当 $n>N_2$ 时有 $|b_n|>\dfrac{|b|}{2}$，从而当 $n>N=\max(N_1,N_2)$ 时就有

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right|=\frac{|b_n-b|}{|b_nb|}<\frac{2\varepsilon}{|b|^2}$$

这就证明了

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$$

利用这个定理,就可以把某些较复杂的数列极限化为简单数列极限的四则运算去计算.

例 1 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+3n^2+4}{5n^3+6n+7}$.

解 用 n^3 除分子分母得

$$\frac{2n^3+3n^2+4}{5n^3+6n+7}=\frac{2+3\dfrac{1}{n}+4\dfrac{1}{n^3}}{5+6\dfrac{1}{n^2}+7\dfrac{1}{n^3}}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n^2+4}{5n^3+6n+7}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+3\dfrac{1}{n}+4\dfrac{1}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+6\dfrac{1}{n^2}+7\dfrac{1}{n^3}\right)}=\frac{2}{5}$$

一般地,关于 n 的有理数列的极限有下面的结论.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_{k-1}n+a_k}{b_0n^l+b_1n^{l-1}+\cdots+b_{l-1}n+b_l}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0} & k=l\\ 0 & k<l\\ \text{发散} & k>l\end{cases}$$

事实上

$$\begin{aligned}&\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_{k-1}n+a_k}{b_0n^l+b_1n^{l-1}+\cdots+b_{l-1}n+b_l}\\&\quad=n^{k-l}\frac{a_0+a_1\dfrac{1}{n}+\cdots+a_{k-1}\dfrac{1}{n^{k-1}}+a_k\dfrac{1}{n^k}}{b_0+b_1\dfrac{1}{n}+\cdots+b_{l-1}\dfrac{1}{n^{l-1}}+b_l\dfrac{1}{n^l}}\end{aligned}$$

当 $k=l$ 时,右端显然以 $\dfrac{a_0}{b_0}$ 为极限,所以左端有理数列的极限存在且为 $\dfrac{a_0}{b_0}$;当 $k<l$ 时,右端第一个因子 n^{k-l} 极限为零,而第二个因

子以 $\frac{a_0}{b_0}$ 为极限,故整个右端的极限为零,所以左端有理数列的极限也为零;当 $k>l$ 时,右端第一个因子 n^{k-l} 无限增大,所以左端有理数列是无界的,因而发散.

例 2 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$.

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$, 故有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right]}{3^{n+1}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right]}$$

$$=\frac{1}{3}\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right]}{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right]}=\frac{1}{3}$$

例 3 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$

解
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{3}$$

例 4 若 a 是任意的正数,求证 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$.

证 当 $a>1$ 时,由 1.1.2 的例 6 得 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$; 当 $a=1$ 时结论是显然的;当 $0<a<1$ 时,由于 $a^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}$, 而 $\frac{1}{a}>1$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}=1$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$.

极限的性质与运算法则,都是在数列极限存在的前提下给出

的. 但对遇到的数列往往事先并不知道是否收敛,因此有必要给出数列收敛的判别法.

(三) 数列的收敛判别法

判别法 1 (两边夹判别法) 设数列$\{a_n\}$与数列$\{b_n\}$都收敛于 a,且从某项(例如第 $N+1$ 项)开始恒有

$$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$$

则数列$\{c_n\}$亦收敛于 a.

证 因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$. 所以对任给的正数 ε,存在自然数 N_1,当 $n>N_1$ 时,有$|a_n-a|<\varepsilon$,或 $a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$;存在自然数 N_2,当 $n>N_2$ 时,有$|b_n-b|<\varepsilon$,或 $a-\varepsilon<b_n<a+\varepsilon$. 取自然数 $N'=\max(N,N_1,N_2)$,便得到当 $n>N'$时,有

$$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n, a-\varepsilon < a_n, b_n < a+\varepsilon$$

成立. 于是,当 $n>N'$时,有

$$a-\varepsilon < a_n \leqslant c_n \leqslant b_n < a+\varepsilon,\ 或\ a-\varepsilon < c_n < a+\varepsilon$$

即 $|c_n-a|<\varepsilon$, 故$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$.

两边夹判别法给出了求数列极限的一种常用方法. 下面将通过一些例子来说明它的应用.

例 5 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n^\alpha}}$ $(\alpha>0)$.

解 当 $\alpha>0$ 时显然有

$$1<\sqrt{1+\frac{1}{n^\alpha}}<1+\frac{1}{n^\alpha}$$

但 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^\alpha}\right)=1$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^\alpha}}=1$$

例 6 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+k}}$.

解 因为

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}},\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

由例 5 得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1,\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}=1$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1,\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$$

又由

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

和已得的结果知

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\\&\quad=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1\end{aligned}$$

例 7 求极限 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

解 当 $\lambda>0$ 时利用二项式展开可得

$$(1+\lambda)^n=1+n\lambda+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2+\cdots+\lambda^n>\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2$$

在这个不等式中令 $\lambda=\sqrt[n]{n}-1$,则有

$$n>\frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n}-1)^2$$

当 $n\geqslant2$ 时有

$$0<\sqrt[n]{n}-1<\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}$$

但 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}=0$, 依据判别法 1 即得 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}-1)=0$. 由此

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

我们知道,一个有界数列不一定是收敛数列,但如果在有界的数列中添加一些条件,就有可能使它成为收敛的数列. 这类条件之一就是数列的"单调性".

数列$\{a_n\}$**单调**不减是指对于$\forall n\in N$,$a_n\leqslant a_{n+1}$成立;若对于$\forall n\in N$,$a_n\geqslant a_{n+1}$成立,则称$\{a_n\}$为**单调不增数列**.

如果上面数列各项间都只有不等号成立,则该数列分别称为严格增或严格减的数列. 单调不减、单调不增、严格增与严格减的数列统称为单调数列.

对于这类数列,如果在它的变动方向的前方有一个界限,数列的项必然要越来越接近某一定数;否则数列的项就必将毫无阻碍,长驱前进,势必冲破一切界限. 根据这一想法,我们得到一个判别数列收敛的方法.

判别法 2 (单调有界数列的收敛判别法) 单调有界数列必存在极限(证明请看 1.1.4 的定理 4).

判别法 2 彻底解决了单调数列的极限问题. 比如,对于单调不减数列的收敛判别,若有上界就收敛;若无上界当然发散.

例 8 考察数列

$$a_1=\sqrt{a},a_2=\sqrt{a+\sqrt{a}},a_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},\cdots,$$

$$a_n=\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}}\cdots$$

$$(n\text{ 重根式})$$

其中$a>0$,则$\{a_n\}$是收敛的.

事实上,数列$\{a_n\}$显然是严格增的. 同时它也有上界,即对任意自然数 n 成立 $a_n<\sqrt{a}+1$,对 n 应用归纳法. 当 $n=1$ 时,$a_1=\sqrt{a}<\sqrt{a}+1$. 若 $a_k<\sqrt{a}+1$,则有

$$a_{k+1}=\sqrt{a+a_k}<\sqrt{a+\sqrt{a}+1}<\sqrt{a+2\sqrt{a}+1}$$

$$= \sqrt{a} + 1$$

即对任意的 n,都有

$$a_n < 1 + \sqrt{a}$$

所以这个数列是收敛的,设其极限为 x,为要确定它,在等式

$$a_{n+1}^2 = a + a_n$$

的两端取极限就得到 x 所满足的二次方程

$$x^2 = a + x$$

由于数列$\{a_n\}$的极限 x 不能为负数,取这个方程的正根就有

$$x = \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2}$$

作为上述极限存在的判别法 2 的应用,在此要引进一个新的无理数 e,这个数在数学分析及其应用上,都是十分重要的.

例 9 证明数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$的极限存在.

证 记 $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, 应用几何平均小于算术平均,有

$$\sqrt[n+1]{a_n} = \sqrt[n+1]{1 \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \leqslant \frac{1}{n+1}\left[1 + n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = 1 + \frac{1}{n+1}$$

因此有

$$a_n \leqslant \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1} \quad (n = 1,2,\cdots)$$

所以数列 a_n 是不减的.

再证它是有界的.易见有 $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. 令$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$,对 $n \geqslant 2$,又有

$$\sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}}$$
$$= \frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + (n-1)\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{n^3}(n^3+n^2+n+1)<1+\frac{1}{n-1}$$

因此有

$$b_n \leqslant \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = b_{n-1} \quad (n=2,3,\cdots)$$

所以数列 b_n 是不增的. 故得

$$a_n < b_n \leqslant b_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant b_1 = 4$$

于是我们就证明了数列 $\left\{a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 不减且有上界,所以它的极限存在. 若用字母 e 表示这个极限的值,即有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$

由数列极限的性质知,有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

利用此不等式可算出 e 取任何精度的近似值.

进一步还可证明 e 是无理数,它的数值表示成无穷小数则为

$$\mathrm{e}=2.71828182\cdots$$

在高等数学中常用到 e 为底的对数. 这种对数称为自然对数简记为"ln".

判别法 2 只适用于判别单调数列的收敛性. 故有很大的局限性. 判别任意一个数列的收敛或发散性,简称为敛散性,有如下的柯西(Cauchy)收敛准则.

判别法 3 (柯西收敛准则) 数列$\{a_n\}$收敛的充分必要条件是:对任给的正数 ε,总有这样的自然数 N 存在,使得当 $n,m>N$ 时,就有不等式$|a_n-a_m|<\varepsilon$ 成立(证明请看 1.1.4 的定理 3).

必须指出 柯西收敛准则中的 N 只与 ε 有关,而 m 与 n 是大于 N 的任意两个自然数. m 与 n 彼此可以相差很大,这都没有什么关系. 柯西收敛准则说明:一个数列有极限,必须而且只须充分靠后的任意两项之差可以任意小.

这个准则在理论上有着十分重要的意义. 但是它与判别法 2 一样,只告诉我们数列的极限是否存在,并未告诉在极限存在时如何求出该极限的方法.

为了使用时的方便,这个准则常改写成下面的形式:

数列$\{a_n\}$收敛的充分必要条件是:对任给的正数 ε,总存在这样的自然数 N,使当 $n>N$ 时,不等式

$$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$$

对一切的自然数 p 都成立.

当判别数列发散时,要应用到柯西准则的否定叙述,其精确叙述如下:

数列$\{a_n\}$发散的充分必要条件是:存在某个正数 ε_0,对任意的自然数 N,存在某两个自然数 $m_0,n_0>N$,有$|a_{n_0}-a_{m_0}|\geqslant\varepsilon_0$ 成立.

例 10 求证数列 $\left\{a_n=\dfrac{\sin 1}{2}+\dfrac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\dfrac{\sin n}{2^n}\right\}$ 收敛

证 因为对一切自然数 p 成立不等式

$$\begin{aligned}|a_{n+p}-a_n|&=\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right|\\&\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}=\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^p}\right)<\frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$,故对任给的正数 ε,存在自然数 N,当 $n>N$ 时有 $\dfrac{1}{2^n}<\varepsilon$. 于是对一切自然数 p 更有$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$,根据柯西准则,数列$\{a_n\}$收敛.

这个数列是非单调的. 因为 $a_{n+1}-a_n=\dfrac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}$ 时正时负. 所以它的收敛性就不能用判别法 2 来判断.

例 11 求证数列 $\left\{b_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}\right\}$ 收敛.

证 仍用柯西准则证明所给单调数列的收敛性. 因为

$$|b_{n+p}-b_n|=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}$$

利用不等式

$$\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}(k\geqslant 2)$$

就得到

$$|b_{n+p}-b_n|<\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}$$

对一切自然数 p 都成立. 于是对任给的正数 ε,取自然数 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$,当 $n>N$ 时,不论 p 是怎样的自然数,总有 $|b_{n+p}-b_n|<\varepsilon$. 所以数列 $\{b_n\}$ 的极限存在.

柯西准则不仅能判断数列的收敛性,也能判断数列的发散性,请看下例.

例 12 证明数列 $\left\{C_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}$ 发散.

证 存在正数 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$,对任意的自然数 N,考虑 $n_0=N+1$ 及 $2n_0=2N+2$,它们都大于 N,且

$$|C_{2n_0}-C_{n_0}|=\left|\frac{1}{n_0+1}+\frac{1}{n_0+2}+\cdots+\frac{1}{2n_0}\right|$$
$$>\frac{1}{2n_0}+\cdots+\frac{1}{2n_0}=n_0\cdot\frac{1}{2n_0}=\frac{1}{2}=\varepsilon_0$$

根据柯西准则的否定叙述知,数列 $\{C_n\}$ 发散.

*1.1.4 实数集对极限运算的完备性定理

在 1.1.1 中曾指出:今后无特殊声明,超出实数范围就认为无意义. 自然作为高等数学基础的极限论,也应在实数范围内来研究. 那么为什么要这样呢? 为何不选择在有理数或整数集上来研究呢?

极限的理论问题首先是极限的存在问题. 例如数列 $\{a_n\}$ 是否

存在极限，不仅与数列本身的结构有关，而且还与数列所在的数集有关. 若在有理数集上讨论极限，那么连续性公理就有问题了，比如单调有上界的有理数列 $\left\{a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 就不存在极限或上确界. 因为它的极限或上确界 e 是无理数，已不属于有理数集. 从运算的角度来说，有理数集关于极限运算是不完备的. 若在实数集上讨论极限就不会出现这种情况. 因为实数集关于极限运算是完备的，实数集的这个性质是它区别于有理数集的重要特征，也是实数集的优点. 将极限论建立在实数集之上，它就有了巩固的基础. 自然，高等数学也就有了牢固的基础. 但是描述实数集对极限运算的完备性有种种不同的方法. 这里是在连续性公理的基础上，证明与公理等价的其他几个关于实数集对极限运算的完备性定理.

定义 设 $S=\{\Delta\}$ 为一族开区间所构成的集合. 若集合 $X\subset \bigcup\limits_{\Delta\in S}\Delta$，即对任意的 $x\in X$，都存在有开区间 $\Delta\in S$，使得 $x\in\Delta$，则称 S 覆盖了集合 X，或 S 是 X 的一个开区间覆盖. 当 S 中开区间 Δ 的个数是有限的时，则称 S 是 X 的一个有限覆盖.

例如，对 $[a,b]$ 中的任意一点 x，作一个 x 的 δ 邻域 $\Delta(x)$，则 $\{\Delta(x)\}$，$x\in[a,b]$，构成了 $[a,b]$ 的一个覆盖. 其中 δ 可随 x 的变化而改变.

应用连续性公理可导出如下的波莱尔(Borel)有限覆盖定理.

定理 1(有限覆盖定理) 如果开区间集合 S 覆盖了闭区间 $[a,b]$，则 S 中存在有限个开区间也覆盖了闭区间 $[a,b]$.

证 设 $A=\{x\,|\,[a,x]$，具有有限覆盖，$a<x<b\}$. 因为存在开区间 $\Delta\in S$，使 $a\in\Delta$. 从而必有点 a 附近的点 $x>a$，且有 $[a,x]\subset\Delta$. 从而 $x\in A$. 易见，数集 A 有上界. 由连续性公理(或确界定理，或定理 6)知，数集 A 有上确界. 设

$$\sup A = c.$$

今证明：$c=b$. 采用反证法，若不然，假定 $c<b$. 于是存在开区间 $(\alpha,\beta)\in S$，使 $c\in(\alpha,\beta)$，即 $\alpha<c<\beta$. 由上确界的定义知，存在 x'

$\in A$，且 $\alpha<x'\leqslant c$. 已知$[a,x']$有有限覆盖，再加上一个开区间$(\alpha,\beta)\in S$ 后，则闭区间$[a,c]$也有有限覆盖，即 $c\in A$. 由于 $c<b$ 及 $\alpha<c<\beta$，因此存在 $x''\in(c,\beta)$，即在$[a,x'']$上也有有限覆盖，且 $c<x''<\beta$. 从而 $x''\in A$，这显然与 $\sup A=c$ 矛盾. 故有 $c=b$，即$[a,b]$具有有限覆盖.

如果从数列$\{a_n\}$中任意挑选出无限多项，按照原来出现的顺序排成一个数列

$$a_{n_1},a_{n_2},\cdots,a_{n_k},\cdots$$

这个数列就称为$\{a_n\}$的一个子列. 其中 n_k 表示 a_{n_k} 在原数列的项数，n_k 的下标 k 表示 a_{n_k} 在子列的项数.

一个有界的数列可能没有极限，但根据定理 1 可推出它总存在着收敛的子列.

定理 2(波尔察诺-维尔斯特拉斯(Bolzano-Weierstrass)定理) 有界的无限数列必有收敛的子数列.

证 设无限数列$\{a_n\}$是有界的，故存在区间$[A,B]$，使这个数列的所有项都落在该区间内. 假定数列$\{a_n\}$不存在收敛的子数列，即对任意的 $x\in[A,B]$，数列$\{a_n\}$都没有收敛于 x 的子数列，这就是说，存在正数 δ_x，在点 x 的邻域$(x-\delta_x,x+\delta_x)$内只有数列$\{a_n\}$的有限多项. 但是已知

$$[A,B]\subset\bigcup_{x\in[A,B]}(x-\delta_x,x+\delta_x)$$

根据定理 1，即有限覆盖定理知，有

$$[A,B]\subset\bigcup_{k=1}^{m}(x_k-\delta_{x_k},x_k+\delta_{x_k})$$

于是集合$\bigcup\limits_{k=1}^{m}(x_k-\delta_{x_k},x_k+\delta_{x_k})$内只有数列$\{a_n\}$的有限多项. 从而得到$[A,B]$内也只有数列$\{a_n\}$的有限多项. 这显然与假设矛盾.

定理 3(柯西收敛准则) 数列$\{a_n\}$收敛的充分必要条件是：对任给的正数 ε，总有这样的自然数 N 存在. 使得当 $n,m>N$ 时，就有不等式$|a_n-a_m|<\varepsilon$ 成立.

证 必要性：如果这数列收敛于 a，则对任给的正数 ε，存在自

然数 N,使得当 $m,n>N$ 时有

$$|a_m-a|<\frac{\varepsilon}{2},\ |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$

所以

$$|a_n-a_m|\leqslant|a_m-a|+|a_n-a|<\varepsilon$$

充分性:由已知条件,对 $\varepsilon_0=1$,总存在自然数 N,对任意的 m, $n>N$,有 $|a_n-a_m|<1$,将 m 固定,有

$$|a_n|<1+|a_m|$$

取 $M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|,1+|a_m|\}$. 则对任意的自然数 n,有 $|a_n|\leqslant M$,即数列 $\{a_n\}$ 有界. 根据定理 2,数列 $\{a_n\}$ 存在收敛的子数列 $\{a_{n_k}\}$. 设 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=a$,故对任给的正数 ε,存在自然数 K,当 $k>K$ 时有 $|a_{n_k}-a|<\varepsilon/2$. 由充分性的假设,对任给的正数 ε,存在自然数 N,当 $m,n>N$ 时有

$$|a_n-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}$$

在上式中,取 $m_0=n_{K+N+1}$,显然 $m_0>N$,于是

$$|a_n-a|\leqslant|a_n-a_{m_0}|+|a_{m_0}-a|$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

即数列 $\{a_n\}$ 收敛.

定理 4 单调有界数列必有极限.

证 设数列 $\{a_n\}$ 是单调不减有上界为 M. 考虑区间 $[a_1,M]$ 的中点 $c_0=\dfrac{a_1+M}{2}$,当 c_0 仍是 $\{a_n\}$ 的上界时,令 $[\alpha_1,\beta_1]=[a_1,c_0]$;当 c_0 不是数列 $\{a_n\}$ 的上界时,令 $[\alpha_1,\beta_1]=[c_0,M]$. 于是有 $a_1\leqslant\alpha_1\leqslant\beta_1\leqslant M$,而区间 $[\alpha_1,\beta_1]$ 的长度是原来区间 $[a_1,M]$ 长度的一半. β_1 仍是数列 $\{a_n\}$ 的上界,且 $[\alpha_1,\beta_1]$ 中含有数列 $\{a_n\}$ 的项. 在第一种情况下,$a_1\in[\alpha_1,\beta_1]$;在第二种情况下,因为 $\alpha_1=c_0$ 不是数列 $\{a_n\}$ 的上界,所以存在自然数 n_1,使 $a_1\leqslant a_{n_1}$,这就说明了 $[\alpha_1,\beta_1]$ 中必含有数列 $\{a_n\}$ 的项 a_{n_1}. 继续二等分区间 $[\alpha_1,\beta_1]$,且一直做下

去. 一般地有

$$\alpha_k \leqslant \alpha_{k+1} \leqslant \beta_{k+1} \leqslant \beta_k$$

而

$$\beta_{k+1} - \alpha_{k+1} = \frac{1}{2}(\beta_k - \alpha_k)$$

其中所有的 β_k 都是数列$\{a_n\}$的上界，且区间$[\alpha_k, \beta_k]$中含有数列$\{a_n\}$的项. 容易得到

$$\beta_k - \alpha_k = \frac{M - a_1}{2^k}$$

因为有

$$\lim_{k \to \infty} \frac{M - a_1}{2^k} = 0$$

所以对任给的正数 ε，存在自然数 K，当 $k > K$ 时，有

$$|\beta_k - \alpha_k| < \varepsilon.$$

由以上$[\alpha_k, \beta_k]$的构造法，对任意的 k，存在 $a_{n_k} \in [\alpha_k, \beta_k]$，因为数列$\{a_n\}$是单调不减的，故当 $m > n_k$ 时，有 $\alpha_k \leqslant a_{n_k} \leqslant a_m$，又因为 β_k 是数列$\{a_n\}$的上界，所以对任意的 m，有 $a_m \leqslant \beta_k$. 于是当 $m > n_k$ 时，有

$$\alpha_k \leqslant a_m \leqslant \beta_k$$

同样，当 $p > n_k$ 时，有

$$\alpha_k \leqslant a_p \leqslant \beta_k$$

当 $k > K, m, p > n_k$ 时，有

$$|a_m - a_p| \leqslant \beta_k - \alpha_k < \varepsilon$$

即当 $m, p > n_k$ 时，有$|a_m - a_p| < \varepsilon$. 由定理 3 知，数列$\{a_n\}$收敛.

同理可证明单调不增有下界的情形.

定理 5(区间套定理)　设有闭区间列$\{[a_n, b_n]\}$，且满足条件：

(1) $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$

(2) $\lim\limits_{n \to \infty}(b_n - a_n) = 0$

则存在唯一的点 ξ 属于所有闭区间$[a_n, b_n]$，$n = 1, 2, \cdots$.

证 由假设条件(1)知,数列$\{a_n\}$是单调不减有上界的,b_1就是它的上界.根据定理4,数列$\{a_n\}$存在极限.设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\xi$.

再由假设条件(2),有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}b_n &= \lim_{n\to\infty}(b_n-a_n+a_n)\\ &= \lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)+\lim_{n\to\infty}a_n\\ &= \xi\end{aligned}$$

于是,数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$有相同极限ξ.

对任意暂时固定的自然数n,当$k>n$时,有

$$a_n\leqslant a_k<b_k\leqslant b_n$$

则得

$$a_n\leqslant\lim_{k\to\infty}a_k=\xi$$

与

$$\xi=\lim_{k\to\infty}b_k\leqslant b_n$$

即$a_n\leqslant\xi\leqslant b_n$.则点$\xi$属于所有的闭区间$[a_n,b_n]$,$n=1,2,\cdots$.

最后,假定还存在$\xi'\neq\xi$,即$|\xi'-\xi|>0$,也属于所有的闭区间$[a_n,b_n]$,则对任意的自然数n,ξ与ξ'都属于闭区间$[a_n,b_n]$,故有

$$0<|\xi'-\xi|\leqslant b_n-a_n$$

令$n\to\infty$,得到

$$0<|\xi'-\xi|\leqslant\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0.$$

这显然是矛盾的.故有$\xi=\xi'$.

定理6(确界定理) 有上界的非空数集必有上确界.

证 设E是一个有上界的非空数集.如果区间$[a,b]$至少含有E中的一个数,而在这个区间的右侧不再有E中的数时,则称它为**正则区间**.如果将正则区间平分成两个区间,则其中必有一个是正则的.因为如果右半区间至少含有E的一个数时,则它就是正则区间,否则左半区间就是正则的.

任取数集E中的一个数a和它的一个上界b,显然区间$[a,b]$就是正则的.由中点将$[a,b]$平分成两个区间,取出其中正则的区

间记为$[a_1,b_1]$，再将$[a_1,b_1]$平分成两个区间，从中取出正则的区间记为$[a_2,b_2]$. 一般设$[a_{n+1},b_{n+1}]$是平分$[a_n,b_n]$后所得两个区间中的正则区间. 于是闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$就组成了一个区间套，从而存在唯一的一点β属于所有的区间$[a_n,b_n]$. 下面证明数β就是数集E的上确界. 事实上，由正则区间的定义可知，区间套$\{[a_n,b_n]\}$的右端点b_n是E的上界，故对E中的任意数c，必有

$$c \leqslant b_n \quad (n=1,2,\cdots)$$

当n无限增大时取极限就得到$c\leqslant\beta$. 就是说E中没有大于β的数，所以数β是数集E的上界.

其次，设ε是任意给定的一个正数，则对充分大的n，可使区间$[a_n,b_n]$的长度$b_n-a_n<\varepsilon$. 由于$a_n\leqslant\beta\leqslant b_n$，故得

$$\beta-\varepsilon<a_n.$$

但区间$[a_n,b_n]$是正则的，从而E中必有数c满足

$$\beta-\varepsilon<a_n<c\leqslant\beta.$$

这就证明了β是数集E的上确界.

复习思考题

1. 试述数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$的定义，并作出几何解释.

2. 若对于某几个或无穷多个正数ε，存在自然数$N(\varepsilon)$，当$n>N(\varepsilon)$时，$|a_n-a|<\varepsilon$，那么能否说$\{a_n\}$以a为极限？为什么？

3. 若对于任意的正数ε，存在自然数$N(\varepsilon)$使a_N后有无穷多项满足不等式$|a_n-a|<\varepsilon$，那么能否说$\{a_n\}$以a为极限？为什么？

4. 对于每一个自然数k，有自然数N_k. 当$n>N_k$时，有$|a_n-a|<\dfrac{1}{k}$，问是否有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$成立？

5. 对于每一个区间$\left(a-\dfrac{1}{k},a+\dfrac{1}{k}\right)(k=1,2,\cdots)$，$\{a_n\}$中只有有限多项位于区间之外，问是否有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$？

6. 设$a_n\to a(n\to\infty)$，今把$\{a_n\}$的有限多项换成新的数，问新的数列是

否收敛？是否仍以 a 为极限？

7. 试用"ε-N"语言完整地表达：$\{a_n\}$不以 a 为极限.

8. 数列极限有哪些基本性质？并指出其成立的条件.

9. 收敛数列是否一定有界？有界数列是否一定收敛？无界数列是否有可能收敛？

10. 若数列$\{a_n\}$收敛，数列$\{b_n\}$发散，则$\{a_n \pm b_n\}$，$\{a_n \cdot b_n\}$的收敛性如何？举例说明. 若$\{a_n\}\{b_n\}$皆发散则情况又如何？

11. 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，是否有$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$，又是否能断定

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1?$$

12. 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$，是否能由此推出$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 或$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$？若再设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，上述结论又如何？

13. 已知单调有界数列必收敛，那么收敛的数列是否一定是单调的？举例说明.

14. 若对于任意正数 ε，存在 N，使当 $n > N$ 时，有$|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$，则是否能断定$\{a_n\}$收敛？举例说明.

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]^n = 1^n = 1$，这个等式的错误何在？

16.
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = \underbrace{0+0+\cdots+0}_{n\text{个}} = 0.$$

这里有没有错误，原因何在？

17. 设$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = a$，$(q>1)$，由于 $q^{n+1} = q^n \cdot q$，两边取极限得

$$a = q \cdot a$$

从而有 $a=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$，$(q>1)$. 这里有没有错误，原因何在？

习题 1.1

1. 试考察集合 $E\left\{\dfrac{n}{m+n} \middle| m, n \in N\right\}$ 的 sup, max, inf, min，若存在求其值.

2. 如果 E 与 F 都是有界的实数集合. 设存在 $y\in F$，且对任意的 $x\in E$，有 $x\leqslant y$. 证明：$\sup E\leqslant \sup F$.

3. 求下列数集的下确界和上确界：

(1) $E=\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\middle| n\in N\right\}$

(2) $E=\left\{\frac{1}{n-10.2}\middle| n\in N\right\}$

4. 证明：若 a 为一定点，δ 为正数，则不等式 $|x-a|<\delta$ 与 $a-\delta<x<a+\delta$ 等价，并说明其几何意义.

5. 解下列绝对值不等式：

(1) $|\sqrt{x}-1<\frac{1}{2}|$　　　　(2) $|x+1|>2$

(3) $|5-x^{-1}|<1$

6. 试写出下列数列的一般项：

(1) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\cdots$　　　　(2) $\frac{2}{1},\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots$

(3) $0,\frac{1}{2}\cos\pi,\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2},\frac{1}{4}\cos 2\pi,\cdots$

7. 试用"ε-N"方法，证明下列各题：

(1) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$，并填下表

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	…
N						

(2) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{5+3n}=\frac{1}{3}$；　　(3) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$；

(4) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}=0$；　(5) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

8. 证明：若数列 $\{a_n\}$ 的奇数项及偶数项都收敛于同一极限 a，即 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k+1}=a$，$\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

9. 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$. 但反之不一定成立，试举例说明之. 但若 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 试证之.

10. 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，又 $|b_n|\leqslant M$，$(n=1,2,\cdots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$.

11. 从数列 $\{a_n\}$ 中任意取无限多项，仍按原来序号的大小排成一个数列

$\{a_{n_k}\}$：

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$$

称为原数列$\{a_n\}$的一个子数列. 证明：若数列$\{a_n\}$收敛于a，则任一子数列$\{a_{n_k}\}$也必收敛于a；若数列$\{a_n\}$有一个子数列发散，则数列$\{a_n\}$必发散. 又若数列$\{a_n\}$有某个子数列收敛，则数列$\{a_n\}$不一定收敛，试举例说明.

12. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+5n+2}{3n^2+2n+1}$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\cdot\sin n!}{n+1}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$

13. 求下列极限：

(1) $a_n=\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}$　　(2) $a_n=\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{3^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(2n-1)^2}{n^3}$

(3) $a_n=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)n}$

(4) $a_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{(2n-1)}{2^n}$

(5) $a_n=\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\left(1-\dfrac{1}{6}\right)\cdots\left(1-\dfrac{2}{n(n+1)}\right)$

(6) $a_n=(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\cdots(1+q^{2^n}),(|q|<1)$

(7) $a_n=\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

14. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{(n+a)(n+b)}-n]$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n+\dfrac{1}{2}}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(1-\sqrt[5]{1-\dfrac{1}{n}}\right)$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$

15. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right]$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^k-n^k]$，其中$0<k<1$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2-n+2}$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\cos^2 1+\cos^2 2+\cdots+\cos^2 n}$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{\ln 2}{2}+\sin\dfrac{\ln 3}{3}+\cdots+\sin\dfrac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

16. 证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，且 $a>0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\lg a_n=\lg a$$

17. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1{}^n+a_2{}^n+\cdots+a_m{}^n}=\max(a_1,a_2,\cdots,a_m)$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 为 m 个正数.

18. 证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

19. 利用 18 题的结果，求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$.

20. 证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，且 $a_n>0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}=a$$

21. 证明：若 $a_n>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

22. 已知数列 $\left\{S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right\}$ 收敛，求证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ka_k=0$$

23. 证明下列数列收敛：

(1) $a_n=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$

(2) $a_n=\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$

(3) $a_n=\dfrac{1}{3+1}+\dfrac{1}{3^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{3^n+1}$

24. 证明下列数列收敛，并求出其极限：

(1) $a_n=\dfrac{n}{c^n}$，$(c>1)$ (2) $a_n=\underbrace{\sin\sin\cdots\sin n}_{n个}$

(3) $a_1 = \frac{c}{2}, a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{{a_n}^2}{2}, (0 \leqslant c \leqslant 1)$

(4) $a > 0, a_0 > 0, a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)$,(提示:先证明 $a_n^2 \geqslant a$)

(5) $a_0 = 1, a_n = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}+1}$

25. 设 $x_1 = a > 0, y_1 = b > 0, x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, n = 1, 2, \cdots$,证明数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$有相同的极限. 通常称此极限为数 a 与 b 的"算术-几何平均数".

26. 证明下列等式:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$,($a > 1, k$ 为正整数)

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^k} = 0$,($k > 0$)

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$,($a > 1, k > 0$)

27. 证明下列数列不收敛:

(1) $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$

(2) $a_n = 5\left(1 - \frac{2}{n}\right) + (-1)^n$

28. 利用极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$,求下列数列的极限:

(1) $a_n = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}$

(2) $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

(3) $a_n = \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)^{n+1}$

(4) $a_n = \left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n$

(5) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{2n^3}$

29. 试利用柯西收敛准则,判别下列数列的敛散性:

(1)$a_n = \alpha_0 + \alpha_1 q + \cdots + \alpha_n q^n$,其中$|\alpha_k| \leqslant M, (k = 1, 2, \cdots)$而$|q| < 1$

(2) $a_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \frac{\cos 3!}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}$

(3) $a_n = \sin 1 + \sin\frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$

30. 证明不等式:

(1) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$,($n = 1, 2, \cdots$)

(2) $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$, $(n=1,2,\cdots)$

(3) $\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^n < n! < \mathrm{e}\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}$, $(n=1,2,\cdots)$

1.2 函数极限

这里的函数是单变量实值函数的简称,它是从 R 到 R 的一个映射,即有

$$f: x \to y$$

且称 $x \in X$ 为自变量,$y = f(x) \in V(f)$ 为函数. X 是函数的定义域,通常是 R 上的子集合,例如某个区间$[a,b]$或(a,b),$(-\infty,a]$,$[a,+\infty)$等等,而称 $V(f)$ 为函数的值域,有 $V(f) \subset (-\infty,+\infty)$.

若实数集 $V(f)$ 有上界(或下界),称函数 $f(x)$ 有上界(或下界);若函数 $f(x)$ 的值域 $V(f)$ 是有界集,就称 $f(x)$ 为有界函数;若 $V(f)$ 是无界集,就称 $f(x)$ 是无界函数. 由命题 1 知,函数 $f(x)$ 在 X 上有界,当且仅当 $\exists M>0$,使对 $\forall x \in X$ 都有 $|f(x)| \leqslant M$.

1.2.1 函数在无限大处的极限

在第一节中,我们介绍了数列极限. 数列是一种特殊类型的函数,即自变量是离散变量的函数. 因此数列极限是一类特殊的函数极限,本节将要介绍一般的函数极限,即自变量是连续变量的一类函数极限. 所谓连续变量是指它从一个值变到另一个值时,将毫不遗漏地经过这个值中间的一切值. 比如温度、时间就都是连续变量. 像数列那样的自变量,当它从一个值变到另一个值时,显然是非连续的. 下面先考虑一个自变量为连续变量的函数极限的例子.

(一) 当 $x \to +\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

这就是当 x 无限增大时,函数 $f(x)$ 的值越来越接近于一个定数.

例 设上升的火箭与地心的距离为 r,则地球对火箭的引力可表示成

$$f(r)=k\frac{Mm}{r^2}$$

其中 M 及 m 分别是地球及火箭的质量,k 是常数. 如果考虑火箭脱离地球的运动,这时 r 不断增大,$f(r)$也无限变小而接近于零.

在这个例中,$f(r)$无限接近于零是由 r 的无限增大,而不是由 r 无限接近某一定数实现的. 从本质上看,这并没有包含比前面定义过的那类极限过程有更多更新的概念,但是叙述方式不得不有所改变了. 回忆一下数列极限的"ε-N"定义,如果将那里的自然数 n,改换成现在的连续变量 x,则随着 x 的无限增大,$f(x)$无限接近于 l 的确切定义,就可表述如下.

定义 1 设函数 $f(x)$对于无论怎样大的 x 值都有定义,且 l 是一定数,若对任意给定的正数 ε,总存在着一个正数 $M(\varepsilon)$,使得当 $x>M$ 时,就有 $|f(x)-l|<\varepsilon$ 成立,则 l 就称为函数 $f(x)$当 x 趋于正无穷时的极限. 记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=l \text{ 或 } f(x)\to l(x\to+\infty)$$

如果对于正数 ε,作直线 $y=l-\varepsilon$ 及 $y=l+\varepsilon$,则这类极限的几何意义就是无论给定的正数 ε 怎样小,总能找到一个正数 M,使得函数 $f(x)$在 $x>M$ 的图形都落在这两条直线组成的条形区域中(图 1.5).

同样可以定义 x 趋于负无穷时,函数 $f(x)$有极限 l,这时记为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=l$ 或 $f(x)\to l(x\to-\infty)$.

一般的可考虑变量 x 不管是沿正方向趋于无穷,还是沿负方向趋于无穷,只要它的绝对值趋向于无穷,函数 $f(x)$有

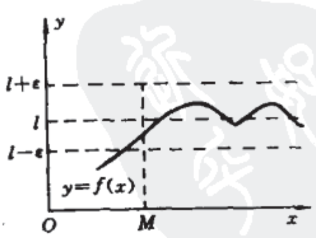


图 1.5

极限 l.

（二）当 $x\to-\infty$ 及 $|x|\to+\infty$ 时，函数极限

定义 2 设 α 是实数，函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\alpha)$ 内有定义，且 l 是一定数，若对任意给定的正数 ε，总存在正数 $M(\varepsilon)$，使得当 $x<-M$ 时，就有 $|f(x)-l|<\varepsilon$ 成立，则 l 称为函数 $f(x)$ 当 x 趋于负无穷大时的极限，记成

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=l \text{ 或 } f(x)\to l(x\to-\infty)$$

定义 3 设函数 $f(x)$ 对于绝对值无论怎样大的 x 都有定义，且 l 是一定数，若对任意给定的正数 ε，总存在正数 $M(\varepsilon)$，使得当 $|x|>M$ 时，就有 $|f(x)-l|<\varepsilon$ 成立，则 l 称为函数 $f(x)$ 当 x 趋于无穷大时的极限，记成

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=l \text{ 或 } f(x)\to l(x\to\infty)$$

极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$ 也有明显的几何意义：

由于已知不等式 $|f(x)-l|<\varepsilon$ 等价于 $l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon$，因此可将定义 3 中的四小段话换成几何语言：对任给的以二直线 $y=l-\varepsilon$ 与 $y=l+\varepsilon$ 为边界线的带形区域；在 x 轴上总存在两点 $-M$ 与 M；当点 x 位于点 $-M$ 的左边或点 M 的右边时；对应的函数 $f(x)$ 的图形总位于这个带形区域之内(图 1.6).

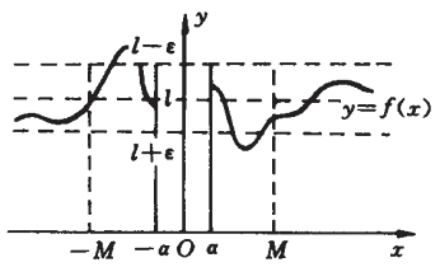


图 1.6

例 1 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0$，其中 $0<a<1$.

证 任给正数 ε，不妨设 $\varepsilon<1$，要使 $|a^x-0|=a^x<\varepsilon$，只须 $x\ln a<\ln\varepsilon$，由于 $\ln a<0$，故得 $x>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln a}$. 取 $M=\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln a}$，则当 $x>M$ 时

有$|a^x-0|<\varepsilon$. 这就证明了 $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0(0<a<1)$.

例 2 证明 $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arc\,tg}x=-\dfrac{\pi}{2}$.

证 任给正数 ε,要使 $-\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon<\operatorname{arc\,tg}x<-\dfrac{\pi}{2}+\varepsilon$, 只须 $x<\operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{2}+\varepsilon\right)$, 取 $M=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$, 则当 $x<-M$ 时,就有 $\left|\operatorname{arctg}x+\dfrac{\pi}{2}\right|<\varepsilon$. 从而 $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x=-\dfrac{\pi}{2}$.

例 3 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=0$.

证 对任给的正数 ε,要使

$$|\sqrt{x+1}-\sqrt{x}-0|=|\sqrt{x+1}-\sqrt{x}|<\varepsilon$$

这时无法直接解不等式求出正数 $M(\varepsilon)$. 但是有

$$|\sqrt{x+1}-\sqrt{x}|=\left|\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{x}}$$

为了使

$$|\sqrt{x+1}-\sqrt{x}|<\varepsilon$$

只要

$$\frac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$$

即

$$x>\frac{1}{\varepsilon^2}$$

故只要取 $M(\varepsilon)=\dfrac{1}{\varepsilon^2}>0$, 则当 $x>M$ 时,就有 $|\sqrt{x+1}-\sqrt{x}|<\varepsilon$, 从而得 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=0$.

例 4 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-2}{x^2-1}=3$.

证 因为

$$\left|\frac{3x^2+2x-2}{x^2-1}-3\right| = \left|\frac{2x+1}{x^2-1}\right| \leqslant \frac{2\,|\,x\,|+1}{|\,x\,|^2-1} < \frac{2\,|\,x\,|+2}{|\,x\,|^2-1}$$

$$= \frac{2}{|\,x\,|-1} < \varepsilon$$

为了使 $\left|\frac{3x^2+2x-2}{x^2-1}-3\right| < \varepsilon$，只要 $\frac{2}{|\,x\,|-1} < \varepsilon$.

即 $|\,x\,| > 1+\frac{2}{\varepsilon}$，取 $M(\varepsilon) = 1+\frac{2}{\varepsilon}$，则当 $|x| > M$，就有

$$\left|\frac{3x^2+2x-2}{x^2-1}-3\right| < \varepsilon,$$

从而

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-1}{x^2-1} = 3.$$

1.2.2 函数在一点的极限

在 1.2.1 中讨论了 $x\to\infty$ 时的函数极限. 今来介绍自变量 x 是在实数集 R 上千变万化的连续变量的一类函数极限. 我们仍然先考虑一个自变量为连续变量的函数极限的实例.

例 一质点沿直线运动. 设质点所走过的路程 s 与经历的时间 t 的函数关系为 $s=s(t)$，它称为质点的运动规律. 我们来研究质点运动的快慢问题. 质点在时刻 t_0 到时刻 t 这段时间间隔内走过的路程为 $s(t)-s(t_0)$，而比值 $\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ 就表示质点在时间间隔 $[t_0,t]$ 内平均快慢的程度. 称为质点在这段时间间隔的平均速度，记成 $\bar{v}(t)$. 由于质点的运动一般是非均匀的，即相同的时间间隔内质点走过的路程并不相同，因此平均速度 $\bar{v}(t)$ 并不能精确地描述质点在 $[t_0,t]$ 内运动快慢的情况，但是如果把时间间隔 $[t_0,t]$ 缩小，那么在很短的时间内质点的运动来不及有很大的变化，这时的平均速度就可以较好地表示质点运动的快慢. 显然，当时间间

隔越短，这种表示就越准确. 为了精确地研究质点运动快慢的程度，就必须把时间间隔$[t_0,t]$无限缩短，即让 t 无限接近于 t_0，观察平均速度 $\bar{v}(t)$变化的趋势. 如果它无限接近某一定数 $v(t_0)$，那么 $v(t_0)$就表达了质点在时刻 t_0 那一瞬间的真正快慢程度，称为质点在时刻 t_0 的瞬时速度，若知道了质点在各个时刻的瞬时速度，质点整个运动的快慢情况就完全精确地刻划出来了.

这个例子说明有必要深入研究一个自变量连续变化的函数 $f(x)$的这样一种变化状态："随着 x 无限接近于 x_0，$f(x)$无限接近于定数 l."

如果自变量 x 在变化的过程中越来越接近于 x_0 时，函数 $f(x)$的值就越来越接近于一个定数 l，就说定数 l 是函数 $f(x)$在点 x_0 处的极限.

定义 设函数 $f(x)$定义在点 x_0 的某一去心邻域内，如果有一个定数 l，使对于任意给定的正数 ε，总存在着一个正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)-l|<\varepsilon$，则 l 就称为当 x 趋向于 x_0 时函数 $f(x)$的极限，记成

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \text{ 或 } f(x)\to l(x\to x_0)$$

这种定义也称为函数极限的"ε-δ"定义.

依照这一定义，上面例中所述的质点在时刻 t_0 的瞬时速度就是平均速度

$$\bar{v}(t) = \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$$

当 t 趋于 t_0 时的极限，即

$$\lim_{t\to t_0}\bar{v}(t) = \lim_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0} = v(t_0)$$

注意在定义中，不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 指的是开区间$(x_0-\delta, x_0+\delta)$内除掉 x_0 以外的一切点，即是在 x_0 左边和右边的两个小区间$(x_0-\delta,x_0)$，$(x_0,x_0+\delta)$. 这表示论及函数当自变量趋于某一点的极限时，函数在该点可以没有定义. 如在所考察的例中，我们

当然不能要求 $\bar{v}(t_0)$有什么意义. 因为对于长度为零的时间间隔，平均速度就毫无意义.

此外,这个定义所表示的 x 无限接近 x_0 可以采取任何方式. 也就是说,无论 x 是从 x_0 的左边或右边,或时左时右地接近 x_0，只要 x 与 x_0 充分靠近,即$|x-x_0|$充分地小,就使得 $f(x)$与 l 能任意接近,即$|f(x)-l|$任意地小. 同样,这里对 $f(x)$与 l 无限接近的方式也是不加限制的.

例 1 证明$\lim\limits_{x\to 2}(2x+2)=6$.

证 任给正数 ε,要使

$$|(2x+2)-6|=|2(x-2)|<\varepsilon$$

只须取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$, 则当 $0<|x-2|<\delta$ 时有

$$|(2x+2)-6|<\varepsilon$$

所以$\lim\limits_{x\to 2}(2x+2)=6$.

例 2 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-x}$.

解 因为当 $x\neq 1$ 时

$$\frac{x^2-1}{x^2-x}=1+\frac{1}{x}$$

当 $x\to 1$ 时,函数 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ 的值应该接近于 2,对吗? 今用“ε-δ”定义验证.

对任意给定的正数 ε,要使

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2-x}-2\right|=\left|\frac{1-x}{x}\right|<\varepsilon$$

先要限定 x 的变化范围. 由于极限仅与 1 附近的 x 有关,因此不妨假设 $|x-1|<\dfrac{1}{2}$,$\left(\text{即先取一个正数 } \delta_1=\dfrac{1}{2}\right)$. 这个不等式等价于 $\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}$, 故有 $\dfrac{1}{x}<2$. 因为

$$\left|\frac{1-x}{x}\right|=\frac{|x-1|}{x}<2|x-1|$$

为使 $2|x-1|<\varepsilon$,只要 $|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$,故取 $\delta=\min\left(\frac{\varepsilon}{2},\frac{1}{2}\right)$,则当 $0<|x-1|<\delta$ 时有

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2-x}-2\right|<2|1-x|<\varepsilon$$

从而

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2-x}=2$$

例 3 证明 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{m}}=1$,其中 m 为自然数.

证 因为要证明当 $x\to0$ 时存在极限,所以这个极限仅与 0 附近的 x 有关. 故先限定 $|x|<1$(即先取正数 $\delta_1=1$),等价于 $-1<x<1$,或 $1+x>0$,且 m 为自然数. 由于当 $1+x>0$ 时,有

$$\begin{aligned}|(1+x)^{\frac{1}{m}}-1|&\leqslant|(1+x)^{\frac{1}{m}}-1|\\&\quad|1+(1+x)^{\frac{1}{m}}+\cdots+(1+x)^{\frac{m-1}{m}}|\\&=|x|\end{aligned}$$

对任给的正数 ε,为使 $|(1+x)^{\frac{1}{m}}-1|<\varepsilon$,只要取 $\delta=\min(\varepsilon,1)$. 则当 $0<|x|<\delta$ 时必有

$$|(1+x)^{\frac{1}{m}}-1|<\varepsilon$$

这就证明了

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{m}}=1$$

1.2.3 函数在一点的单侧极限

在 1.2.2 中已指出,极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$ 表示无论 x 以什么方式去接近 x_0,都应使得 $f(x)$ 与 l 无限地接近. 然而在实际问题中也存在着这样的极限问题,它只要求考虑自变量从一侧去接近 x_0 时的极限. 例如某物理量依赖于绝对温度,要研究在绝对零度附近这

个量的变化情况时，显然只能考虑绝对温度在大于零的一方去接近于零；又因为任何物体的速度都不能超过光速，假如要研究物体速度无限接近于光速时情况，也就只能从小于光速的一方去接近. 设 $f(x)$是分段函数，当 x 同时从分段点 x_0 的左右两侧趋向于 x_0 时，分段函数在分段点 x_0 处未必有极限. 如果函数 $f(x)$的定义域是开区间(a,b)，那么考虑 x 接近 a 或 b 时，只能认为是从 a 的右侧去接近 a，从 b 的左侧去接近 b. 总之，这时函数 $f(x)$在 x_0 处的"双侧"极限无意义或不存在，自然应该来考虑自变量 x 限制在 x_0 的一侧无限接近 x_0 时，函数 $f(x)$的变化状态.

定义 设函数 $f(x)$定义在点 x_0 的右近旁，但在点 x_0 可以没有定义. 如果有一个定数 l，使对任意给定的正数 ε，总存在着一个正数 $\delta(\varepsilon)$，只要 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，就有 $|f(x)-l|<\varepsilon$ 成立，则称 l 为当 x 从右侧趋于 x_0 时函数 $f(x)$的极限，或简称函数在点 x_0 的右极限，记为

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=l \text{ 或 } f(x_0+0)=f(x_0{}^+)=l$$

同样可以定义函数的左极限.

定义 设函数 $f(x)$定义在点 x_0 的左近旁，但在点 x_0 可以没有定义，如果有一个定数 l，使对任意给定正数 ε，总存在着一个正数 δ，只要 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，就有 $|f(x)-l|<\varepsilon$ 成立，则 l 就称为函数 $f(x)$在点 x_0 的左极限，记为

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=l \text{ 或 } f(x_0-0)=f(x_0{}^-)=l$$

函数的左极限与右极限统称为**单侧极限**.

根据上述定义，不难给出单侧极限的几何意义. 下面给出单侧极限与双侧极限的关系.

定理 函数 $f(x)$在点 x_0 存在极限的充分必要条件是：$f(x)$在点 x 的左、右极限存在且都等于定数 l，即

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=l$$

证 由于不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 相当于两个不等式

$$x_0-\delta<x<x_0,\ x_0<x<x_0+\delta$$

故$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$的充分必要条件是:$f(x_0-0)=f(x_0+0)=l$.

这条定理十分有用,今后经常这样来使用它:若$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$,则极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在.

显然$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在的充分必要条件是两个单侧极限$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$与$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$存在并且相等.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x).$$

例 设有函数

$$f(x)=\begin{cases}0.5x+5, & -10\leqslant x<0\\ x+85, & 0\leqslant x\leqslant 10\end{cases}$$

证明$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在.

证 (1)先证$f(0+0)=85$.

由于$x>0$,故有$f(x)=x+85$,$0\leqslant x\leqslant 10$,对任给的正数ε,总存在正数$\delta=\varepsilon$,当$0<x<\delta$时有

$$|x+85-85|=|x|=x<\varepsilon$$

即有 $f(0+0)=85$;

(2)其次证明$f(0-0)=5$.

由于$x<0$,故有$f(x)=0.5x+5$,$-10\leqslant x<0$,对任给的正数ε,总存在正数$\delta=2\varepsilon$,当$-\delta<x<0$时有

$$|0.5x+5-5|=|0.5x|=\frac{1}{2}|x|<\frac{1}{2}\delta=\varepsilon$$

即有$f(0-0)=5$.但是$f(0+0)\neq f(0-0)$.故$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在.

到此为止,我们总共介绍了如下七种极限过程:

$n\to+\infty$,$x\to+\infty$,$x\to-\infty$,$x\to\infty$,$x\to x_0$,$x\to x_0+0$,$x\to x_0-0$

今后遇到极限问题时,一定要分清楚是这七种中的哪一种极限过程,千万不要弄错了.

1.2.4 函数极限与数列极限的关系

大家知道,数列极限是函数极限的一种特殊情形.反之,函数极限在一定意义下可归结为数列极限.它们之间如此密切的关系很好地表现成如下的定理.

定理 设函数 $f(x)$定义在点 a 的某一去心邻域内,则 $f(x)$在点 a 的极限存在的充分必要条件是对于在这个邻域中任取的异于 a 且以 a 为极限的数列$\{x_n\}$,数列$\{f(x_n)\}$的极限都存在并且相等.

证 先证必要性.设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$,故对任给的正数 ε,总存在着正数 δ,使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时,就有

$$|f(x)-l|<\varepsilon$$

因为$\{x_n\}$是异于 a 且以 a 为极限的数列,所以对上述的正数 δ,又存在自然数 N,使得当 $n>N$ 时,就有

$$0<|x_n-a|<\delta$$

于是当 $n>N$ 时

$$|f(x_n)-l|<\varepsilon$$

此即为

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=l$$

再证充分性:采用反证法,假定$\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq l$.由极限不是 l 的精确叙述.存在某个正数 ε_0,对任意的正数 δ,总存在某个 x',当 $0<|x'-a|<\delta$ 时有$|f(x')-l|\geqslant\varepsilon_0$.

取 $\delta_1=1$,总存在某个 x_1',当 $0<|x'_1-a|<1$ 时有$|f(x_1')-l|\geqslant\varepsilon_0$

取 $\delta_2=\dfrac{1}{2}$,总存在某个 x_2',当 $0<|x_2'-a|<\dfrac{1}{2}$ 时有$|f(x_2')-l|\geqslant\varepsilon_0$

……

取 $\delta_n=\dfrac{1}{n}$，总存在某个 x_n'，当 $0<|x_n'-a|<\dfrac{1}{n}$ 时有 $|f(x_n')-l|\geqslant\varepsilon_0$

……

于是，构造出一个数列$\{x_n'\}$，且 $x_n'\neq a$，由于 $\delta_n=\dfrac{1}{n}$，因此随着 n 的任意增大，δ_n 可以任意小，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n'=a$. 但是$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n')\neq l$. 这与假设矛盾. 从而证明了所要的结论.

这个定理对于 x 趋向无穷的极限过程也是正确的，证明方法也与上面类似. 它是沟通函数极限与数列极限之间的"桥梁". 应用它来证明某些函数不存在极限比较方便. 由它立即可得如下两个推论.

推论 1 若存在某个数列$\{x_n\}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，而 $x_n\neq a$，数列$\{f(x_n)\}$不存在极限，则函数 $f(x)$在点 a 也不存在极限.

推论 2 若存在某两个数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$x_n\neq a$ 与$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，$y_n\neq a$，但是$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)$，则函数 $f(x)$在点 a 不存在极限.

例 证明函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 当 x 趋于零时极限不存在.

证 取数列 $\left\{x_n=\dfrac{1}{2n\pi}\right\}$，$n=1,2,\cdots$，显然有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，$x_n\neq 0$，且有

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sin 2n\pi=0$$

再取数列$\left\{y_n=\dfrac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right\}$，$n=1,2\cdots$，有$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，而 $y_n\neq 0$，同时有

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}\neq\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{y_n}.$$

由推论 2 知，函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$，当 x 趋于零时极限不存在. 图 1.7 即是它的图形. 在原点附近由于这个函数总是在 -1 与 1 之间来回振动，所以不可能有确定的极限.

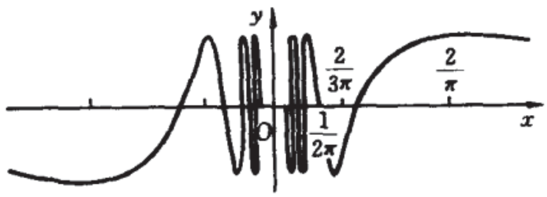


图 1.7

1.2.5 函数极限的性质及四则运算

在引入了函数极限的概念并给出了严格定义之后，如同数列极限一样，必须着手来建立函数极限的一些性质，及四则运算等法则. 它们对于各种极限过程中的函数极限都是成立的. 为了叙述方便，这里只讲 $x\to x_0$（x_0 为某个有限数）的情形，其它五种情形都可以类似地证明，而且它们可由数列极限的对应性质，并通过数列极限与函数极限的关系相应地建立起来，亦可与数列极限的情况完全相仿地直接导出. 因此，这里只是罗列出来，把它们的证明留给读者.

（一）函数极限的性质

1° 设当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 有极限，则 $f(x)$ 的极限是唯一的.

2° 设当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 有极限，则对于充分接近 x_0 的点 x，函数 $f(x)$ 是有界的，即存在正数 δ 和 M，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)|<M$.

但是要注意性质 2° 的逆命题不成立，即在点 x_0 附近的有界函

数，未必在点 x_0 处存在极限. 例如，$f(x)=\sin\frac{1}{x}$，当 $x\neq 0$ 时，$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1<\frac{3}{2}$，而极限 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在(参看 1.2.4 中的例).

3° 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$，则对于充分接近 x_0 的点 x，亦有 $f(x)>g(x)$.

特别，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>0$，则在点 x_0 附近的 x 处，有 $f(x)>0$.

4° 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l_1$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=l_2$. 若存在正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)\geqslant g(x)$，则有 $l_1\geqslant l_2$，即有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\geqslant\lim_{x\to x_0}g(x)$$

注意：若 $f(x)>g(x)$，当 $x\neq x_0$ 时，只能得到 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\geqslant\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$，而一般不能推出 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

(二) 函数极限的四则运算法则

定理 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在，则

(1)函数 $f(x)\pm g(x)$ 的极限也存在，且

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}g(x)$$

就是两个函数和与差的极限等于各函数极限的和与差.

(2)函数 $f(x)\cdot g(x)$ 的极限也存在，且

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)$$

就是两个函数乘积的极限等于各函数极限的乘积.

特别，$\lim\limits_{x\to x_0}cf(x)=c\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，其中 c 为常数.

(3)当 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$ 时，函数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的极限也存在，且

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$$

就是两个函数商的极限等于各函数极限的商.

注意：函数极限的加、减及乘法计算，不仅对两个函数的情形成立，也对任意的有限个函数的情形成立.

（三）复合函数的极限

定理 （1）设 $x=\varphi(t)$，$\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)=x_0$，且存在 $\delta>0$，当 $t\in t_0$ 的去心 δ 邻域时，$\varphi(t)\neq x_0$. 又设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$，则有

$$\lim_{t\to t_0}f(\varphi(t))=l=\lim_{x\to x_0}f(x)$$

（2）设 $\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)=x_0$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则有

$$\lim_{t\to t_0}f(\varphi(t))=f(x_0)=f(\lim_{t\to t_0}(\varphi(t))$$

证 （1）因 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$，故对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\eta>0$，使当 $x\in x_0$ 的去心 η 邻域时，有 $|f(x)-l|<\varepsilon$.

又因 $\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)=x_0$，故对上述 $\eta>0$，$\exists\delta>0$，使当 $t\in t_0$ 的去心 δ 邻域时，有 $|\varphi(t)-x_0|<\eta$. 已知，当 $t\neq t_0$ 时 $\varphi(t)\neq x_0$. 故当 $t\in t_0$ 的去心 δ 邻域时，就有 $x\in x_0$ 的去心 η 邻域. 于是，由前述可知，当 $t\in t_0$ 的去心 δ 邻域时，有

$$|f(\varphi(t))-l|<\varepsilon$$

故得

$$\lim_{t\to t_0}f(\varphi(t))=l=\lim_{x\to x_0}f(x)$$

对于(2)，只要在(1)中让 $l=f(x_0)$，及将 x_0 的去心 η 邻域换成 x_0 的 η 邻域即可.

这个定理都是按点 t_0 的极限给出的，对其他类型的极限，相应的结论也都成立. 在需要时读者可加以运用.

前面虽然列举了许多求函数极限的例子，但都是根据定义去进行验证. 今使用四则运算和复合函数求极限的法则，可以较方便地求出更多的极限. 不过一定注意这些法则应满足的条件.

例 1 求极限 $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)$.

解 当 x 趋于 -1 时，原式括号中的每一项都没有极限，故不

能直接利用性质计算. 但当 $x\neq -1$ 时,可将其分式通分后化简,然后再取极限,于是得

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)=\lim_{x\to -1}\frac{x-2}{x^2-x+1}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to -1}(x-2)}{\lim\limits_{x\to -1}(x^2-x+1)}=-1$$

例 2 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{3x^3-x^2+9}$.

解 分式的分子分母同除以 x^3 后,再利用极限的运算性质算得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{3x^3-x^2+9}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{9}{x^3}\right)}=\frac{1}{3}$$

例 3 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$.

解 将根式改写为

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$$

例 4 求证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{m}}-1}{x}=\dfrac{1}{m}$, 其中 m 为自然数.

证 设 $(1+x)^{\frac{1}{m}}-1=y$, 得 $x=(1+y)^m-1$. 由 1.2.2 的例 3 知当 $x\to 0$ 时亦有 $y\to 0$, 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{m}}-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{(1+y)^m-1}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{my+\dfrac{m(m-1)}{2}y^2+\cdots+y^m}$$

$$= \frac{1}{m}$$

例 5 证明$\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1 (a>0)$.

证 先证 $\lim\limits_{x\to 0^+} a^x = 1$.

若 $a=1$,结论是显然的.

若 $a>1$,对于任给的正数 ε,要使 $0<a^x-1<\varepsilon$,或 $1<a^x<1+\varepsilon$,只须

$$0 < x < \frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln a}$$

因此若取 $\delta = \frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln a}$,则当 $0<x<\delta$ 时,就有 $|a^x-1|<\varepsilon$. 从而得到

$$\lim_{x\to 0^+} a^x = 1$$

若 $0<a<1$,则 $\frac{1}{a} > 1$. 这时亦有

$$\lim_{x\to 0^+} a^x = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} = 1$$

再证 $\lim\limits_{x\to 0^-} a^x = 1$. 事实上令 $x=-t$ 即得

$$\lim_{x\to 0^-} a^x = \lim_{t\to 0^+} a^{-t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{a^t} = 1$$

由于 a^x 在点 0 的左极限,右极限都为 1,所以

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1 (a > 0)$$

1.2.6 函数极限存在的判别法

函数极限的性质与四则运算法则等,都是在函数极限存在的前提下给出的. 但是有时遇到的函数往往事先并不知道是否在点 x_0 存在极限. 因此有必要讨论函数极限存在的判别法.

判别法 1(两边夹判别法) 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 的极

限存在且都等于 l,即$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$. 若在点 x_0 的附近成立不等式

$$f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x).$$

则函数 $h(x)$在点 x_0 的极限也存在且等于 l,即

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = l.$$

证 已知$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$. 根据 1.2.4 中定理的必要性,在点 x_0 的去心邻域内的任意数列$\{x_n\}$,有$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$,且 $x_n \neq x_0$,故得

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} g(x_n) = l$$

由假设条件,这时有

$$f(x_n) \leqslant h(x_n) \leqslant g(x_n)$$

应用数列情形的两边夹判别法得到,对任意的数列$\{x_n\}$,且$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$,$x_n \neq x_0$,有$\lim\limits_{n \to \infty} h(x_n) = l$. 最后根据 1.2.4 中定理的充分性,则有

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = l$$

我们知道,若函数 $f(x)$在点 x_0 的极限存在,则在点 x_0 的附近这函数必有界;反之,在点 x_0 附近有界的函数,就未必在点 x_0 有极限. 如同数列的情形一样,当添加单调的条件时,有界的函数的极限就存在了. 为此引进函数的单调增减性这一概念.

定义 设函数 $f(x)$定义在区间$[a,b]$上,若对$[a,b]$内任意两点 $x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$,就说函数 $f(x)$在$[a,b]$上是单调不减;若对$[a,b]$内任意两点 $x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$,就说函数 $f(x)$是单调不增. 若上述不等式的等号恒不成立,就说函数是严格增或严格减的.

把单调不减、单调不增、严格增与严格减的函数统称为**单调函数**. 对于这类函数有

判别法 2(单调有界函数极限存在的判别法) 单调有界函数

在其单调区间内的每一点都必有左极限和右极限，即若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调不减，则对任意的 $x_0\in(a,b)$，$f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 都存在，且

$$f(x_0-0)\leqslant f(x_0)\leqslant f(x_0+0)$$

若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调不增，则对任意的 $x_0\in(a,b)$，$f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 都存在，且

$$f(x_0-0)\geqslant f(x_0)\geqslant f(x_0+0)$$

证 仅对单调不减情形给予证明. 对单调不增的情形，只要讨论 $-f(x)$ 就变成单调不减的情形了.

先证明 $f(x_0-0)$ 存在，且 $f(x_0-0)\leqslant f(x_0)$.

考虑数集 $E=\{y\mid y=f(x),x<x_0\}$，显然 $E\neq\varnothing$. 因为 $f(x)$ 是单调不减的，所以 $f(x)\leqslant f(x_0)$. 故 $f(x_0)$ 就是集合 E 的上界. 由确界定理，E 有上确界 β. 下面证明 $\beta=f(x_0-0)$.

因 β 是 E 的上确界，故 β 是 E 的上界，即对任意的 $y\in E$，有 $y\leqslant\beta$. 这就是说对任意的 $x<x_0$，有 $f(x)\leqslant\beta$.

另一方面，由上确界的定义，对任给的正数 ε，总存在 $x_1<x_0$，使 $f(x_1)>\beta-\varepsilon$. 又因函数 $f(x)$ 是单调不减的，所以当 $x_1<x<x_0$ 时，有 $f(x_1)\leqslant f(x)$，从而得到 $\beta-\varepsilon<f(x)$. 根据前面已得到的结果，故有

$$\beta-\varepsilon<f(x)\leqslant\beta<\beta+\varepsilon$$

或

$$|f(x)-\beta|<\varepsilon$$

当 $x_1<x<x_0$ 时，令 $|x_1-x_0|=\delta$，则当 $0>x-x_0>-\delta$ 时，有 $|f(x)-\beta|<\varepsilon$. 故 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\beta$，即 $\beta=f(x_0-0)$. 由于 $f(x_0)$ 是 E 的上界，而 β 是 E 的上确界，因此 $\beta\leqslant f(x_0)$，即有 $f(x_0-0)\leqslant f(x_0)$.

同理可证：$f(x_0)\leqslant f(x_0+0)$.

对于非单调函数的一般情形，也存在着判别函数极限存在的

柯西准则.

判别法 3(柯西准则)　设函数 $f(x)$定义在点 x_0 的某一去心邻域内,则 $f(x)$在点 x_0 的极限存在的充分必要条件是:对于任意给定的正数 ε,总存在着这样的正数 δ,使得当 $0<|x'-x_0|<\delta$, $0<|x''-x_0|<\delta$ 时,就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

证　条件的必要性容易证明. 设 $f(x)$在 $x\to x_0$ 时的极限为 l,于是对任意给定的正数 ε,总存在正数 $\delta(\varepsilon)$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有

$$|f(x)-l|<\varepsilon$$

这时,如果 x_0 近旁的点 x'和 x''满足

$$0<|x'-x_0|<\delta, 0<|x''-x_0|<\delta$$

则也应有

$$|f(x')-l|<\varepsilon, |f(x'')-l|<\varepsilon$$

所以得到

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-l|+|f(x'')-l|<2\varepsilon$$

再证条件的充分性. 即假设对任意给定的正数 ε,总存在正数 δ,使得当 $0<|x'-x_0|<\delta$, $0<|x''-x_0|<\delta$ 时,就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

要来证明函数 $f(x)$在 $x\to x_0$ 时的极限存在. 事实上,任取异于 x_0 且收敛于 x_0 的数列$\{x'_n\}$,由数列极限的定义,必能求出自然数 N,只要当 $n,m>N$ 时成立

$$0<|x_n'-x_0|<\delta,\ 0<|x_m'-x_0|<\delta$$

从而得到

$$|f(x_n')-f(x_m')|<\varepsilon$$

就是数列$\{f(x_n')\}$满足 1.1.3 中准则的条件,因此它是收敛的.

现在设$\{x_n''\}$是异于 x_0 且收敛于 x_0 的另一数列,而数列

$$\{f(x_n')\}与\{f(x_n'')\}$$

不收敛于同一极限,即$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n')=l'$与$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n'')=l''$且 $l'\neq''$. 这

时可将两个数列$\{x_n'\}$与$\{x_n''\}$各项顺次相间以组成新数列

$$x_1', x_1'', x_2', x_2'', \cdots, x_n', x_n'', \cdots$$

它显然是收敛于 x_0 的,但数列

$$f(x_1'), f(x_1''), f(x_2'), f(x_2''), \cdots, f(x_n'), f(x_n''), \cdots$$

却不收敛. 因为它的奇数项与偶数项各自组成的子列趋于不同的极限. 这与上面所得的结果矛盾. 于是就证明了对任意异于 x_0 且收敛于 x_0 的数列$\{x_n\}$,对应的函数值数列$\{f(x_n)\}$都收敛于同一极限,因此函数 $f(x)$在点 x_0 的极限是存在的.

柯西准则说明,函数 $f(x)$在 $x \to x_0$ 时有极限,必须而且只须对任意与点 x_0 充分接近的点 x'与 x'',函数 $f(x)$在这两点的值彼此相差任意小.

前面介绍的三个判别法都可以类推到 x_0 是无限大的情形. 例如对柯西收敛准则,即判别法 3 可得到当$|x|$无限增大时,函数 $f(x)$极限存在的充分必要条件是:对任给定的正数 ε,总存在正数 M,使得当$|x'|,|x''|>M$时,有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

1.2.7 两个重要的函数极限

现在我们应用函数极限的两边夹判别法,证明两个十分重要的函数极限. 这两个函数极限在计算其它函数极限时是非常有用的.

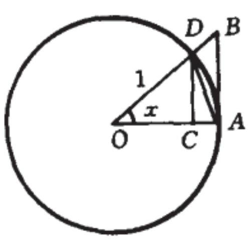


图 1.8

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

先证明 $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

如图 1.8,$\overset{\frown}{AD}$是以点 O 为圆心半径为 1 的圆弧,过 A 作圆弧$\overset{\frown}{AD}$的切线与 OD 的延长线相交于点 B. 设$\angle AOD = x$(按弧度计

算)，且设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$. 显然有

$\triangle AOD$ 的面积 < 扇形 AOD 的面积 < $\triangle AOB$ 的面积或可写成

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\mathrm{tg}x$$

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x > 0$，故可用 $\sin x$ 去除这个不等式，则有

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

或

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

于是得到

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x$$

但是

$$1 - \cos x = 2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2 < 2\sin\frac{x}{2} < x$$

故对任给的正数 ε，取 $\delta = \min\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right)$，当 $0 < x < \delta$ 时有 $0 < 1 - \cos x < \varepsilon$，从而有

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \varepsilon$$

这就证明了

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1,$$

其次，设 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$，令 $x = -y$. 有 $0 < y < \frac{\pi}{2}$，当 $x \to 0^-$ 时，$y \to 0^+$，故有

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x} = \lim_{y\to 0^+}\frac{\sin(-y)}{-y} = \lim_{y\to 0^+}\frac{\sin y}{y} = 1$$

最后，由于函数 $\frac{\sin x}{x}$ 在点 0 的左、右极限都为 1，则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

从几何上来看，这个极限表明圆周上弦与弧之比，当弧长趋于零时其极限为 1.

例 1 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1$.

解 因为当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，已得到

$$0<1-\cos x<x$$

利用函数极限的两边夹判别法不难得出

$$\lim_{x\to 0^+}\cos x=1$$

但 $\cos x$ 是偶函数，又有 $\lim\limits_{x\to 0^-}\cos x=1$. 故有

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1$$

于是就有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$$

例 2 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x}$，$(\alpha\neq 0)$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\sin\alpha x}{\alpha x}=\alpha\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\right)=\alpha$$

例 3 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

解 因为

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

但

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$$

例 4 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$.

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x\cos x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

先考虑 $x\to+\infty$ 的情形. 我们已知道数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 的极限存在且等于 e,现在证明当 $x\to+\infty$ 时,函数 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 也趋向于这个极限.

由 1.1.1 中的定理 2 知,对任何大于 1 的数 x,总存在两个相邻的自然数 n 和 $n+1$,使得 $n\leqslant x<n+1$,故有

$$1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\leqslant 1+\frac{1}{n}$$

从而有

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

由于当 $x\to+\infty$时，必有 $n\to\infty$. 但是

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{\mathrm{e}}{1}=\mathrm{e}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}$$

如此，上述不等式两端的项趋向于极限 e. 由两边夹判别法知，夹在中间的函数 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 也趋向于极限 e，即有

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

再考虑 x 趋向于$-\infty$的情形. 令 $x=-(y+1)$，当 $x\to-\infty$时，$y\to+\infty$，故有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x&=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{1+y}\right)^{-(y+1)}\\&=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{1+y}\right)^{-(y+1)}\\&=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1+y}{y}\right)^{y+1}\\&=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right)\\&=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}\end{aligned}$$

综上所述我们得到，无论 x 以怎样的方式趋于∞，函数 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 都以数 e 为极限，即

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

若令 $\alpha=\frac{1}{x}$，则当 x 趋向∞时，α 趋向于零，因此这个极限又

可写成

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\mathrm{e}$$

例 5 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{m}{x}\right)^{x}$，其中 $m\neq 0$.

解 由于

$$\left(1+\frac{m}{x}\right)^{x}=\left(1+\frac{1}{\frac{x}{m}}\right)^{\frac{x}{n}\cdot m}$$

令 $\dfrac{x}{m}=t$，显然当 x 趋于无穷大时，t 亦趋于无穷大，由复合函数极限运算法则可得

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^{x}=\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{m}=\mathrm{e}^{m}$$

若令 $\alpha=\dfrac{m}{x}$，显然当 x 趋于无穷大时，α 趋于零，所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^{x}=\left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{m}=\mathrm{e}^{m}$$

例 6 计算极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^{2}+1}{x^{2}-1}\right)^{x^{2}}$.

解 因为 $x\neq 0$，所以

$$\frac{x^{2}+1}{x^{2}-1}=\frac{1+\frac{1}{x^{2}}}{1-\frac{1}{x^{2}}}$$

因此

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^{2}+1}{x^{2}-1}\right)^{x^{2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x^{2}}\right)^{x^{2}}}{\left(1-\frac{1}{x^{2}}\right)^{x^{2}}}=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^{-1}}=\mathrm{e}^{2}$$

其中应用例 5 当 $m=-1$ 的情形.

例 7 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\csc x}$.

解 当 $x\to0$ 时,有 $\sin x\to0$,所以

$$\lim_{x\to0}(1+\sin x)^{\csc x}=\lim_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}=\mathrm{e}$$

1.2.8 无穷小量及其比较

(一) 无穷小量

作为函数极限的特殊情形,今再来考虑一类最简单但又特别重要的变量,即无穷小量.

定义 1 如果一个变量在变化的过程中极限为零就称它为无穷小量.

若变量是数列 $\{a_n\}$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,则数列 $\{a_n\}$ 就是 n 趋向无穷时的无穷小量;若变量是函数 $\alpha(x)$,且 $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$,则 $\alpha(x)$ 就是 x 趋向于 a 时的无穷小量,这里 a 可以为有限数或"∞". 例如两质点的引力 $F=k\dfrac{mM}{r^2}$ 是 r 趋于无穷大的无穷小量;$\sin x$ 是 x 趋向于零的无穷小量,而数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$, $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right\}$ 都是 n 趋于 ∞ 的无穷小量.

必须注意,无穷小量是收敛于零的变量,亦即按绝对值无限变小的变量. 因此它既不是很小的正数,也不是比任何正数都小的数. 但是零是无穷小量. 因为它在变化的过程中极限始终为零.

为什么要来研究无穷小量呢? 大家知道,在高等数学中极限处于十分重要的地位. 然而,任何类型的函数极限最后都可归结为无穷小量. 例如,若函数 $f(x)$ 在 $x\to a$ 时的极限为 l,则差 $f(x)-l$ 就是 x 趋于 a 时的无穷小量. 记 $f(x)-l=\alpha(x)$,从而 $f(x)=l+\alpha(x)$,其中 $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$. 就是一个收敛的变量可以表示成这个变量的极限与一个无穷小量的和,从而说明极限方法的本质是无穷小量的方法. 将来还会看到它本身也非常有用. 如第二章的微商是两个无穷小量之比的极限;第三章的定积分是无限多个无穷小量之

和等等.

显然,有关函数极限的一般性质对于无穷小量同样成立.从而推得

1. 有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量.

但因无穷小量是一类特殊的收敛变量,故也具有不同的性质.例如:

2. 有界变量与无穷小量的乘积也是无穷小量.

证 若 $f(x)$ 是有界变量,由函数的有界性知,在 a 的去心邻域(或 x 的 ∞ 邻域)内,$\exists M>0$,有 $|f(x)|\leqslant M$. 另外,因 $\alpha(x)$ 是当 $x\to a$(或 $x\to\infty$)时的无穷小量,即对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $x\in a$ 的去心 δ 邻域(或 x 的 ∞ 邻域)时,可使 $|\alpha(x)|<\varepsilon/M$.

故得

$$|f(x)\alpha(x)|=|f(x)||\alpha(x)|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$$

从而说明,有界变量与无穷小量的乘积也是无穷小量.

特别,由于无穷小量是有界变量,因此无穷小量与无穷小量的乘积也是无穷小量.

例 当 x 趋于零时,x 是无穷小量,而 $\sin\dfrac{1}{x}$ 是有界变量,所以 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 是 x 趋于零时的无穷小量.图 1.9 画出了这个函数的图形.在原点附近它有着无穷多次振动,当 x 趋于零时振动的振幅下降而趋于零.

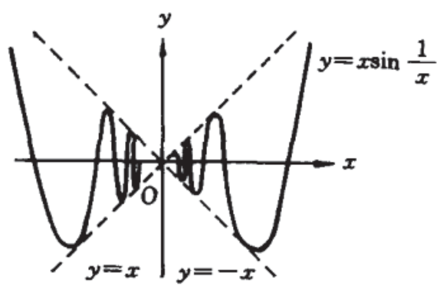


图 1.9

两个无穷小量的商亦不同于一般函数的商.由于分子分母趋于零的快慢程度和方式各异,所以其商就有各种各样的变化状态.例如当 x 趋于零时,变量 $x,x^2,\sin x,x\sin\dfrac{1}{x}$ 都是无穷小量,但是

它们的商就有这样一些情形.当 x 趋于零时，$\frac{x^2}{x}$ 与 $\frac{\sin x}{x}$ 的极限都存在,分别是 0 和 1；$\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\sin\frac{1}{x}$ 没有极限,它是有界量,而 $\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}$ 绝对值无限增大.因此无穷小量的商又称为 $\frac{“0”}{0}$ 型的未定式.关于这类比式的极限计算方法在下一章还要专门讨论.这里仅就比式极限的存在来对无穷小量作一比较.

（二）无穷小量的比较

前面曾指出无穷小量有趋于零的“快慢”问题.那么何谓快?快到什么程度?需要给出定量的定义.

定义 2 设当 x 趋于 a 时,变量 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 都是在取极限过程中不为零值的无穷小量.

(1) 若商 $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 的极限 A 为一有限数,即

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A$$

当 $A\neq0$ 时,则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是 x 趋于 a 时的同级无穷小量,记为

$$\alpha(x)=O(\beta(x))\quad(x\to a)$$

特别,当 $A=1$ 时,则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是 x 趋于 a 时的等价无穷小量,即 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 趋于零的快慢基本相同,记为

$$\alpha(x)\sim\beta(x)\quad(x\to a)$$

当 $A=0$ 时,则称 $\alpha(x)$ 是 x 趋于 a 时比 $\beta(x)$ 高级的无穷小量,即 $\alpha(x)$ 比 $\beta(x)$ 更快地趋于零,记为

$$\alpha(x)=o(\beta(x))\quad(x\to a);$$

由于对任给的正数 ε,总存在正数 δ,当 $0<|x-a|<\delta$ 时有

$$|\alpha(x)|\leqslant\varepsilon\cdot1$$

因此常把当 x 趋于 a 时的无穷小量 $\alpha(x)$,记为

$$\alpha(x)=o(1)\quad(x\to a);$$

(2) 若以$(x-a)$为 x 趋于 a 时的标准无穷小量，且 $\alpha(x)$与$(x-a)^k$ 是 x 趋于 a 时的同级无穷小量，则称 $\alpha(x)$是关于$(x-a)$的 k 级无穷小量，其中 k 为正常数.

根据定义 2，当 x 趋于零时，x 与 $\sin x$ 就是等价的无穷小量；x^2 是比 x，$\sin x$ 高级的无穷小量. 下面再考虑另外一些例子.

例 1 证明：$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$，则 $\dfrac{1}{1+f(x)}=1-f(x)+o(f(x))$.

证 已知当 x 趋于 a 时，$f(x)$是无穷小量，而

$$\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{1+f(x)}-(1-f(x))}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(1+f(x))}=0$$

故有

$$\frac{1}{1+f(x)}=1-f(x)+o(f(x))$$

例 2 设 $\alpha(x)=x^2-1$，$\beta(x)=2x^2-x-1$，则当 x 趋于 1 时，有 $\alpha(x)=O(\beta(x))$，$\alpha(x)\sim\dfrac{2}{3}\beta(x)$.

证 由于当 x 趋于 1 时，$\alpha(x)$与 $\beta(x)$都是在取极限过程中不为零值的无穷小量，而当 $x\neq1$ 时，则有

$$\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{(2x+1)(x-1)}=\frac{x+1}{2x+1}$$

所以

$$\lim_{x\to1}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{2}{3}$$

故 $\alpha(x)=O(\beta(x))$，即当 x 趋于 1 时是两个同级的无穷小量，而 $\alpha(x)$与 $\dfrac{2}{3}\beta(x)$ 是等价无穷小量.

例 3 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}x\cdot\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=0$$

故当 x 趋于零时，$1-\cos x$ 是比 x 高级的无穷小量.

特别，已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，故 $1-\cos x$ 是关于 x 趋于零的二级无穷小量.

例 4 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x(1-\cos x)}{x^3}=1$$

故 $2\sin x-\sin 2x$ 是关于 x 趋于零的三级无穷小量.

关于等价的无穷小量还有下面重要的性质.

定理 设 $\alpha(x),\beta(x),\alpha_1(x),\beta_1(x)$都是 x 趋向于 a 时的无穷小量，且 $\alpha(x)$与 $\alpha_1(x)$等价，$\beta(x)$与 $\beta_1(x)$等价，如果 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 也存在，且有

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

事实上从

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}$$

即得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}&=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}\\&=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\end{aligned}$$

根据这条定理，在计算 $\dfrac{0}{0}$ 型的未定式时，有时可把分子分母或其乘积因子分别换成它们等价的无穷小量，这样就能方便地得出结果. 但是对于分子或分母中用“＋”“－”号连接的各部分一般不能随便分别地作替换.

例 5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1}$.

解 因 $\sin x$ 与 x 等价，$\sqrt{x+1}-1$ 与 $\dfrac{x}{2}$ 等价，利用上述定理知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\dfrac{x}{2}}=2$$

例 6 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$.

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^3}\cdot\frac{\dfrac{x^2}{2}}{\cos x}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

1.2.9 无穷大量及其比较

在不收敛的变量中，有一类变量在变化时，虽然不能无限接近于某一定数，但其绝对值可以无限地增大，我们就把这类变量称为无穷大量. 它的精确定义可叙述如下：

定义 1 设函数 $u(x)$ 在点 a 的去心邻域有定义，若对任意给定的正数 E，存在这样的正数 δ，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时就有 $|u(x)|>E$，则称 $u(x)$ 为 x 趋向于 a 时的无穷大量.

由于无穷大量按其绝对值是趋向于无穷大的，因此作为极限概念的一个自然推广就是把无穷大量也算作以“∞”为极限的变量，于是，若 $u(x)$ 是 x 趋向于 a 时的无穷大量，则可记为

$$\lim_{x\to a}u(x)=\infty \text{ 或 } u(x)\to\infty\ (x\to a)$$

若 $u(x)$ 在 x 充分接近 a 时，只取正值而无限增大(或只取负值而无限减小). 这时可将定义 1 中的最后不等式改写为

$$u(x)>E\quad(\text{或 } u(x)<-E)$$

则更可明确的记成

$$\lim_{x\to a}u(x)=+\infty\ (\text{或}\lim_{x\to a}u(x)=-\infty)$$

若将 x 趋向于 a 改为其它形式的变化过程,类似地可以写出 $u(x)$ 是无穷大量的定义.

注意:无穷大量也不是很大的数.

例 1 证明 $\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$.

证 对任给的正数 E,要使

$$e^{\frac{1}{x}}>E$$

即 $x<\frac{1}{\ln E}$,只要取 $\delta=\frac{1}{\ln E}$,则当 $0<x<\delta$ 时有 $e^{\frac{1}{x}}>E$ 成立. 故

$$\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$$

例 2 证明:$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\infty$.

证 对任给的正数 E,由于 $x\to 1$,故有 $0<|x-1|<1$,即先取 $\delta_1=1$. 当 $x+1<3$ 时,有

$$\left|\frac{x^2+1}{x^2-1}\right|=\left|\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}\right|\geqslant\frac{1}{|x-1||x+1|}>\frac{1}{3|x-1|}$$

为使 $\left|\frac{x^2+1}{x^2-1}\right|>E$,只要 $x+1<3$,且 $|x-1|<\frac{1}{3E}$,取 $\delta=\min\left(1,\frac{1}{3E}\right)$. 即当 $0<|x-1|<\delta$ 时,有

$$\left|\frac{x^2+1}{x^2-1}\right|>E$$

成立,故 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\infty$.

无穷大量具有下列明显的性质.

1° 若 $u(x)$ 是 x 趋向于 a 时的无穷大量,则 $\alpha(x)=\frac{1}{u(x)}$ 就是 x 趋向 a 时的无穷小量. 反之亦真.

2° 若 $u(x)$ 是 x 趋向于 a 时的无穷大量，$v(x)$ 在 a 的附近有界，则 $u(x)+v(x)$ 是 x 趋向于 a 时的无穷大量.

3° 若 $u(x)$ 与 $v(x)$ 是 x 趋向于 a 时的无穷大量，则 $u(x)v(x)$ 也是 x 趋向于 a 的无穷大量.

由于无穷大量不是以有限数作为极限的变量，因此它具有与一般函数极限不同的一些性质. 例如两个无穷大量的差和商. 就不一定存在着极限，而是有各种各样的变化状态，故分别称为"$\infty-\infty$"和 $\frac{\text{“}\infty\text{”}}{\infty}$ 型的未定式. 这些未定式的极限的计算也将在下一章叙述. 这里与无穷小量一样，仅就无穷大量比式极限的存在来对它们进行比较.

定义 2 设 $u(x)$ 与 $v(x)$ 是 x 趋向于 a 时的两个无穷大量，且商 $\frac{u(x)}{v(x)}$ 的极限 A 是有限数，即

$$\lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}=A$$

则当 $A\neq 0$ 时，称 $u(x)$ 与 $v(x)$ 是 x 趋向于 a 时的同级无穷大量；当 $A=1$ 时，称 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是 x 趋向于 a 时的等价无穷大量；当 $A=0$ 时，称 $v(x)$ 是 x 趋向于 a 时比 $u(x)$ 高级的无穷大量.

两个无穷大量是同级的，则它们趋向于无穷大的速度是相同的；如果 $v(x)$ 是比 $u(x)$ 高级的无穷大量，则 $v(x)$ 就比 $u(x)$ 趋向于无穷大的速度快. 通常当 x 趋向于 a 时，$\left(\frac{1}{x-a}\right)^k$ 称为 k 级无穷大量，它常用来作标准以确定其它无穷大量的级.

例 3 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$，其中 $k>0$，$a>1$.

证 (1)当 k 为正整数时，令 $a=1+\lambda$，$\lambda>0$，故有

$$0<\frac{n^k}{a^n}=\frac{n^k}{(1+\lambda)^n}<\frac{n^k(k+1)!}{n(n-1)\cdots(n-k)\lambda^{k+1}},$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k(k+1)!}{n(n-1)\cdots(n-k)\lambda^{k+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(k+1)!}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(-\frac{k-1}{n}\right)(n-k)\lambda^{k+1}}$$

$$=0$$

应用两边夹判别法,得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$$

(2)当 $k>0$ 时,总存在正整数 m,使 $0<k<m$. 故有

$$0<\frac{n^k}{a^n}<\frac{n^m}{a^n}$$

由(1)知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^m}{a^n}=0$, 故有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$. 综上所述,当 $k>0,a>1$ 时,有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$.

复习思考题

1. 用严格的数学语言叙述下列极限的定义,并作出几何说明:

(1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$ (2) $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=l$

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=l$ (4) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ (6) $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=0$

2. 若函数在一点的两个单侧极限都存在,是否在这点的极限一定存在?

3. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$ 成立,则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=l$ 是否成立? 反之,若 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=l$ 成立,是否必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$ 成立? 举例说明之.

4. 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在,能否说 $f(x)$ 在它的整个定义域内一定有界? 举例说明.

5. 写出下列等式的数学定义,并作出几何说明.

(1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ (2) $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\infty$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$　　　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

6. 试举例说明 $\dfrac{\text{“}\infty\text{”}}{\infty}$ 与“$\infty-\infty$”型未定式的各种变化状态.

7. 下列各种说法是否正确：

(1)无穷小量是比任何数都小的数.

(2)无穷小量就是绝对值很小的量.

(3)无穷小量就是零.

(4)$-\infty$是无穷小量.

(5)无限多个无穷小量之和仍为无穷小量.

(6)无穷大量是很大的数.

(7)有限个无穷大量之和仍为无穷大量.

(8)无穷大量与有界变量的乘积仍是无穷大量.

8. 无穷小量与无穷大量乘积的结果是什么？试举例说明.

9. 任意两个无穷小量是否可以比较其级的高低？试举例说明.

10. 等价的无穷小量有些什么性质？若当 $x\to a$ 时 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，$\beta(x)\sim\gamma(x)$，问是否有 $\alpha(x)\sim\gamma(x)$？

习题 1.2

1. 按定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} x=\dfrac{\pi}{2}$　　　　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$，$(a>1)$

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+1}+x)=0$　　　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-1}{x+1}=1$

2. 按定义证明：$\lim\limits_{x\to2} x^2=4$，并填下表.

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	…
δ					

3. 按定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to0}x^n\sin\dfrac{1}{x}=0$，($n$ 为自然数)

(2) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[k]{x}=\sqrt[k]{a}$，($a>0$，$k$ 为正整数)

(3) $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$　　(4) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+x}=+2$

4. 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{x}$　　(4) $\lim\limits_{x\to a}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x-a}$

5. 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x<0\\ x, & 0\leqslant x<1\\ 1, & x\geqslant1\end{cases}$

问 $f(x)$在 $x=0$ 与 $x=1$ 两点的极限是否存在？为什么？

6. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to1}\left(x^5-5x+2+\dfrac{1}{x}\right)$　　(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$，($m,n$ 为自然数)

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-(x+1)}{\sqrt{x+1}-1}$　　(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{arc\,tg}x}{x}$　　(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$

(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$　　(9) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sin x}{x}$

7. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$，($m,n$ 为自然数，α,β 为实数)

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$，($m,n$ 为自然数，α,β 为实数)

8. 设 $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$，求 $f(0+0)$及 $f(0-0)$.

9. 证明：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x=e^k$，其中 k 为整数.

10. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg}2x}{\sin 5x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{x}$

(5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$　　(6) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$

(7) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\text{ctg}x-\text{ctg}a}{x-a}$，$(a\neq n\pi, n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$

(8) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^x$　　(9) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$

(10) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$　　(11) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-x^2}{1-x}}$

11. 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}=\dfrac{\sin x}{x}$.

$\left(\text{提示：先证明 } \sin x=2^n\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\cdot\sin\dfrac{x}{2^n}\right)$

12. 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{a}{n^2}+\sin\dfrac{2a}{n^2}+\cdots+\sin\dfrac{na}{n^2}\right)=\dfrac{a}{2}$.

$\left(\text{提示：先证明}(\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx)\cdot\sin\dfrac{x}{2}=\sin\dfrac{nx}{2}\right.$

$\left.\cdot\sin\dfrac{(n+1)x}{2}\right)$

13. 试从条件 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$ 决定常数 a 和 b.

14. 按定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty$，$(a>1)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n n=\infty$，

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_a x=-\infty$，$(a>1)$.

15. 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$，且 $|b_n|\geqslant b>0$，$(n=1,2,\cdots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n b_n=\infty$.

16. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+\sin x)$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$

17. 若 $x\to 0$，试证明：

(1) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt[8]{x}$　　(2) $\mathrm{tg}x-\sin x=o(x^2)$

(3) $1-\cos x=o(x)$

(4) $\sqrt[n]{x^2+\sqrt{x^3}}\sim\sqrt[n]{x\sqrt{x}}$，其中 n 为正整数

18. 证明：当 $n\to\infty$时，$\sqrt[n]{n!}=O(n)$.

19. 若 $x\to+\infty$时，试证明：

(1) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt{x}$　　(2) $x^2+x\sin x\sim x^2$

(3) $\dfrac{\mathrm{arc\ tg}x}{2x^2+1}\sim\dfrac{\pi}{4x^2}$　　(4) $x^3+x\sim x^3$

20. 证明：当 $x\to0$ 时，$\mathrm{tg}x-\sin x$ 关于 x 是三级的无穷小量.

21. 证明：若 $a_0\neq0$，则 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 与 x^n 是同级的无穷大量($x\to\infty$)，其中 n 为正整数.

22. 当 $x\to0$ 时，下列函数关于 x 是几级的无穷小量？

(1) $\sin(\sqrt{1+x}-1)$　　(2) $\sqrt{a+x^3}-\sqrt{a}$，$(a>0)$

(3) $2\sqrt[3]{\sin x}$　　(4) $\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x}}-1$

(5) $\cos x-\sqrt[3]{\cos x}$　　(6) $\dfrac{x(1+x)}{x^2+x+1}$

23. 当 $x\to+\infty$时，试比较下列无穷大量的级：

(1) $\ln x$ 与 x^k，$(k>0)$　　(2) 2^x 与 3^x

(3) x^k 与 a^x，$(a>1,k>0)$　　(4) $\sqrt{x^3+x+1}$与 $\sqrt{x+\sin^2x}$

24. 试用等价的无穷小量去代换分子或分母或乘积因子的方法计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$，($m$，$n$ 均为自然数)

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}ax}{x}$　　(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}(\mathrm{tg}x)}{x}$

(4) $\lim\limits_{\varphi\to0}\dfrac{\mathrm{tg}2\varphi\cdot\arcsin\varphi}{\sin3\varphi\cdot\mathrm{arctg}2\varphi}$　　(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{\mathrm{tg}x}$

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2x}$　　(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt[n]{1+\mathrm{tg}x}-1)(\sqrt{1+x}-1)}{2x\sin x}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}$ (10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$

1.3 函数的连续性

在生产实际中常常会遇到连续函数.另外我们还经常直接或间接地借助于连续函数来讨论一些不连续函数.因此连续函数就成为高等数学这门课程的主要研究对象之一.那么这类函数的特点是什么呢？我们来看一个具体的例子.一个运动的质点,从空间中的一点到另一点,它所经过的几何轨迹是一条连绵不断的曲线.若占据这两点的时刻分别是 t_1 及 t_2,那么在 t_1 到 t_2 中的任何一个时刻,质点一定占据着空间某一位置.设由某一初始时刻起,经过时间 t 之后,质点所走过的路程是 $s(t)$.若在时刻 t_0 附近来考察这个质点,不难设想,当时间从 t_0 经过很微小的变化时,路程的变化也应当是很微小的.而且可以使路程的改变小到预先给定的程度,只要让时刻的变化足够微小就行了.表达成数学语言就是:对任给的正数 ε,都可以找到一个这样的正数 δ,只要 $|t-t_0|<\delta$,就能使 $|s(t)-s(t_0)|<\varepsilon$.即 $\lim\limits_{t\to t_0}s(t)=s(t_0)$.

类似的例子还可以举出很多来,从而不难看出,连续函数的特点是:当自变量变化很微小时,相应的函数值的变化也很微小.而且详细讨论上述例子中的特殊极限将有重要的意义.抛开这个例子的具体内容,加以抽象就得到函数在一点 x_0 处连续的定义.

1.3.1 函数连续性的概念

大家知道,函数 $f(x)$ 在点 x_0 处存在极限 l,即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$,但点 x_0 可能不属于函数 $f(x)$ 的定义域,也可能属于函数 $f(x)$ 的定义域.自然,即使 x_0 属于函数 $f(x)$ 的定义域,而函数值 $f(x_0)$ 也未必等于 l.不过,当 $f(x_0)=l$ 时,有着特殊的意义.

定义 1 设函数 $f(x)$在点 x_0 的某一个邻域内有定义. 若对任给的正数 ε,总存在正数 δ,使当 $|x-x_0|<\delta$ 时,就有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,则称函数 $f(x)$在点 x_0 处连续.

如果在坐标系的 Ox 轴上作出以 x_0 为中心,长度为 2δ 的开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$,在 Oy 轴上作出以 $f(x_0)$为中心长度为 2ε 的开区间$(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon)$. 然后过这些区间的端点分别作平行于 Oy 轴和 Ox 轴的直线,它们彼此交成一矩形. 则函数 $f(x)$在点 x_0 处连续就表示它在区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$的图形必须落在这个矩形内(图 1.10).

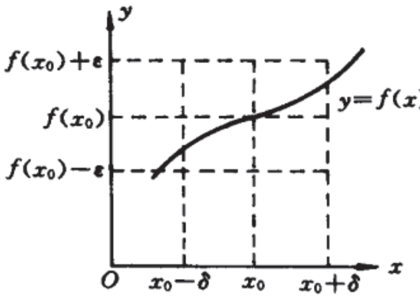


图 1.10

显然,从定义 1 看出,函数 $f(x)$在点 x_0 处连续,点 x_0 必须属于函数 $f(x)$的定义域. 因此,函数 $f(x)$在点 x_0 处连续可换成如下的几种等价的方式.

由于$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,故有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=f(\lim_{x\to x_0}x)$$

上述等式的左端是先作函数运算后作极限运算,而等式右端是先作极限运算后作函数运算,即函数 $f(x)$在点 x_0 处连续等价于函数运算与极限运算可以交换先后次序.

令 $x=x_0+\Delta x$,即 $\Delta x=x-x_0$,并称 Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的改变量或增量,它是一个可正可负的变量. 当 $\Delta x>0$ 时,表示自变量 $x=x_0+\Delta x>x_0$;当 $\Delta x<0$ 时,有 $x=x_0+\Delta x<x_0$. 再令

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

Δy 称为函数 $f(x)$在点 x_0 处的改变量或增量. 于是有

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处连续.

或者在点 x_0 的附近，若当自变量的改变量是无穷小量时，对应的函数改变量也是无穷小量，就说这个函数在点 x_0 处连续.

有时只讨论函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左侧或右侧的情况. 由于函数在一点处有左极限或右极限的概念，因此相应地可以引入函数在一点左连续或右连续的概念.

定义 2 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左极限存在且等于它在这点的函数值 $f(x_0)$，即

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)，或 f(x_0 - 0) = f(x_0)$$

就称 $f(x)$ 在点 x_0 是左连续的. 同样，函数 $f(x)$ 在点 x_0 是右连续的，是指

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)，或 f(x_0 + 0) = f(x_0)$$

显然与函数极限一样，不难得到函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件是它在点 x_0 既右连续又左连续.

前面介绍了函数在一点处的连续性，现在来给出函数在区间上的连续定义.

定义 3 若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每点都连续，则称函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续. 若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，且在 a 点右连续，在 b 点左连续，则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，而 x_0 是 $[a,b]$ 上任意一点，由定义 1 知，有

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

因而函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的图形就是一条绵延不断的曲线，即连续曲线.

例 1 证明 $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

证 由于 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0$，即 $f(0-0)=0$，同样也有 $f(0+0)=0$，故有

$$f(0-0)=f(0+0)=f(0)$$

即 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$，因此函数 $f(x)=|x|$ 在点 $x=0$ 处连续.

例 2 证明 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

证 设 x_0 是 $(-\infty,+\infty)$ 内任意取定的一点，对任给的正数 ε，要使

$$\begin{aligned}|\sin x-\sin x_0| &= 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \\ &= 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \\ &\leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \\ &\leqslant 2\cdot\frac{|x-x_0|}{2}=|x-x_0|<\varepsilon\end{aligned}$$

取 $\delta=\varepsilon$. 则当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$$

由定义 1 知，函数 $\sin x$ 在点 x_0 处连续，再由 x_0 的任意性，就证明了 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续的.

类似地，可证明 $\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续的.

例 3 证明指数函数 $f(x)=a^x$，$a>0$，$a\neq 1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

证 已知 $\lim\limits_{x\to 0} a^x=1$. 于是，对 $(-\infty,+\infty)$ 内的任意一点 x_0，有

$$a^x=a^{x_0}\cdot a^{x-x_0}$$

而

$$\lim_{x\to x_0} a^x=a^{x_0}\cdot\lim_{x\to x_0} a^{x-x_0}=a^{x_0}\cdot 1=a^{x_0}$$

根据定义 1 知，指数函数 a^x 在点 x_0 是连续的. 由点 x_0 的任意性，故它在 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续的.

由定义 1 看出，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，必须只需满足下列三个条件：

(1)点 x_0 属于 $f(x)$ 的定义域，即函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一个邻域内有定义；

(2) $f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 存在，且 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$，即函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有极限；

(3) $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$，即在点 x_0 处的函数值等于它的极限值.

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 的去心邻域内有定义，且上述三个条件中至少有一个条件不成立，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是间断的，而点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的间断点或不连续点. 函数 $f(x)$ 的间断点有下列几种可能：

1° 若 $f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 都存在，且 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$，但 $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$，则称点 x_0 是函数 $f(x)$ 的可去间断点.

这时，函数 $f(x)$ 可能在点 x_0 处无定义，或者虽然有定义，但是在点 x_0 处的函数值不等于它的极限值. 不过，只要我们适当地补充定义在点 x_0 处的函数值，或者改变点 x_0 处的函数值使之等于极限值，就可除去它的间断性，使函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续. 这正是“可去”二字的本意.

2° 若 $f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 都存在，但是 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$. 由于函数的图形在点 x_0 处产生跳跃，因此称这种间断点为跳跃间断点，并称绝对值 $|f(x_0+0)-f(x_0-0)|$ 为跳跃度.

3° 若 $f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 中至少有一个为无穷大量，则称这种间断点为无穷间断点.

4° 若 $f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 中至少有一个不存在，如 1.2.4 中的例，$f(0-0)$ 与 $f(0+0)$ 不存在，由于函数值在间断点 $x=0$ 附近不停振荡，故称这种间断点为振荡间断点.

通常把间断点分成两类. 若函数 $f(x)$ 在间断点的左、右极限

都存在并有限，则称这种间断点为第一类间断点．不是第一类的间断点就称为第二类间断点．

例 4　设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1\\ 0\ \ , & x=1\end{cases}$$

研究 $f(x)$在点 $x=1$ 处的连续性．

解　由于

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2$$

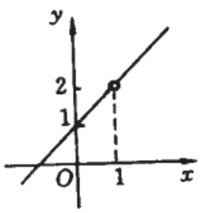


图 1.11

同理也有 $f(1+0)=2$，故

$$f(1-0)=f(1+0)=2$$

但并不等于 $f(1)$，因此 $x=1$ 是 $f(x)$的可去间断点（图 1.11），如果令 $f(1)=2$，那么函数 $f(x)$在 $x=1$ 处就连续了．

例 5　研究函数

$$f(x)=\frac{\sin x}{x},\ x\neq 0$$

在点 $x=0$ 处的连续性．

解　已知 $f(0-0)=f(0+0)=1$，但 $f(x)$在 $x=0$ 处无定义，故 $x=0$ 是它的可去间断点．我们只要补充定义在 $x=0$ 处的函数值为 1，即有

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1\ \ , & x=1\end{cases}$$

那么 $x=0$ 就是 $f(x)$的连续点了．

例 6　研究函数

$$f(x)=\begin{cases}-x+1, & 0\leqslant x<1\\ 1\quad, & x=1\\ -x+3, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

在点 $x=1$ 处的连续性.

解 函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处虽有定义,但它的左极限

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(-x+1)=0$$

与右极限

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(-x+3)=2$$

存在而不相等,即 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在,所以 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处不连续,且这点是 $f(x)$ 的跳跃间断点(图 1.12),跳跃度为 2.

例 7 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0\quad, & x=0\end{cases}$$

研究它在点 $x=0$ 处的连续性.

由于 $\sin\dfrac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 附近来回于 $+1$ 与 -1 间无限振动,所以 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的左右极限都不存在,因此它是振荡间断点(参看 1.2.4 节的图 1.7).

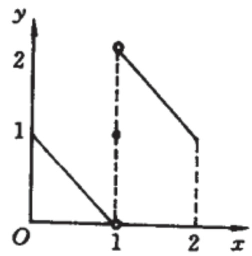


图 1.12

例 8 考察函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

由于

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$$

即 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的左右极限不是有限数,而是无穷大. 因此它是第二类间断点(图 1.13).

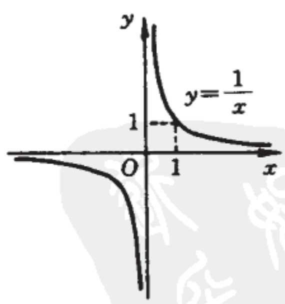


图 1.13

例 9 再考察函数(1.2.2 例)

$$f(x)=\begin{cases}0.5x+5, & -10\leqslant x<0\\ x+85, & 0\leqslant x<10\end{cases}$$

显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是右连续的,但不是连续的,因为它不左连续.

1.3.2 连续函数的性质与四则运算

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续只是函数极限的一种特殊形式,因此有关函数极限的全部性质就可以逐一对应过来.这里仅列举出今后经常用到的一些性质.

定理 1(局部有界性) 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续,则总存在正数 δ,当 $|x-x_0|<\delta$ 时函数 $f(x)$ 必有界.

定理 2(连续函数的保号性) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续,且 $f(x_0)>0$(或 $f(x_0)<0$),则总存在正数 δ,当 $|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

定理 3(四则运算) 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在点 x_0 处连续,则 $f(x)\pm g(x)$,$f(x)\cdot g(x)$,$cf(x)$ 以及 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$,只要 $g(x_0)\neq 0$,在点 x_0 处也是连续的,其中 c 为任意常数.

于是,如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数,则它们的和差积商(分母不等于零)就都是 $[a,b]$ 上的连续函数.

定理 4 连续严格增函数的反函数也是连续严格增的.

证 设 $y=f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上连续严格增的函数,其值域组成的数集记为 I.利用 1.3.5 中的定理 2,可以证得 I 是个区间.对于 I 中的每一数值 y_0,则在区间 $[a,b]$ 上存在这样一个数值 x_0,使得 $f(x_0)=y_0$.

由于函数是严格增的,所以当 $x<x_0$ 时,必有 $f(x)<f(x_0)$,而当 $x>x_0$ 时,则 $f(x)>f(x_0)$.这就是说在区间 $[a,b]$ 上只能有唯一的数值 x_0 与从 I 中所取的数值 y_0 相对应.因此函数 $y=$

$f(x)$的反函数存在.

不难看出,反函数 $f^{-1}(y)$是严格增的. 事实上,对于 I 中任意两个数值 $y_1<y_2$,设

$$x_1 = f^{-1}(y_1),\ x_2 = f^{-1}(y_2)$$

依照反函数的定义有

$$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$$

如果 $x_1 \geqslant x_2$,则根据函数 $f(x)$的严格增性可得 $y_1 \geqslant y_2$,这是不合理的. 可见 $x_1<x_2$,所以 $f^{-1}(y)$是严格增函数.

最后还须证明函数 $x=f^{-1}(y)$的连续性. 为此任取 I 中的数值 y_0,由于这个反函数在 y_0 是单调有界的,故它在 y_0 处必有左极限 $f^{-1}(y_0-0)$和右极限 $f^{-1}(y_0+0)$. 必须证明的是这些极限相等且等于函数值 $f^{-1}(y_0)$,即

$$f^{-1}(y_0-0) = f^{-1}(y_0+0) = f^{-1}(y_0)$$

设

$$x_1 = f^{-1}(y_0-0),\ x_2 = f^{-1}(y_0+0),\ x_0 = f^{-1}(y_0)$$

因为当 y 小于 y_0 趋向 y_0 时,x 趋向 x_1,利用函数 $y=f(x)$的连续性就得到

$$y_0 = \lim_{y\to y_0-0} y = \lim_{y\to y_0-0} f(f^{-1}(y)) = \lim_{x\to x_1} f(x) = f(x_1)$$

而当 y 大于 y_0 趋向 y_0 时,x 趋向 x_2,同样由函数 $y=f(x)$连续性又得到

$$y_0 = \lim_{y\to y_0+0} y = \lim_{y\to y_0+0} f(f^{-1}(y)) = \lim_{x\to x_2} f(x) = f(x_2)$$

由此可见

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_0)$$

但因 $f(x)$是严格增函数,故得

$$x_1 = x_2 = x_0$$

这就证明了所要的结论.

如果函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上是严格减的连续函数. 令 $g(x)=-f(x)$,则 $g(x)$在$[a,b]$上是严格增的连续函数. 应用定理 4 与

定理 3,就可得到它的反函数也是严格减的连续函数. 从而推得:

连续严格减函数的反函数也是连续严格减函数.

关于复合函数的连续性也可以这样粗略地描述. 设函数 $y=\varphi(x)$在点 x_0 连续,则在点 x_0 附近,变量 x 的改变量很微小时,变量 y 的改变量也很微小;又设函数 $z=f(y)$在点 $y_0=\varphi(x_0)$连续,则在 y_0 的附近,变量 y 的改变量很微小时,变量 z 的改变量就也很微小,从而得到,在点 x_0 附近当变量 x 的改变量很微小时,复合函数 $z=f(\varphi(x))$的改变量也很微小,这正是函数 $f(\varphi(x))$在点 x_0 的连续性.

定理 5 设函数 $y=\varphi(x)$在点 x_0 连续,且函数 $z=f(y)$在点 $y_0=\varphi(x_0)$连续,则复合函数 $z=f[\varphi(x)]$在点 x_0 也连续.

证 由于

$$\lim_{y\to y_0} f(y)=f(y_0)=f(\varphi(x_0))$$

故对任意给定的正数 ε,总存在这样的正数 η,使得当 $|y-y_0|<\eta$ 时就有

$$|f(y)-f(y_0)|<\varepsilon$$

又因

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)=y_0$$

故对上述求得的正数 η,存在这样的正数 δ,使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时有

$$|y-y_0|=|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\eta$$

从而得到

$$|f(\varphi(x))-f(\varphi(x_0))|=|f(y)-f(y_0)|<\varepsilon$$

所以 $f(\varphi(x))$在点 $x=x_0$ 连续.

复合函数的这一性质可简洁地用公式表示成

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x))=f(\varphi(x_0))=f(\lim_{x\to x_0}\varphi(x))$$

它说明在求复合函数的极限时,可将极限运算移到内层函数去施行.

定理 6 设函数 $f(x)$在点 x_0 的某邻域内有定义,则 $f(x)$在点 x_0 连续的充分必要条件是对任意$\{x_n\}$,只要$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$,就有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$.

此结果是 1.2.4 节中的定理的直接推论.

1.3.3 初等函数的连续性

在初等数学中,我们曾研究过三角函数、反三角函数、指数函数、对数函数及幂函数.这些函数统称为基本初等函数.而由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和有限次函数复合所构成的函数称为初等函数.

定理 设初等函数在某区间(开的、闭的、半开半闭的)上有定义,则它在此区间上连续.

证 根据初等函数的定义与连续函数的性质,只要确定基本初等函数在定义区间上是连续的就行了.

在 1.3.1 的例 2 中已证明 $\sin x$ 在整个数轴上是连续的.而 $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$,因为函数 $\frac{\pi}{2}-x$ 及 $\sin x$ 都在整个数轴上连续,所以复合函数 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$ 在整个数轴上是连续的.

根据 1.3.2 的定理 3,$\mathrm{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$ 在除去使分母为零的那些点外,即当 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时,正切函数就在它的定义区间上连续.同样余切函数 $\mathrm{ctg}x=\frac{\cos x}{\sin x}$,当 $x\neq k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$时,也在其定义区间上连续.从而三角函数在其定义区间上是连续的.

再根据 1.3.2 的定理 4 知,一切反三角函数在它们的定义区间上是连续的.例如函数 $\sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上是严格增的连续函

数，所以它的反函数 $\arcsin x$ 在$[-1,1]$上也是严格增的连续函数；又如函数 $\mathrm{tg}x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内是严格增的连续函数，所以反函数 $\mathrm{arctg}x$ 在$(-\infty,+\infty)$上也是严格增的连续函数.

在 1.3.1 的例 3 中已证明指数函数 a^x，$a>0$，$a\neq1$ 在整个数轴上是连续的. 由于当 $a>1$ 时，指数函数 a^x 是严格增的连续函数，而 $0<a<1$ 时它是严格减的连续函数. 应用 1.3.2 的定理 4，指数函数 a^x 的反函数 $\log_a x$ 在$(0,+\infty)$内是连续的.

由于 $x^\mu=e^{\mu\ln x}$，$x\in(0,+\infty)$. 因此应用 1.3.2 的定理 5 与指数函数 e^x 及对数函数 $\ln x$ 的连续性，就得到幂函数在它的定义区间内是连续的.

综上所述，就得到基本初等函数在它们的定义区间内是连续的. 而常数显然在整个数轴上是处处连续的. 所以由这些基本初等函数和常数经过有限次的四则运算及函数的复合运算，所得到的初等函数就在其定义区间内是连续的.

从这个定理可以看出，通常所遇到且应用广泛的函数如多项式、有理分式等都是连续函数，又如常见的幂指函数 u^v，如果 $u>0$ 与 v 是 x 的连续函数，则由于 $u^v=e^{v\ln u}$，所以它也是连续的.

利用初等函数的连续性，往往使我们能简便地计算某些函数的极限.

若函数 $f(x)$在点 x_0 连续，则在计算极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，只要算出函数值 $f(x_0)$就行了.

若函数 $y=\varphi(x)$在点 $x=x_0$ 连续，而函数 $f(y)$在点 $y_0=\varphi(x_0)$连续，则在计算复合函数 $f(\varphi(x))$的极限时可利用公式

$$\lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f(\lim_{x\to x_0}\varphi(x))$$

例 1 求 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

解 由于当 x 趋于 a 时，$x\neq a$，故有

$$\frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}$$

$$= \cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}$$

而 $x=a$ 是初等函数 $\cos\frac{x+a}{2}$ 的定义区间内的点. 故有

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim_{x\to a}\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\lim_{x\to a}\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\left(\frac{x-a}{2}\right)}$$

$$= \cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\bigg|_{x=a}\cdot 1 = \cos a$$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln x - \ln a}{x-a}(a>0)$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to a}\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^{\frac{a}{x-a}} = \mathrm{e}$,所以函数

$$y = f(x) = \begin{cases} \left(1+\frac{x-a}{a}\right)^{\frac{a}{x-a}}, & x \neq a \\ \mathrm{e}, & x = a \end{cases}$$

在点 $x=a$ 处连续,而 $\ln y$ 在点 $y=\mathrm{e}$ 处连续. 于是有

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln x - \ln a}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{1}{(x-a)}\ln\frac{x}{a}$$

$$= \lim_{x\to a}\ln\left[\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^{\frac{a}{x-a}}\right]^{\frac{1}{a}}$$

$$= \frac{1}{a}\ln\left[\lim_{x\to a}\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^{\frac{a}{x-a}}\right]$$

$$= \frac{1}{a}\ln\mathrm{e} = \frac{1}{a}$$

例 3 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-x}{x^2+1}\right)^{\frac{3x-1}{x+1}}$.

解 因为当$|x|\geqslant 1$时，$\dfrac{2x^2-x}{x^2+1}>0$，应用幂指函数的连续性，故有

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-x}{x^2+1}\right)^{\frac{3x-1}{x+1}}=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2+1}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x+1}}$$
$$=2^3=8$$

例 4 求$\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})$.

解 因为

$$(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})$$
$$=-2\sin\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)$$
$$=-2\sin\left[\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right]\sin\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)$$

而任意的$x>0$，$\left|\sin\left(\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)\right|\leqslant 1$，且

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=\sin\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}\right]$$
$$=0$$

所以，有

$$\lim_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})=0$$

1.3.4 双曲函数

由指数函数e^x和e^{-x}所构成的一类初等函数在工程技术中有着广泛的应用，这类函数是

$$\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$
$$\mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$
$$\mathrm{th}x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

它们分别称为双曲正弦，双曲余弦和双曲正切，并统称为双曲函数. 这些双曲函数的定义域是区间$(-\infty,\infty)$. 从上一节可知它们都是整个数轴上的连续函数. 双曲正弦和正切是奇函数，双曲余弦是偶函数.

直接从双曲函数的定义，容易证明下列与三角函数类似的公式：

$$\mathrm{th}x = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$$

$$\mathrm{sh}(x \pm y) = \mathrm{sh}x\mathrm{ch}y \pm \mathrm{ch}x\mathrm{sh}y$$

$$\mathrm{ch}(x \pm y) = \mathrm{ch}x\mathrm{ch}y \pm \mathrm{sh}x\mathrm{sh}y$$

由此可得

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$$

$$\mathrm{sh}2x = 2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x$$

$$\mathrm{ch}2x = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x$$

双曲正弦 $y=\mathrm{sh}x$ 的反函数称为反双曲正弦，记为 $y=\mathrm{sh}^{-1}x$，它可以通过对数函数表示出来. 事实上从

$$y = \mathrm{sh}x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

得

$$\mathrm{e}^{2x} - 2y\mathrm{e}^x - 1 = 0$$

这是关于 e^x 的二次方程，解得

$$\mathrm{e}^x = y \pm \sqrt{y^2+1}$$

由于 e^x 为正，所以根式前的负号应该舍去，故有

$$x = \mathrm{sh}^{-1}y = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$$

或习惯写成

$$y = \mathrm{sh}^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \ (-\infty < x < \infty)$$

同样，双曲余弦和双曲正切的反函数称为反双曲余弦和反双曲正切，它们的表达式分别为

$$y = \mathrm{ch}^{-1}x = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1}) \ (x \geqslant 1)$$

$$y = \operatorname{th}^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\ (-1 < x < 1)$$

图 1.14 是双曲正弦和双曲余弦的图形;图 1.15 是双曲正切的图形.

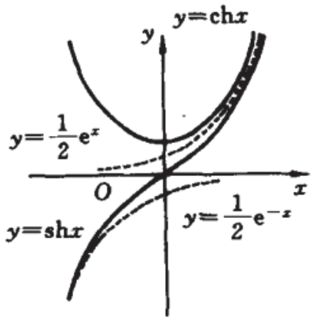


图 1.14

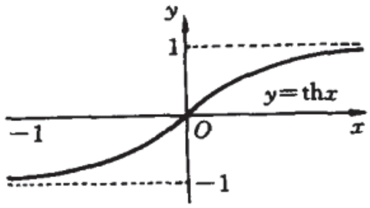


图 1.15

1.3.5 闭区间上连续函数的性质

闭区间上的连续函数有一些特殊的性质,这些性质在微积分的理论和应用中非常重要.虽然这些性质的几何意义都十分明显,但是它们的证明要用实数对极限运算的完备性定理.

(一) 介值性、有界性与取极值性

设 $f(x)$是闭区间$[a,b]$上的连续函数,且 $f(a)$与 $f(b)$异号,即 $f(a)f(b)<0$.这时点$(a,f(a))$与$(b,f(b))$是位于 x 轴的两侧.因为 $f(x)$是连续的,故其图形是一条连接点$(a,f(a))$与$(b,f(b))$的连续曲线,它必穿过 x 轴(图 1.16).这就是连续函数的零值定理.

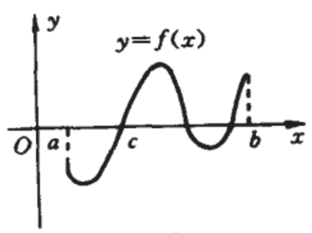


图 1.16

定理 1 (零值定理) 设 $f(x)$是闭区间$[a,b]$上的连续函数,且在这区间的两端点处取异号的数值,则至少存在一点 $c(a<c<b)$,使得 $f(c)=0$,或者说函数方程

$f(x)=0$,在(a,b)内至少存在一实根.

证 为确定起见,假设 $f(a)>0$,而 $f(b)<0$. 用中点 $\frac{a+b}{2}$ 把区间$[a,b]$平分成两个区间,若函数 $f(x)$ 在分点处等于零,则取 $c=\frac{a+b}{2}$ 定理就已证明. 若不然 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq 0$,则在这两个区间中必有一个区间,函数在两端点处取异号的值,记此区间为$[a_1,b_1]$,并且也有 $f(a_1)>0$,$f(b_1)<0$. 再把区间$[a_1,b_1]$平分成两个区间,若在分点处函数值为零,定理就已证明,否则又从中取出使函数值在两端点处异号的区间,记为$[a_2,b_2]$. 如此继续下去,或者经过有限次细分区间后,将会出现函数在某一分点处的值为零,这时定理已经得到证明;或者就得到一个无穷的闭区间列

$$[a,b],[a_1,b_1],[a_2,b_2],\cdots,[a_n,b_n],\cdots$$

它们组成区间套,并且函数在每个区间左端点处的值大于零,而在右端点处的值小于零. 根据区间套定理,必有一点 c 属于所有的区间,使

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=c$$

现在证明,函数 $f(x)$ 在这个点 c 处的值为零. 事实上在不等式 $f(a_n)>0$与 $f(b_n)<0$ 中取极限,并利用函数在点 c 处的连续性与极限的保号性就得到

$$f(c)=\lim_{n\to\infty}f(a_n)\geqslant 0 \text{ 与 } f(c)=\lim_{n\to\infty}f(b_n)\leqslant 0$$

所以 $f(c)=0$.

应当注意,定理结论中的点 c 不一定是唯一的. 如图 1.17 中就有三个点可以作为 c. 此外,这个定理有时可用来判别方程根的存在性.

例 1 证明方程 $2^x=4x$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 内至少有一个根.

证 对于方程 $2^x=4x$,容易看出它有一根 $x=4$. 但再想求一个根就困难了.

若考虑函数 $f(x)=2^x-4x$ 及闭区间 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. 易见函数$f(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上连续,且有 $f(0)=1>0, f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}-2<0$. 于是由定理 1 知,这个方程一定有一根在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 之中.

若考虑某一物理过程,所谓这个过程是连续的指它由某一状态到另一状态不是跳跃的,而是经过这两状态间的一切中间状态. 例如温度由 10℃ 上升到 20℃,就必须经过这两个温度之间的一切可能的度数. 连续变量,连续函数正是这种过程的数学抽象. 所以对于连续函数应当有

定理 2(介值定理) 设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,r 是介于 $f(a)$ 及 $f(b)$ 之间的任一数. 则必存在一点 $c(a<c<b)$ 使 $f(c)=r$.

证 若 r 就是 $f(a)$ 或 $f(b)$,这时只要取 c 等于 a 或 b 就行了. 今不妨设

$$f(a)<r<f(b)$$

考察函数

$$F(x)=f(x)-r$$

则 $F(x)$亦是$[a,b]$上的连续函数,且

$$F(a)=f(a)-r<0,\ F(b)=f(b)-r>0$$

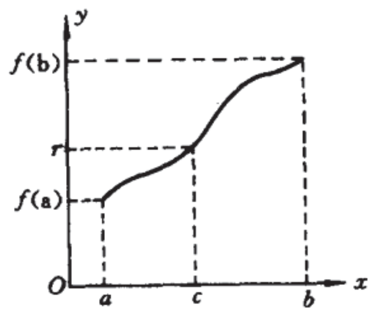


图 1.17

由零值定理可知必存在一点 c $(a<c<b)$,使

$$F(c)=f(c)-r=0$$

即 $f(c)=r$.

这个介值定理说明当连续函数从一个数值转变到另一个数值时,必经过每一中间值至少一次(图 1.17). 另外,定理 2 实际上是

定理 1 的一个推论.

定理 3(有界性) 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则它是有界的,即存在两个这样的常数 m 与M,使得当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时,有

$$m\leqslant f(x)\leqslant M$$

证 假设当 x 在区间$[a,b]$上变化时函数 $f(x)$是无界的,则对每一自然数 n,在这区间上必存在一点 x_n,使得

$$|f(x_n)|\geqslant n$$

这样就得到一个有界的数列

$$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$$

根据波尔察诺-维尔斯特拉斯定理,必可从中选出一个收敛的子列

$$x_{n_1},x_{n_2},\cdots,x_{n_k},\cdots$$

使得

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=c$$

且 c 是区间$[a,b]$上的某一点,由于函数在点 c 处的连续性,于是应有

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(c)$$

这与$|f(x_{n_k})|$趋于无穷大不相容.所引出的矛盾就证明了定理.

定理 4(取极值性) 设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则函数 $f(x)$必在$[a,b]$上达到其上确界 M 和下确界 m,也就是说,在闭区间$[a,b]$上存在这样的两点 x_1 与 x_2,使 $f(x_1)=M$ 与 $f(x_2)=m$分别为函数 $f(x)$的最大值与最小值.

证 由定理 3 知,在闭区间$[a,b]$上连续的函数 $f(x)$,其函数值的全体$\{f(x)\}$组成一个有界的数集.再由确界定理可知,存在上确界 $M=\sup\{f(x)\}$与下确界 $m=\inf\{f(x)\}$.

现在进而证明函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上达到它的上下确界,即在区间$[a,b]$上存在点 x_1 与 x_2,使得

$$f(x_1)=M,\ f(x_2)=m.$$

今证达到上确界,假定对任意的 $x\in[a,b]$,总有 $f(x)<M$.显然

函数 $M-f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上也连续，且 $M-f(x)>0$. 于是函数

$$\varphi(x)=\frac{1}{M-f(x)}$$

在 $[a,b]$ 上也连续. 再根据定理 3 可知，函数 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上也有界，即存在常数 $\mu>0$，对任意的 $x\in[a,b]$，有

$$\varphi(x)=\frac{1}{M-f(x)}<\mu$$

或

$$f(x)<M-\frac{1}{\mu}$$

这显然与 M 是数集 $\{f(x),x\in[a,b]\}$ 的上确界矛盾. 从而证明了必存在某个 $x_1\in[a,b]$，使 $f(x_1)=M$.

同样可证达到下确界的情形. 于是就证明了定理 4.

注意，如果把闭区间改成开区间. 则这个定理的结论就有可能不成立. 例如函数 $y=x$ 在开区间 $(0,1)$ 内是连续的，显然在此区间内它就达不到上确界 1 和下确界 0. 同样，如果函数在闭区间上有间断点，定理的结论也有可能不成立. 例如 1.3.1 中的例 6，给定的函数在区间 $[0,2]$ 上以 $x=1$ 为间断点，但它没有最大值和最小值.

（二）一致连续性

我们知道，函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，是指它在区间 I 上的每一点处都是连续的，这里的 I 可以是开的、闭的、半开半闭的或无穷的区间. 若用“ε-δ”语言叙述就是：对于区间 I 的每一点 x_0 及任意给定的正数 ε，总存在着这样一个正数 $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)$，只要 I 上的点 x 满足 $|x-x_0|<\delta$，就有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 注意这里的正数 $\delta(\varepsilon,x_0)$ 表示它不仅依赖于任给的正数 ε，而且还与所考察的点 x_0 有关. 对于区间 I 上不同的点 x_0，相应的 δ 一般是不同的. 换句话说，使得不等式 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 开始成立的那样一个“时刻”的 δ，对于 I 上各不相同的点是不一致的. 如果存在一个对区间 I 上的一切点都共同适用的 $\delta=\delta(\varepsilon)$，这样的连续性就是一致的.

定义 1 设函数 $f(x)$ 定义在区间 I 上,如果对任意给定的正数 ε,总存在着仅与 ε 有关的正数 $\delta(\varepsilon)$,使对于区间 I 内的任意点 x_0,只要 $|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$,就有不等式 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是一致连续的.

在定义 1 中,由于 x 与 x_0 都是同属于区间 I 上且充分接近的任意两点,因此它又可以叙述成

定义 2 设函数 $f(x)$ 定义在区间 I 上,如果对任意给定的正数 ε,总存在着这样的正数 $\delta=\delta(\varepsilon)$,使在区间 I 内的任意两点 x' 与 x'',只要 $|x'-x''|<\delta$ 时,就有不等式 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是一致连续的.

这个定义说明所谓函数在区间 I 上一致连续是指:对于区间 I 内的任意两点 x' 及 x'',只要它们充分接近,相应的函数值之差的绝对值就能小于预先指定的任意正数.

今后经常要证明函数 $f(x)$ 在区间 I 内非一致连续性. 它的精确叙述为

总存在(某个)正数 ε_0,对任意给定的正数 δ,在区间 I 内总存在某两点 x_1,x_2,使得 $|x_1-x_2|<\delta$ 与 $|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\varepsilon_0$ 同时成立.

例 1 证明函数 $f(x)=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

证 对于区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的任意两点 x' 及 x'',要使

$$|\sin x'-\sin x''| = 2\left|\cos\frac{x'+x''}{2}\right|\left|\sin\frac{x'-x''}{2}\right| \leqslant |x'-x''|<\varepsilon$$

只要取 $\delta=\varepsilon$ 就行了. 故对任给的正数 ε,总存在正数 $\delta=\varepsilon$,当 $|x'-x''|<\delta$ 时就有

$$|\sin x'-\sin x''|<\varepsilon$$

所以正弦函数在整个数轴上一致连续.

例 2 证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$, 在 $[a,1]$, $(0<a<1)$ 上一致连

续,在(0,1)内非一致连续.

证 对于区间[a,1]上的任意两点 x_1,x_2,即有 $a\leqslant x_1\leqslant 1$,$a\leqslant x_2\leqslant 1$,或

$$\frac{1}{x_1}\leqslant\frac{1}{a},\ \frac{1}{x_2}\leqslant\frac{1}{a}$$

所以

$$\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|=\frac{|x_1-x_2|}{|x_1||x_2|}\leqslant\frac{1}{a^2}|x_1-x_2|$$

为使 $\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|<\varepsilon$,只要 $\frac{1}{a^2}|x_1-x_2|<\varepsilon$. 或$|x_1-x_2|<a^2\varepsilon$,只要取 $\delta=a^2\varepsilon$ 就行了. 故对任给的正数 ε,总存在正数 $\delta=a^2\varepsilon$,则当$|x_1-x_2|<\delta$时就有

$$\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|<\varepsilon$$

所以函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在[a,1]上一致连续.

再来证明 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在(0,1)内非一致连续. 根据一致连续的否定叙述. 存在正数 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$,对任给的正数 δ,在(0,1)内总存在两点,$x_1=\frac{1}{n+1}$ 与 $x_2=\frac{1}{n}$,只要取 $n>\frac{1}{\sqrt{\delta}}$,有 $|x_1-x_2|$

$$=\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2}<\delta$$

但有

$$\left|f\left(\frac{1}{n+1}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=n+1-n=1>\frac{1}{2}=\varepsilon_0$$

即函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在(0,1)内非一致连续.

例 3 证明函数 $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ 在[a,1](0<a<1)上一致连续,而在(0,1)内非一致连续.

证 对于区间$[a,1]$上的任意两点 x_1 及 x_2,即有 $\frac{1}{x_1}\leqslant\frac{1}{a},\frac{1}{x_2}\leqslant\frac{1}{a}$,要使

$$\left|\cos\frac{1}{x_1}-\cos\frac{1}{x_2}\right|=2\left|\sin\left(\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2}\right)\right|\left|\sin\left(\frac{\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}}{2}\right)\right|$$
$$\leqslant\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|\leqslant\frac{1}{a^2}\mid x_1-x_2\mid$$

故对任给的正数 ε,只要取 $\delta=a^2\varepsilon$,则当$|x_1-x_2|<\delta$ 时就有

$$\left|\cos\frac{1}{x_1}-\cos\frac{1}{x_2}\right|<\varepsilon$$

所以函数 $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ 在$[a,1]$上一致连续.

再证 $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ 在$(0,1)$内非一致连续. 根据否定叙述. 存在正数 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$, 对任给的正数 δ,在$(0,1)$内总存在两点

$$x_1=\frac{1}{2n\pi},\ x_2=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}},n\text{ 为自然数.}$$

只要 $n>\frac{1}{4\sqrt{\delta}}$ 时,有

$$\left|\frac{1}{2n\pi}-\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right|=\frac{\frac{\pi}{2}}{2n\pi\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)}$$
$$<\frac{1}{8n^2\pi}<\frac{1}{16n^2}<\delta$$

但同时有

$$\left|f\left(\frac{1}{2n\pi}\right)-f\left(\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right)\right|=\left|\cos2n\pi-\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right|$$

$$=1>\frac{1}{2}=\varepsilon_0$$

即函数 $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ 在$(0,1)$内非一致连续.

一般地,对闭区间上连续的函数,我们有如下定理

定理 5 设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上一致连续.

证 采用反证法.假定函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续而非一致连续.则存在某个正数 ε_0,对任意给定的正数 δ,在$[a,b]$上总存在两点 x'及 x'',同时有$|x'-x''|<\delta$与$|f(x')-f(x'')|\geqslant\varepsilon_0$.由于 δ 是任意给定的正数,今取 $\delta=\frac{1}{n}$,$n=1,2,\cdots$,存在 $a\leqslant x_n'\leqslant b$,$a\leqslant x_n''\leqslant b$,同时有 $|x_n'-x_n''|<\frac{1}{n}$ 与

$$|f(x'_n)-f(x''_n)|\geqslant\varepsilon_0,n=1,2,\cdots$$

因此得到两个有界数列$\{x_n'\}$与$\{x_n''\}$.根据波尔察诺-维尔斯特拉斯定理,在有界数列$\{x_n'\}$中,存在收敛的子数列$\{x_{n_k}'\}$.设有 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}'=c$.对于充分大的 n_k,也有

$$|x_{n_k}'-x_{n_k}''|<\frac{1}{n_k}$$

当 $k\to\infty$时有 $\frac{1}{n_k}\to 0$,故有

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}'=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}''=c$$

由函数 $f(x)$的连续性知,$\lim\limits_{k\to\infty}|f(x_{n_k}')-f(x_{n_k}'')|=0$,这与 $\lim\limits_{k\to\infty}|f(x_{n_k}')-f(x_{n_k}'')|\geqslant\varepsilon_0>0$ 矛盾.从而定理 5 得证.

自然,从例 2、例 3 看出在开区间(a,b)内连续的函数未必在(a,b)内一致连续.

推论 设函数 $f(x)$在开区间(a,b)内连续,且 $f(a+0)$与 $f(b-0)$都存在,则函数 $f(x)$在(a,b)内一致连续.

复习思考题

1. 叙述函数 $f(x)$在点 x_0 连续的定义，并作出几何解释.

2. 设对于某些正数 ε，可找到对应的正数 $\delta(\varepsilon)$，使得只要 $|x-x_0|<\delta$，就有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 问可否断定 $f(x)$在点 x_0 连续？试考察两种情况：

(1) 诸数 ε 是有限个数；

(2) ε 是一串数 $\frac{1}{2^n}(n=1,2,\cdots)$.

3. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，是否 $f(x)$就在点 x_0 连续？

4. 画出下列各种间断情况的草图，并适当举例说明：

(1) $f(x_0+0)=f(x_0-0)\neq f(x_0)$

(2) $f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$

(3) $f(x_0+0)=+\infty$，$f(x_0-0)=f(x_0)$

(4) $f(x_0+0)=+\infty$，$f(x_0-0)=+\infty$

(5) $f(x_0+0)$不存在，$f(x_0-0)=f(x_0)$

5. 第一类间断点与第二类间断点有什么区别？第一类间断点就是可去间断点吗？

6. 试求下列函数的间断点，说明这些间断点属于哪一类，并分别写出函数的连续区间.

(1) $f(x)=\dfrac{4x}{(x-1)(x+2)}$　　(2) $f(x)=\ln\sin x$

(3) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$　　(4) $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$

(5) $f(x)=x\cos\dfrac{1}{x}$　　(6) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$

7. 设 $f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$的函数，又知

$$\lim_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0-h)]=0,\ x_0\in(-\infty,+\infty)$$

问 $f(x)$在 $x=x_0$ 处是否连续？为什么？

8. 设在点 $x=x_0$，函数 $f(x)$连续，而 $g(x)$不连续，则 $f(x)\pm g(x)$与 $f(x)\cdot g(x)$在点 x_0 的连续性如何？举出适当的例子. 又若 $f(x)$，$g(x)$在该点都不连续，情况又将如何？

9. 不连续函数平方以后是否仍是不连续函数？试举出一个处处不连续，但平方以后是处处连续的函数.

10. 闭区间上连续的函数有哪些重要性质？这些性质对开区间上的连续函数是否成立？试举例说明.

11. 叙述函数在区间$[a,b]$上一致连续的定义. 怎样的函数一定一致连续？一致连续的函数是否逐点连续？

12. 试用“ε-δ”语言写出函数 $f(x)$在$[a,b]$上非一致连续的定义.

习题 1.3

1. 用“ε-δ”的论证法. 证明函数 $f(x)=x^2$，在点 $x=3$ 处连续，并填下表：

ε	1	0.1	0.01	…
δ				

2. 用“ε-δ”的论证法. 证明下列函数在所指定的区间上连续：

(1) $f(x)=x^3$, $(-\infty,+\infty)$

(2) $f(x)=\sqrt{x}$, $[0,+\infty)$

3. 证明：若函数 $f(x)$连续，则$|f(x)|$必定连续，但反之不成立. 试举例说明.

4. 求下列函数 $y=f(x)$的间断点，并判别间断点的类型，若是可去间断点，则补充定义，使它在该点连续.

(1) $y=\dfrac{x+1}{x-2}$　　(2) $y=\dfrac{\sin 3x}{x}$

(3) $y=\sin x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$　　(4) $y=\dfrac{\mathrm{tg}\,2x}{x}$

(5) $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$　　(6) $y=\dfrac{1}{\ln|x|}$

(7) $y=1+\mathrm{arc\ tg}\,\dfrac{1}{x-a}$　　(8) $y=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

(9) $y=e^{\frac{1}{1-x}}$　　(10) $y=\cos\dfrac{1}{x}$

5. 研究下列函数在其定义域上的连续性：

(1) $y=\cos x$

(2) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+x)^2}, & x\neq -1\\ A, & x=-1\end{cases}$

(3) $y=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

(4) $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2\\ A, & x=2\end{cases}$

(5) $y=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$

(6) $y=\begin{cases}x, & \text{当 } |x|\leqslant 1\\ 1, & \text{当 } |x|>1\end{cases}$

(7) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}, & x\neq 1\\ A, & x=1\end{cases}$

(8) $y=\begin{cases}x\ln(x^2), & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$

(9) $y=\begin{cases}\sqrt{x^2+1}, & x\leqslant 0\\ \dfrac{\operatorname{arc\,tg}x}{x}, & 0<x\leqslant 1\\ \dfrac{\sqrt[4]{1+\pi(x-1)}-1}{x-1}, & x>1\end{cases}$

(10) $y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{e^x-1}, & x>0\\ a, & x=0\\ 1+e^{\frac{1}{x}}\sin\dfrac{1}{x}, & x<0\end{cases}$

6. 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0\\ a+x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 问怎样选择 a 才能使函数连续?

7. 证明:函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

在点 $x=0$ 处右连续,但不左连续.

8. 证明下列函数极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^x=e^{\alpha}$ (α 为任何实数)

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{x}=\alpha$ (α 为任何实数)

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha^x-1}{x}=\ln\alpha$ ($\alpha>0$)

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu$ （μ 为任何实数）

9. 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{n}$ (2) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n(a^{\frac{1}{n}}-1)$ (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin x}$

(5) $\lim\limits_{\alpha\to\beta}\dfrac{e^{\alpha}-e^{\beta}}{\alpha-\beta}$ (6) $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$

(7) $\lim\limits_{x\to 0^{+}}x^{\sin x}$ (8) $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$

(9) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\arcsin\sqrt{\ln x}}{\sin\left(\dfrac{\pi x}{2e}\right)}$ (10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}})$

10. 判别以下无穷小量关于 x 是几级的($x\to 0$)：

(1)$e^{\sin x}-1$ (2)$e^{x}-\cos x$ (3)$\ln(a+x)-\ln a$ ($a>0$).

11. 双曲函数是否为初等函数？证明下列恒等式(与三角函数比较)：

(1)$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1$

(2)$\operatorname{sh}2x=2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x$

(3)$\operatorname{ch}2x=\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x$

(4)$\operatorname{sh}(-x)=-\operatorname{sh}x$，$\operatorname{ch}(-x)=\operatorname{ch}x$

(5)$\operatorname{arc\,ch}x=\pm\ln(x+\sqrt{x^2-1})$. ($x\geqslant 1$)

(6)$\operatorname{arc\,th}x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$，($|x|<1$)

12. 试证：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为此区间中的任意值，则在 $[a,b]$ 中一定可找到一数值 ξ，使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]$$

13. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是区间 $[a,b]$ 中的 n 个点，又 $t_1>0,t_2>0,\cdots,t_n>0$，且 $t_1+t_2+\cdots+t_n=1$. 证明在 $[a,b]$ 中必有一点 ξ，使得

$$f(\xi)=t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\cdots+t_nf(x_n)$$

14. 利用连续函数的性质证明：

(1)方程 $x\cdot 2^{x}=1$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 内有根；

(2)任何一个奇次多项式 $p(x)$ 至少有一个实根；

(3)方程 $x=a\sin x+b$,其中 $a>0,b>0$ 至少有一个正根,且不超过 $a+b$.

(4)方程 $x-\sin(x+1)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有根.

15. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且值域就是 $[a,b]$,证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有一个不动点,即有一点 x_0,使 $f(x_0)=x_0$.

16. 设函数 $f(x),g(x)$ 是在区间 $[a,b]$ 上的两个连续函数,而且 $f(a)>g(a)$,$f(b)<g(b)$,试证:至少存在一点 x_0,$a<x_0<b$,使得 $f(x_0)=g(x_0)$.

17. 设函数 $f(x)$ 满足:

(1) $-\infty<a\leqslant f(x)\leqslant b<+\infty$, $(a\leqslant x\leqslant b)$

(2) $|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|$, $(0<k<1, x,y\in[a,b])$. 证明:(1)存在唯一的 x_0,使 $f(x_0)=x_0$;(2)设 $x_1\in[a,b]$,并定义数列 $\{x_n\}$:

$$x_{n+1}=f(x_n),\ n=1,2,\cdots$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

18. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续,又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在有限,证明 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

19. 证明:函数 $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2+x^4}$, $(-\infty<x<+\infty)$ 是有界的.

20. 证明:$y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

21. 证明:$y=\sqrt{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续.

22. 证明:$f(x)=\sin\dfrac{\pi}{x}$ 在 $(0,1)$ 内连续且有界,但非一致连续.

23. 证明:函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $(0,1)$ 上是一致连续的.

总 复 习 题

1. 证明:(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}$.

2. 证明:当 $a\neq 2k\pi$, $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时,数列 $\{\cos na\}$ 发散.

3. 已知数列 $\left\{S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right\}$ 收敛.求证:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)a_k=\lim_{n\to\infty}S_n.$$

4. 设(1)数列$\{y_n\}$严格增加，且无界；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=l$，则数列$\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=l$

5. 已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\dfrac{a}{2}$.

6. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$，$(|a|<1,|b|<1)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}2(\sqrt[3]{n-1}-\sqrt[3]{n})$　　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n})$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^3}{n^4}+\dfrac{2^3}{n^4}+\cdots+\dfrac{(n-1)^3}{n^4}\right)$

(提示：$1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3=[1+2+\cdots+(n-1)]^2$)

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}$，$\left(\text{提示：}\dfrac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\cdots(2n)}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\sin^2n+\cos^2n}$；　(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n-4}\right)^n$

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{5n}$　　(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^{a-1}+2^{a-1}+\cdots+n^{a-1}}{n^a}$ $(a>0)$

7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}1, & \text{当}\ |x|>1\\ 0, & \text{当}\ |x|=1\\ -1, & \text{当}\ |x|<1\end{cases}$，求证：$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$.

8. 判别下列数列的收敛性：

(1) $a_n=(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)$，其中 $0<x_n<1,n=1,2,\cdots$

(2) $a_n=\dfrac{10}{1}\cdot\dfrac{11}{3}\cdot\dfrac{12}{5}\cdots\dfrac{n+9}{2n-1}$

(3) $a_n=\dfrac{1}{1^2+1}+\dfrac{1}{2^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+1}$

(4) $a_n=\dfrac{a\cos2+b\sin2}{2(2+\sin2!)}+\dfrac{a\cos3+b\sin3}{3(3+\sin3!)}+\cdots+\dfrac{a\cos n+b\sin n}{n(n+\sin n!)}$

(5) $a_n=\sin\sin1+\sin\sin\dfrac{1}{2}+\cdots+\sin\sin\dfrac{1}{n}$

(6) $a_n=1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}$

9. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$（$p\neq 0$ 为常数）

10. 证明：设有数列$\{a_n\}$，且 $a_n>0, n=1,2,\cdots$，而

$$a_1+2a_2+\cdots+na_n=O(\sqrt{n})$$

则 $\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots a_n}=o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.（提示：应用几何平均小于算术平均）

11. 研究下列函数的连续性：

(1) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^n}$，$(x\geqslant 0)$　　(2) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$

(3) $y=\begin{cases} x\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

12. 证明：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^p}\right)^x=\begin{cases}1, & p>1\\ \mathrm{e}, & p=1\\ \infty, & p<1\end{cases}$

13. 证明：方程 $6x^2=2x^4+x+2$ 在区间$[-2,2]$内有四个根.

2 单变量函数的微分学

微商或导数的概念是变量的变化率在数学上的抽象，也是微分学一种重要运算，而微商的性质及其运算法则的理论就构成了整个微分学. 它将用于研究函数上升下降、极大极小等各种变化特性，以及函数值的计算或近似计算，本章将对单变量函数，即 $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ 讨论这些问题.

2.1 函数的微商

2.1.1 微商的概念

(一) 实例

1. 瞬时速度　在引进函数极限时，我们曾详细分析了瞬时速度的概念，若已知质点的运动规律为 $s=s(t)$. 要讨论它在时刻 t_0 的瞬时速度. 但它并非是一个孤立的概念，必须把它与已知的平均速度相联系，在 1.2.1 中已将运动质点在某一瞬时 t_0 的瞬时速度归结为计算：当 $t\to t_0$ 或 $\Delta t\to 0$ 时平均速度的极限，即

$$\lim_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}=v(t_0).$$

其中 $\Delta t=t-t_0$.

实际上，这种类型的极限不仅在计算运动质点的瞬时速度要遇到，而且在解决其它许多问题时也会出现.

2. 线密度　设有一条由某种物质做成的细杆 AB，且质量分布不均匀. 今以 x 记从杆的端面 A 到断面 M 处的长度，则 AM 这一段细杆的质量 m 是 x 的函数，即已知质量的分布为 $m=m(x)$.

怎样确定在断面 M 处细杆的线密度呢？同样，线密度也不是孤立的概念，它与已知的平均线密度相联. 在 M 的近旁取一个与它相邻的断面 N（图 2.1），并设这两个断面之间的细杆长为 Δx，则 MN 这段细杆的质量是

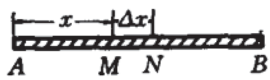


图 2.1

$$m(x+\Delta x)-m(x)$$

故平均线密度就是比值

$$\frac{m(x+\Delta x)-m(x)}{\Delta x}$$

它也表示细杆在 MN 段上单位长度的质量. 但它是随 Δx 的变化而变化的，当 $|\Delta x|$ 很小时，由于细杆的质量分布在 MN 段上还来不及发生很大变化，所以在 MN 段上的平均线密度就是 x 处的线密度的近似值. $|\Delta x|$ 越小两种线密度的差别也越小. 于是细杆在 M 处的线密度就是平均线密度的极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{m(x+\Delta x)-m(x)}{\Delta x}=\rho(x)$$

此外，如非恒稳的电流强度、化学反应速度、生物群体的繁殖速度等问题，最后都归结为求上述形式的极限.

（二）微商的定义

前面举出的一些实例，虽然是来自完全不同的实际问题，但解决的方法都完全一样，都归结为计算同一类型的极限. 由于这种类型的极限表示了自然界中许多不同质的现象在量方面的共性，因此有必要把它从许多不同的具体问题中抽象出来加以研究，找出其计算方法、揭示其各种性质. 从而不仅解决了上面所叙述的那些实际问题，而且开辟了研究运动变化过程的一种新的途径与方法，并在各个领域中获得广泛的应用.

定义 1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义. 若极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在且有限，就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微，并称此极限为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的导数或微商，记为

$$f'(x_0), y'\Big|_{x=x_0} \quad 或 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}, \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$$

以下利用改变量来描述导数，有时也是方便的.

设差 $\Delta x=x-x_0$ 是自变量的改变量，而差

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

是函数 $f(x)$ 在点 x_0 的相应改变量，则比值

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

称为 $f(x)$ 在点 x_0 的平均变化率. 于是微商就是当自变量的改变量 Δx 趋向于零时，平均变化率的极限，则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

故函数 $f(x)$ 在点 x_0 的微商又称为 $f(x)$ 在点 x_0 的变化率.

若当 Δx 趋于零时，平均变化率的极限不存在，称函数 $f(x)$ 在点 x_0 不可微或微商不存在.

由定义知，作直线运动的质点在时刻 t_0 的瞬时速度是路程 $s=s(t)$ 对时间 t 的微商在时刻 t_0 的值，即

$$v(t)\Big|_{t=t_0} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0}$$

或简单的说成速度等于路程对时间的微商 $s'(t)$，同样，非均匀细杆的线密度等于质量对长度的微商 $m'(x)$.

另外，与函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的左、右极限类似，还可以定义函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的左、右微商.

定义 2 若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ 和 } \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

都存在且有限，则分别称它们为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左微商和右微商，并称函数 $f(x)$ 在点 x_0 左可微和右可微，记为 $f'_-(x_0)$ 和

$f'_+(x_0)$.

根据左、右极限与极限的关系，可知函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微的充分必要条件是函数在点 x_0 左右微商都存在且相等，即有

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

（三）微商的几何意义

微商这一概念除了前面已指出的物理意义之外，还有直观的几何意义.

设已给平面曲线 C 及其上一点 P_0. 首先来建立曲线在点 P_0 的切线的概念. 为此，在点 P_0 的近旁曲线 C 上任取一点 P 连接点 P_0 与 P 的直线是这条曲线的一条割线 l. 则当动点 P 沿曲线 C 无限地接近于给定点 P_0 时，割线 l 的极限位置 l_0 就称为曲线 C 在点 P_0 的切线(图 2.2).

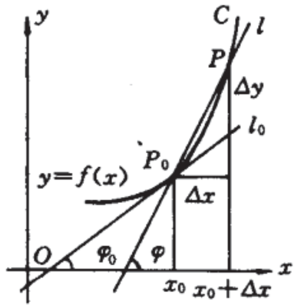


图 2.2

若曲线 C 的方程为 $y=f(x)$，点 P_0 及 P 的坐标分别为 $(x_0, f(x_0))$ 与 $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$，则割线 l 的斜率为

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

故当 $\Delta x \to 0$ 时，这比值的极限就给出了切线 l_0 的斜率

$$\mathrm{tg}\varphi_0 = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

由此可见，函数 $f(x)$ 在点 x_0 的微商就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率.

根据平面解析几何中关于直线的点斜式方程，就可得到曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y-y_0 = f'(x_0)(x-x_0)$$

其中　$y_0=f(x_0)$.

（四）函数可微与连续的关系

定理 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微，则函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续.

证 设在点 x_0 处自变量的改变量为 Δx，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的相应改变量

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微，即 $f'(x_0)$ 存在并有限. 于是

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\\ &= f'(x_0)\cdot 0=0\end{aligned}$$

故函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续.

但是，这个定理的逆命题不成立，即从函数在某点的连续性并不能断言它在这点可微.

例如函数 $y=|x|$，它在点 $x=0$ 是连续的，但它在点 $x=0$ 不可微.

实际上，若在点 $x=0$ 自变量的改变量是 Δx，分别有

当 $\Delta x>0$ 时，$\Delta y=f(\Delta x)-f(0)=|\Delta x|=\Delta x$，故 $f'_+(0)=1$；

当 $\Delta x<0$ 时，$\Delta y=f(\Delta x)-f(0)=|\Delta x|=-\Delta x$，故 $f'_-(0)=-1$. 于是 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$，故函数 $f(x)=|x|$ 在点 $x=0$ 是不可微的.

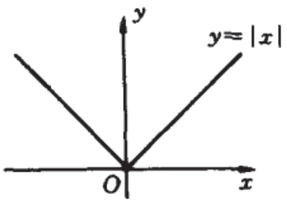


图 2.3

从图 2.3 更可直观地看出. 这个函数的图形在点 $x=0$ 没有切线.

定义 3 若函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b)（a 与 b 可为有限或无穷）内每一点都可微，则称这函数是区间 (a,b) 内的可微函数.

这时对区间 (a,b) 内的任意一点 x，都有微商值

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

与之对应. 由此确定的新函数就称为函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的导函数.

比较导数

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

与导函数

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

不难看出，它们的构造完全一样，只不过 $f'(x_0)$ 是把 $f'(x)$ 中的 x 换成 x_0 而已，即只要在导函数中令 $x=x_0$，便得到导数，这说明 $f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}$. 因此，导数 $f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 处的函数值，今后，当说求某函数的导数或微商时，若无特别声明，都指求其所有可微点处的导数，故不再标明 x_0，而是用 x 来表示任意固定的点.

2.1.2 简单函数的微商

在叙述了一般函数的微商概念之后，今开始着手计算某些具体函数的微商. 根据微商的定义计算函数 $f(x)$ 在点 x 的微商 $f'(x)$ 可按下列步骤进行. 若用 Δx 表示自变量 x 的改变量，应先求函数 $y=f(x)$ 相应的改变量 Δy，计算比值

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

求极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$.

（一）常数的微商

设　$y=c$（常数），$x\in(-\infty,+\infty)$.

$\Delta y=c-c=0$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0}{\Delta x}=0$，$\Delta x\neq 0$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$$

即常数的微商等于零或$(c)'=0$.

(二) 幂函数的微商

设　$y=x^n$,其中 n 是自然数. $x\in(0,+\infty)$

$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n$$

$$=nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+(\Delta x)^n$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x+\cdots+(\Delta x)^{n-1},\Delta x\neq 0$$

这个等式右端从第二项起的以后各项都含有因子 Δx,故当 $\Delta x\to 0$ 时,这些项都趋于零,故有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}$$

即

$$(x^n)'=nx^{n-1}$$

稍后,将证明幂函数的这个微商公式对任意的幂指数也是正确的,即有

$$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}\quad(\mu\text{ 为实数})$$

因此幂函数 x^μ 的微商等于它的幂指数 μ 乘以幂函数 $x^{\mu-1}$.

(三) 正、余弦函数的微商

设 $y=\sin x$, $x\in(-\infty,+\infty)$

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}},\quad \Delta x\neq 0$$

由 $\cos x$ 的连续性,有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x$, 以及

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$$

故有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x$$

即正弦函数的微商是余弦函数或 $(\sin x)'=\cos x$.

同理可得余弦函数的微商是负的正弦函数，或

$$(\cos x)'=-\sin x \qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

（四）对数函数的微商

设 $y=\log_a x \quad (a>0, a\neq 1)$，$x\in(0,+\infty)$

$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}, \qquad \Delta x\neq 0$$

由于 $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\mathrm{e}$，以及对数函数的连续性，因此有

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\\&=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\frac{\Delta x}{x}}}\\&=\frac{1}{x}\log_a\mathrm{e}\end{aligned}$$

因为 $\log_a\mathrm{e}=\dfrac{1}{\ln a}$，则有

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a},\ x\in(0,+\infty)$$

特别，当 $a=\mathrm{e}$ 时，有

$$(\ln x)'=\frac{1}{x} \qquad x\in(0,+\infty).$$

即自然对数 $\ln x$ 的微商等于自变量的倒数 $\dfrac{1}{x}$. 由于在一切对数的微商中，这个公式具有最简单的形式，因此在进行理论研究时采用

自然对数将会带来许多方便.

2.1.3 微商的运算法则

直接利用定义只能求出一些简单函数的微商,对于更多的函数来说是相当复杂的,甚至是不可能的,因此必须建立一些微商的运算法则和基本公式,通过它们就可以把一些较复杂的函数微商化成较简单函数的微商来计算.

定理 1 若函数 $u(x)$ 在点 x 可微,则对任意常数 c,函数 $cu(x)$ 在点 x 也可微,且 $[cu(x)]'=cu'(x)$. 即常数可以提到微商符号之外.

证 设 $y=cu(x)$ 有

$$\Delta y = cu(x+\Delta x) - cu(x) = c\Delta u$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = c\frac{\Delta u}{\Delta x}, \qquad \Delta x \neq 0$$

故有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = c\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = cu'(x)$$

定理 2 若函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 在点 x 都可微,则函数 $u(x)\pm v(x)$ 在点 x 也可微,且

$$[u(x)\pm v(x)]' = u'(x)\pm v'(x)$$

即两个函数代数和的微商等于它们微商的代数和

证 设 $y=u(x)\pm v(x)$, 有

$$\begin{aligned}\Delta y &= [u(x+\Delta x)\pm v(x+\Delta x)]-[u(x)\pm v(x)]\\ &= [u(x+\Delta x)-u(x)]\pm[v(x+\Delta x)-v(x)]\\ &= \Delta u\pm\Delta v\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\frac{\Delta v}{\Delta x},\ \Delta x\neq 0$$

故有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x)\pm v'(x)$$

定理 2 可推广到任意有限个函数代数和的情形.

定理 3 若函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 在点 x 都可微，则函数 $u(x)\cdot v(x)$ 在点 x 也可微，且

$$[u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

即两个函数乘积的微商等于每个函数的微商乘上其它一个函数后再相加.

证 设 $y=u(x)\cdot v(x)$，有

$$\begin{aligned}\Delta y &= u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)\\ &= u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x+\Delta x)\\ &\quad + u(x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)\\ &= \Delta u v(x+\Delta x) + u(x)\Delta v\end{aligned}$$

故有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}v(x+\Delta x) + u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x},\quad \Delta x \neq 0$$

因为 $v(x)$ 在点 x 可微，所以在点 x 连续，则有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x) = v(x)$. 从而得到

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x) + u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\\ &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\end{aligned}$$

定理 3 可推广到任意有限个函数乘积的情形. 即 n 个可微函数乘积的微商等于一个 n 项和，其中每一项都是一个函数的微商乘其它 $n-1$ 个函数.

定理 4 若函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 在点 x 都可微，且 $v(x)\neq 0$，则函数 $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ 在点 x 也可微，且

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

即两个函数商的微商等于分子的微商乘分母减去分母的微商乘分子，然后除以分母的平方.

证 设 $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$

$$\Delta y=\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{v(x)v(x+\Delta x)}$$

$$=\frac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x)+u(x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{v(x)v(x+\Delta x)}$$

$$=\frac{\Delta u v(x)-u\Delta v}{v(x)v(x+\Delta x)}$$

故有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v(x)-u(x)\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x)v(x+\Delta x)},\ \Delta x\neq 0$$

由函数 $v(x)$的连续性，得到

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v(x)-u(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)}$$

$$=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

特别，当 $u(x)=1$ 时，有

$$\left[\frac{1}{v(x)}\right]'=-\frac{v'(x)}{v^2(x)}$$

例 1 求 $y=\mathrm{tg}x$ 与 $y=\mathrm{ctg}x$ 的微商.

解 因为 $y=\mathrm{tg}x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，利用商的微商公式，得到

$$y'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos)'}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

同样

$$(\mathrm{ctg}x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=-\csc^2 x$$

例 2 求函数 $y=\sec x$ 与 $y=\csc x$ 的微商.

解 利用商的微商的特殊情形，有

$$(\sec x)'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\mathrm{tg}x\sec x$$

与

$$(\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x \csc x$$

例 3 设 $y = \log_a x \cdot \sin x - \dfrac{\cos x - 1}{\cos x + 1}$,求 y'.

解 由微商的运算法则及简单函数的微商公式,有

$$\begin{aligned} y' &= (\log_a x \cdot \sin x)' - \left(\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right)' \\ &= (\log_a x)' \sin x + \log_a x (\sin x)' \\ &\quad - \frac{(\cos x - 1)'(\cos x + 1) - (\cos x - 1)(\cos x + 1)'}{(\cos x + 1)^2} \\ &= \frac{\sin x}{x \ln a} + \log_a x \cos x - \frac{-\sin x(\cos x + 1) + (\cos x - 1)\sin x}{(\cos x + 1)^2} \\ &= \frac{\sin x}{x \ln a} + \log_a x \cdot \cos x + \frac{2\sin x}{(\cos x + 1)^2} \end{aligned}$$

2.1.4 反函数的微商

为了求出反三角函数与指数函数的微商,先来导出反函数微商的一般公式.

定理 设严格增(或严格减)函数 $y = f(x)$ 在某一区间内可微,且 $f'(x) \neq 0$,则其反函数 $x = g(y)$ 在对应的区间内也可微,且

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$$

即反函数的微商等于原来函数微商的倒数.

证 设 $y = f(x)$ 是严格增连续函数,故其反函数 $g(y)$ 亦是严格增的连续函数.因此,若令

$$\Delta x = g(y + \Delta y) - g(y)$$

则当 Δy 趋于零时,Δx 亦趋于零.当 Δy 不等于零时,亦有 Δx 不等于零.于是

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

故有

$$g'(y)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

由于 $f'(x)\neq 0$,故由商的极限法则可知,反函数 $g(y)$是可微的,且有

$$g'(y)=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x)}$$

其几何意义是曲线 $x=g(y)$在点(x,y)的切线,关于 y 轴正向的斜率.

例 1 求反三角函数的微商

解 因为 $y=\arcsin x$ 是 $x=\sin y$ 的反函数,由于函数 $x=\sin y$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是严格增的与可微的,且

$$(\sin y)'=\cos y>0$$

于是在对应区间$-1<x<1$ 内,有

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

同样可以得到

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1<x<1$$

又因为函数 $y=\operatorname{arctg}x$ 是函数 $x=\operatorname{tg}y$ 的反函数,它在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是严格增与可微的,且

$$(\operatorname{tg}y)'=\sec^2 y\neq 0$$

于是在对应区间$-\infty<x<+\infty$内,有

$$(\operatorname{arctg}x)'=\frac{1}{(\operatorname{tg}y)'}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

同样可得

$$(\operatorname{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}, -\infty < x < +\infty$$

例 2 求指数函数 $y=a^x$,$(a>0,a\neq 1)$的微商.

解 指数函数 $y=a^x$ 是对数函数 $x=\log_a y$ 的反函数,由于函数 $x=\log_a y$ 在区间 $0<y<+\infty$内严格增,可微,且

$$(\log_a y)' = \frac{1}{y\ln a} \neq 0$$

于是在对应的区间$-\infty<x<+\infty$内,有

$$(a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = y\ln a = a^x\ln a$$

即指数函数 a^x 的微商等于这个函数乘以 $\ln a$.

特别,当 $a=\mathrm{e}$ 时,有

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x, \qquad -\infty < x < +\infty$$

这就是说,以 e 为底的指数函数 e^x 的微商等于它本身. 这是指数函数 e^x 的一个重要的性质.

2.1.5 复合函数的微商

复合函数就是由一些简单函数通过“复合”运算而成的函数. 因此复合函数的微商与构成它的简单函数的微商之间应该有某种确定的关系,这种关系很好的表现在下面的微商法则中.

定理 设函数 $u=\varphi(x)$在点 x 可微,而函数 $y=f(u)$在相应的点 $u=\varphi(x)$可微,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在点 x 可微,且

$$y' = [f(\varphi(x))]' = f'(u)\varphi'(x) = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

证 设自变量在点 x 取得改变量 Δx,则中间变量 $u=\varphi(x)$取得相应的改变量 $\Delta u=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)$. 再由函数 $y=f(u)$知,y 获得改变量 $\Delta y=f(u+\Delta u)-f(u)$. 已知函数 $y=f(u)$在点 u 可

微，即当 $\Delta u\neq 0$ 时，有

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)$$

或

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)+o(1)$$

其中 $\lim\limits_{\Delta u\to 0}o(1)=0$，于是，得到

$$\Delta y=f'(u)\Delta u+o(\Delta u)$$

其中 $\Delta u\cdot o(1)=o(\Delta u)$. 当 $\Delta u=0$ * 时，显然有

$$\Delta y=f(u+\Delta u)-f(u)=0$$

为此，令

$$\alpha(\Delta u)=\begin{cases}o(1), & 当\ \Delta u\neq 0,\\ 0\quad, & 当\ \Delta u=0\end{cases}$$

且有 $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha(\Delta u)=0$，故总有

$$\Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha(\Delta u)\cdot\Delta u$$

或

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

因为 $u=\varphi(x)$ 在点 x 可微，所以它在点 x 亦连续，即当 Δx 趋于零时，必有 Δu 趋于零，亦有 $\alpha(\Delta u)$ 趋于零，而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=\varphi'(x)$. 从而得到

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\varphi'(x)$$

由此定理可知复合函数对自变量的微商等于函数对中间变量

---

* 例如，对于函数 $u(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处，$\Delta u=\sin\dfrac{1}{\Delta x}$，易见，当 $\Delta x=\dfrac{1}{n\pi}\neq 0, n=\pm 1,\pm 2,\cdots$ 时，便有 $\Delta u=0$.

的微商乘以中间变量对自变量的微商. 这个微商法则在微商的运算中极为重要. 它有效地把复杂函数的微商运算转化为对简单函数去施行.

可将这个法则推广到任意有限个函数构成的复合函数的情形.

例如,若 $y=f(u)$,$u=\varphi(v)$,$v=\psi(x)$都可微,则有

$$y'=f'(u)\varphi'(v)\psi'(x)$$

或

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

例 1 求函数 $y=\sin(x^3)$的微商.

解 设中间变量 $u=x^3$,可把函数 $y=\sin(x^3)$看成由 $y=\sin u$,$u=x^3$ 复合而成,故由复合函数的微商法则,得

$$y'=(\sin u)'(x^3)'=3x^2\cos(x^3)$$

例 2 求 $y=\ln\mathrm{tg}x$ 的微商.

解 设 $y=\ln u$,$u=\mathrm{tg}x$,则有

$$y'=(\ln u)'(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{u}\sec^2x=\frac{1}{\mathrm{tg}x}\sec^2x=\sec x\csc x$$

例 3 求 $y=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3$ 的微商.

解 设 $y=u^3$,$u=\frac{1+x}{1-x}$,则有

$$y'=(u^3)'\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'=3u^2\cdot\frac{1\cdot(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}$$

$$=3\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2\frac{2}{(1-x)^2}=\frac{6(1+x)^2}{(1-x)^4}$$

计算比较熟练后,可以不明显写出中间变量,只要暗暗记住就行了.

例 4 设 $y=\sin^5(x+x^2)$,求 y'

解 $y'=[\sin^5(x+x^2)]'=5\sin^4(x+x^2)[\sin(x+x^2)]'$

$$= 5\sin^4(x+x^2)\cos(x+x^2)(x+x^2)'$$
$$= 5(1+2x)\sin^4(x+x^2)\cos(x+x^2)$$

作为复合函数微商法则的一个重要应用,我们来证明一般的幂函数的微商公式.

例 5 求函数 $y = x^\mu$(μ 为任意的实数)的微商.($0 < x < +\infty$).

解 将 $y=x^\mu$ 改写为

$$y = e^{\mu\ln x}$$

应用复合函数的微商法则,得到

$$y' = e^{\mu\ln x}(\mu\ln x)' = e^{\mu\ln x} \cdot \frac{\mu}{x}$$
$$= \mu x^\mu \cdot \frac{1}{x} = \mu x^{\mu-1}$$

即

$$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$$

将这里采用方法与在 2.1.2 中对幂指数为自然数情形的证明方法相比较,显然简单多了.

2.1.6 参数方程所表示的函数的微商

设有映射 $f:R\to R^2$,其中 R^2 表示平面.这时由平面解析几何学知,方程组

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha,\beta] \subset R$$

一般表示平面上的一条曲线,它们称为这条曲线的参数方程,今讨论 $\frac{dy}{dx}$ 的求法,若从中消去参数 t,则变量 y 就确定为变量 x 的函数.但是有些参数方程消去参数 t 是困难的,或消去 t 后得到的 x 与 y 的关系式是非常复杂的.因此需要讨论直接由参数方程求出它所确定的函数的微商.现在要利用复合函数的微商法则导出微

商 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的计算公式.

定理 设函数 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 在 t 的变化区间内可微. 函数 $\varphi(t)$ 具有单值连续的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$, 且 $\varphi'(t)\neq 0$, 则函数 $y=\psi[\varphi^{-1}(x)]$ 可微, 且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

证 由假设知 $\varphi'(t)\neq 0$, 故反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$ 的微商存在, 且有

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\varphi'(t)}$$

另外, 若将 $t=\varphi^{-1}(x)$ 代入到 $\psi(t)$ 中, 即得到自变量为 x 的复合函数

$$y=\psi(\varphi^{-1}(x))$$

应用复合函数的微商法则, 得到

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\psi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

因此要计算由参数方程所表示的函数的微商时, 不必重新建立 y 对于 x 的直接关系式, 而只需求出这些变量对于参数 t 的微商之比.

利用这个微商公式, 就容易给出由上述参数方程所表示的曲线的切线方程. 今在曲线上任意取定一点. 设它所对应的参数值为 t_0, 即该点的坐标为 $x_0=\varphi(t_0)$, $y_0=\psi(t_0)$. 于是曲线在这点的切线的斜率为

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=t_0}=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$$

故切线方程为

$$y-y_0=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}(x-x_0)$$

或写成

$$\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}$$

过曲线上一点并与曲线在这点的切线相垂直的直线方程称为曲线在该点的法线，则上述曲线在点(x_0,y_0)的法线方程为

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)=0$$

例 1 设椭圆的参数方程为 $x=a\cos t, y=b\sin t$，试求它在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处的切线与法线方程.

解 因为当 $t=\frac{\pi}{4}$ 时，椭圆上的对应点为

$$\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right),$$

而

$$\varphi'(t)\big|_{t=\frac{\pi}{4}}=-a\sin t\big|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\psi'(t)\big|_{t=\frac{\pi}{4}}=a\cos t\big|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{b}{\sqrt{2}}$$

于是椭圆在点 $\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 的切线方程为

$$\frac{x-\frac{a}{\sqrt{2}}}{-\frac{a}{\sqrt{2}}}=\frac{y-\frac{b}{\sqrt{2}}}{\frac{b}{\sqrt{2}}}$$

或

$$bx+ay=\sqrt{2}ab$$

而法线方程为

$$-\frac{a}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)+\frac{b}{\sqrt{2}}\left(y-\frac{b}{\sqrt{2}}\right)=0$$

即

$$ax-by=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{2}}$$

2.1.7 分段函数在分段点的微商

一般都用定义来计算分段函数在分段点的微商. 在什么条件下,可用对不同区间上的函数求微商来计算. 由函数在一点可微的条件可得如下结果:

定理 设分段函数 $f(x)$在分段点 x_0 的 δ 邻域内连续,在 x_0 去心 δ 邻域内可微,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$存在,则 $f(x)$在 x_0 可微,并有 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$.

证 按假设,有 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)=f'_-(x_0)$与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)=f'_+(x_0)$,且 $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$,故有$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=f'(x_0)$.

注意 定理的条件仅是充分的. 若 $f(x)$在 x_0 处不连续;或者 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)$及 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$都存在但不相等;或者 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$之一为$\infty$,则可不直接判定 $f(x)$在 x_0 处不可微,但当 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$之一不存在时,此定理失效. 只好用定义计算 $f'(x_0)$.

例 研究下列函数在 $x=0$ 的可微性:

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

解 (1) $f(x)$在 $x=0$ 连续,当 $x\neq 0$ 时,$f'(x)=2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}$. 因$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$不存在. 故应按定义计算,且有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\dfrac{1}{x}}{x}=0.$$

(2) 当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\dfrac{-1}{1+x^2}$，且 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=-1$. 但 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 不连续. 从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可微. 因 $f'(x)$ 在分段点的极限是否存在与 $f'(x)$ 在分段点有没有定义是无关的.

2.1.8 微商公式表，例

到此为止，我们已建立了微商的四则运算法则、反函数与复合函数的微商公式，同时还把全部基本初等函数的微商都推导出来了. 为方便读者查阅，再把这些运算法则及微商公式列成下表，并请读者牢牢记住它们，对基本初等函数的微商公式要能倒背如流.

（一）微商运算的基本法则

1. $[cu(x)]'=cu'(x)$

2. $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$

3. $[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

4. $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)}, v(x)\neq 0.$

5. $f[\varphi(x)]'=f'[\varphi(x)]\varphi'(x)$

6. 设 $y=f(x)$ 有可微的反函数 $x=g(y)$，且 $f'(x)\neq 0$，则

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

7. 设 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，且 $\varphi'(t)\neq 0$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

（二）基本初等函数的微商公式

1. $(c)'=0$

2. $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}\ (0<x)$

3. $(\sin x)'=\cos x$

4. $(\cos x)'=-\sin x$

5. $(\mathrm{tg}x)'=\sec^2 x$

6. $(\mathrm{ctg}x)'=-\csc^2 x$

7. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (|x|<1)$

8. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|<1)$

9. $(\text{arctg}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

10. $(\text{arcctg}x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

11. $(\log_a|x|)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ $(x\neq 0)$

12. $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$

13. $(a^x)'=a^x\ln a$

14. $(e^x)'=e^x$

（三）例

这里再举一些利用已经得到的运算法则及微商公式的例子.

例 1 求 $y=x^x$ $(x>0)$的微商.

解 这个函数既不是指数函数又不是幂函数，称为幂指函数. 对于它没有现成的公式可利用. 但若先取对数，再利用对数性质转换成已有的公式，即可把它写成指数的形式

$$y=x^x=e^{x\ln x}$$

于是，有

$$y'=e^{x\ln x}\left(\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=x^x(\ln x+1)$$

这类幂指函数的更一般的形式为

$$y=u(x)^{v(x)}\qquad(u(x)>0)$$

应用例 1 的方法便可求出它的微商. 事实上，有

$$\begin{aligned}y'&=[u(x)^{v(x)}]'=(e^{v\ln u})'\\&=e^{v\ln u}\left(v'\ln u+v\cdot\frac{u'}{u}\right)\\&=u^v\left(v'\ln u+\frac{vu'}{u}\right)\end{aligned}$$

例 2 设 $y=x^{a^x}$，求 y'，其中 $x>0$，a 是大于零的常数.

解 将它化成复合函数的形式

$$y=x^{a^x}=e^{a^x\ln x}$$

则有

$$y'=e^{a^x\ln x}\left(a^x\ln a\ln x+\frac{a^x}{x}\right)=a^x x^{a^x}\left(\ln a\ln x+\frac{1}{x}\right)$$

例 3 设 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

例 4 已知 $r=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\varphi}{1-\varphi^2}$，求$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}$

解 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\left(\frac{2\varphi}{1-\varphi^2}\right)^2}\cdot\frac{2(1-\varphi^2)+4\varphi^2}{(1-\varphi^2)^2}$

$$=\frac{1}{1+\varphi^2}$$

例 5 证明不论 x 是大于零或小于零，总有

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$$

证 当 $x>0$ 时，$\ln|x|=\ln x$，故这个公式显然成立；

当 $x<0$ 时，由于 $\ln|x|=\ln(-x)$是一个复合函数，故有

$$(\ln|x|)'=(\ln(-x))'=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}$$

一般地，当 $f(x)$可微，且 $f(x)\neq 0$ 时，有

$$[\ln|f(x)|]'=\frac{1}{f(x)}f'(x)$$

例 6 已知 $A=\mathrm{e}^{\sin^2\frac{1}{\lambda}}$，求 $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\lambda}$.

解 $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\lambda}=\mathrm{e}^{\sin^2\frac{1}{\lambda}}\cdot 2\sin\frac{1}{\lambda}\cos\frac{1}{\lambda}\left(-\frac{1}{\lambda^2}\right)$

$$=-\frac{1}{\lambda^2}\mathrm{e}^{\sin^2\frac{1}{\lambda}}\sin\frac{2}{\lambda}$$

例 7 求函数 $y=\sqrt[3]{\frac{(x-1)(x-2)^2}{(x-3)(x-4)^2}}$ 的微商.

解 首先将函数的两端取绝对值，有

$$|y|=\sqrt[3]{\frac{|x-1||x-2|^2}{|x-3||x-4|^2}}$$

在等式两端取对数得

$$\ln|y| = \frac{1}{3}(\ln|x-1| + 2\ln|x-2| - \ln|x-3| - 2\ln|x-4|)$$

微商这个等式的两端，并注意到 y 是 x 的函数，应用例 5，有

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x-4}\right)$$

从而得到

$$y' = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x-4}\right)\cdot \sqrt[3]{\frac{(x-1)(x-2)^2}{(x-3)(x-4)^2}}$$

微商运算是微积分学中最重要的运算之一. 根据前面所列举的那些运算法则，对初等函数求微商的问题已得到比较完满的解决.

另外，微商的应用也是比较广泛的，今后还要着重介绍. 这里仅讲它在解决关于切线与相关变化率问题中的简单应用.

作为微商的几何意义的一个应用，我们来说明探照灯为什么能把灯泡发出的光线变成平行光束.

例 8 一探照灯的反光镜是一个旋转抛物面(图 2.4). 它是由抛物线绕其对称轴旋转而成的. 设灯泡放置于抛物线的焦点，试证明：从焦点发出的光线，经镜面反射后，必为平行于镜面对称轴的光线.

证 取坐标系如图 2.5. 设抛物线方程为 $y^2=2px\ (p>0)$. 它的焦点是 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$. 今有从焦点发出的任意一条光线，射至镜面上的点 $A(x_0,y_0)$，经反射后沿直线 AA_1 射出，参看图 2.5. 若过点 A 作抛物线的切线 L，并把它与 x 轴的交点记为 B. 则由光学中入射角等于反射角的原理，故有 $\angle\beta=\angle\beta_1$，因此欲证光线 AA_1 与 x 轴平行，只须证明 $\angle\alpha=\angle\beta$，亦即 $AF=BF$. 因为切线 L 的斜率为

$$y'\big|_{x=x_0} = (\sqrt{2px})'\big|_{x=x_0} = \frac{p}{\sqrt{2px_0}} = \frac{p}{y_0}$$

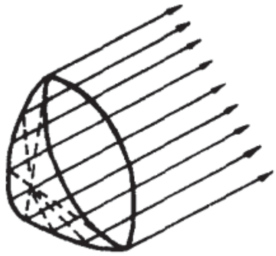


图 2.4

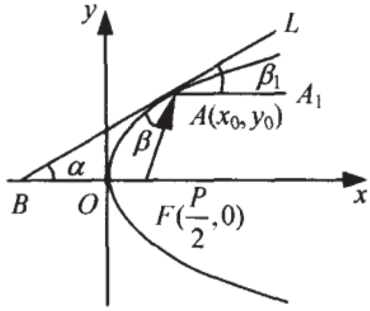


图 2.5

所以过点 $A(x_0,y_0)$ 的切线方程为

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0)$$

当 $y=0$ 时,得到切线与 x 轴的交点 B 的坐标为 $(-x_0,0)$. 故有

$$BF = x_0 + \frac{p}{2}$$

而

$$AF = \sqrt{\left(x_0 - \frac{p}{2}\right)^2 + y_0{}^2} = x_0 + \frac{p}{2}$$

于是得到

$$AF = BF$$

这就证明了反射线与 x 轴平行.

最后讨论相关变化率问题.

例 9 已知一气球的半径以每秒 10 厘米的速度增长着,求当半径为 10 厘米时,气球的体积和表面积的增长速度.

解 设在时刻 t 时,气球的半径为 $r=r(t)$,则气球的体积与表面积分别为

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3(t) \qquad\qquad S = 4\pi r^2(t)$$

易见，体积 V、表面积 S、半径 r 都是时间 t 的函数. 今问当 $r=10$ 厘米时，$V'(t)=?$，$S'(t)=?$

因为 $V(t)$、$S(t)$ 及 $r(t)$ 都是未知的，无法直接求出这些函数关于 t 的微商，所以只能从已知的公式出发考虑问题. 从而得到体积对时间的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=4\pi r^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

从题设可知，$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=10$ 厘米/秒，故有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=40\pi r^2$$

当半径 $r=10$ 厘米时，体积的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=40\pi\cdot10^2=4000\pi \text{ 立方厘米 / 秒}$$

同样可以算出这时表面积的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=800\pi \text{ 平方厘米 / 秒}$$

它们分别是气球的体积与表面积的增长速度. 这里 r 是中间变量，通常称为相关变量. V 与 r 及 S 与 r 的关系式称为相关方程. 这种利用相关变量的变化率去求未知函数的变化率的问题，就叫做相关变化率问题. 在实际应用中，求相关变化率的问题是不少的，下面请再看一例.

例 10 有一底半径为 R 厘米，高为 h 厘米的正圆锥容器. 今以每秒 A 立方厘米的速度自顶部向容器内注水. 试求当容器内水位等于锥高的一半时，水面上升的速度.

解 设在时刻 t 时，容器内水面高度为 $x=x(t)$. 今问当 $x=\frac{1}{2}h$ 时，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=?$ 易见，要直接写出函数 $x=x(t)$ 是困难的. 不过，可以写出 x 与在时刻 t 圆锥容器内水的体积 V 之间的关系式.

我们知道，水面所以升高是由于顶部有水注入，因此容器内水

量增加的速度与注水的速度相等，亦为A立方厘米/秒；另外，水量增加的速度又可如下计算：

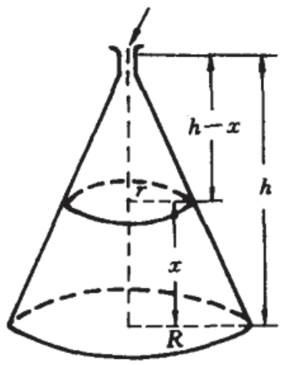


图 2.6

由于容器内的水体形成一个高为x，下底半径为R，上底半径为$r=\frac{h-x}{h}R$的截锥(图2.6). 故其体积为

$$V=\frac{\pi R^2}{3h^2}[h^3-(h-x)^3],$$

这即是x与相关变量V之间的一个相关方程. 这里之所以选择V为相关变量，是因为已知$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=A$立方厘米/秒.

在相关方程的两端对t求微商，由复合函数的微商法则知

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\pi R^2}{h^2}(h-x)^2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

故有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{Ah^2}{\pi R^2(h-x)^2}$$

当$x=\frac{h}{2}$时，就得到

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{4A}{\pi R^2}$$

从前面结果可以看出，当x越大时，由于$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$的分母越小，故$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$也越大；而当$x$越小时，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$也越小. 这说明水面较高时上升得快，水面较低时上升得慢. 这与实际经验是完全一致的.

复习思考题

1. 微商概念是由哪些具体问题引入的？它有什么几何意义？

2. 曲线的切线是怎样定义的？如何计算曲线上某点切线的斜率？

3. 函数在某点的连续性和可微性间的关系怎样？两者是否等价？试举例说明之.

4. 设函数 $f(x)$在 $x=0$ 有微商，且 $f(0)=0$，问 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 为何？

5. 设函数 $f(x)$在点 x_0 可微，问 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]$ 为何？

6. 若在区间$[a,b]$上有不等式：$f(x)\geqslant g(x)$，是否由此可导出 $f'(x)\geqslant g'(x)$?举例说明之.

7. (1)若函数 $f(x)$在点 x_0 可微，而函数 $g(x)$在点 x_0 不可微，那么它们的和函数 $F(x)=f(x)+g(x)$在点 x_0 是否可微？

(2)若函数 $f(x)$和 $g(x)$在点 x_0 都不可微，那么它们的和 $F(x)=f(x)+g(x)$在点 x_0 是否可微？它们的积 $G(x)=f(x)\cdot g(x)$，在点 x_0 是否可微？（提示：考虑函数 $f(x)=|x|$，$g(x)=-|x|$，在点 $x=0$ 的情况.）

8. 微商是由极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$ 来定义的. 但在具体计算初等函数的微商时，我们并没有直接计算上述的极限，而只需要记住几个极简单的初等函数的微商公式，因而使计算微商的问题大大简化. 试问这里主要是哪些法则在起作用？在这些法则中，尤以哪个法则作用最大？

9. 指出下面计算的错误：

(1)$[\cos(1-x)]'=-\sin(1-x)$

(2) $\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}}=x$

(3) $$(x^2+\sqrt{5+3x})'=\left(2x+\frac{1}{\sqrt{5+3x}}\right)(5+3x)'$$

$$=3\left(2x+\frac{1}{\sqrt{5+3x}}\right)$$

习题 2.1

1. 已知质点的直线运动方程是 $s=5t^2+6$

(1)求 $2\leqslant t\leqslant 2+\Delta t$ 时间内的平均速度，设 $\Delta t=1,0.1,0.01,0.001$；

(2)从上面平均速度的变化趋势，估计在 $t=2$ 秒这一时刻的瞬时速度；

(3)由瞬时速度的定义，算出在 $t=2$ 秒的瞬时速度.

2. 长 30cm 的非均匀细杆 AB 的质量(克)按规律：$m=3l^2+5l$ 分布，这里 l 是从 A 算起的一段杆长，试求：

(1)杆的平均线密度；

(2)离 A 点 5cm 处的线密度；

(3)杆的末端 B 点的线密度.

3. 设 $f(x)=x^3$，用定义求 $f'(1)$，$f'(0)$，$f'(-2)$，$f'(-\sqrt{2})$，

4. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{当 } x\neq 0 \\ 0 & \text{当 } x=0 \end{cases}$ 求 $f'\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$，$f'\left(\dfrac{1}{\pi}\right)$，$f'(0)$

5. 设 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-2x$，当 x 为何值时，有

(1)$f'(x)=0$　　(2)$f'(x)=-2$　　(3)$f'(x)=10$

6. 设 $\rho(\theta)=\dfrac{p}{1+e\cos\theta}$，求 $\rho'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

7. 利用微商的定义讨论下列函数在点 $x=0$ 的微商是否存在：

(1)$f(x)=|\sin x|$

(2)$f(x)=\begin{cases} \ln(1+x), & x\geqslant 0 \\ x, & x<0 \end{cases}$

8. 在抛物线 $y=x^2$ 上取横坐标为 $x_1=1$，$x_2=3$ 的两点. 问抛物线上哪一点的切线平行于过这两点所引的割线.

9. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 1 \\ ax+b, & x>1 \end{cases}$ 问：当 a,b 取何值时，$f(x)$在点 $x=1$ 连续且可微.

10. 设 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\leqslant x_0 \\ ax+b, & x>x_0 \end{cases}$ 问：当 a,b 取何值时，$f(x)$在点 x_0 可微？

11. 研究下列函数的连续性与可微性：

(1) $f(x)=\begin{cases} x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 1 \\ \sqrt{x}, & x>1 \end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}\ln x, & x\geqslant 1\\ x-1, & x<1\end{cases}$

12. 求下列函数的微商：

(1) $y=ax^3+bx^2+cx+d$

(2) $y=\sqrt[5]{x}+\dfrac{a}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{b}{\sqrt[5]{3}}$

(3) $y=x^3\cdot\sqrt[5]{x}$

(4) $y=\dfrac{x+1}{x+2}$

(5) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

(6) $y=\dfrac{3x^2+9x-2}{5x+8}$

(7) $y=\sin x\cos^2 x$

(8) $y=\sin x\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$

(9) $y=\dfrac{\sin^2 x\cos x}{x^3+\operatorname{tg}x}$

(10) $y=\dfrac{0.3x^5+a\sin x}{(a+b)\cos x}$

(11) $y=\dfrac{\ln x}{x^a}$

(12) $y=a^x\ln x$

(13) $y=\dfrac{x+\arcsin x}{\sin x}$

(14) $y=\dfrac{t^3\operatorname{arctg}t}{e^t}$

(15) $y=(a^2+b^2)x^a e^x\operatorname{arctg}x$

(16) $y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$

(17) $y=x^2\log_3 x$

(18) $y=\dfrac{1-10^x}{1+10^x}$

(19) $y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$,

(20) $y=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$

13. 求曲线 $y=x-\dfrac{1}{x}$ 与横轴交点处的切线方程.

14. 抛物线 $y=x^2$ 上哪一点的切线和直线 $3x-y+1=0$ 交成 $45°$ 角？

15. 求下列函数的微商：

(1) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}$

(2) $y=\sin^\alpha x\ln^\beta x$

(3) $y=\sqrt[3]{1+\ln^2 x}$,

(4) $r=\sqrt{1+\varphi^2}\operatorname{arctg}(\varphi^3)$

(5) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{x+x^2}}+\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

(6) $y=(\arcsin x+\arccos x)^a$

(7) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

(8) $w=z5^z$

(9) $y=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$

(10) $y=\sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)$

(11) $y=\sin[\sin(\sin x)]$

(12) $y=\sin[\cos^5(\operatorname{arctg}x^3)]$

(13) $y=\sec^2\dfrac{x}{a^2}+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{b^2}$

(14) $y=e^{\sqrt{x^2+1}}$

(15) $y=a^x e^{\sin \operatorname{tg} x}$

(16) $y=\cos\dfrac{1}{x^2}e^{\cos\frac{1}{x^2}}$

(17) $y=\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{\arcsin\sqrt{x^2+2x}}$

(18) $y=\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

(19) $y=\ln[\ln^2(\ln^3 x)]$

(20) $y=\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$

(21) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

(22) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$

(23) $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$

(24) $y=x^{\frac{1}{x}}$

(25) $y=x^{x^x}+x^x+x^{a^x}$

(26) $y=(\sin x)^{\cos x}$

(27) $y=(\operatorname{tg}ax)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{b}}$

(28) $y=(\ln x)^x x^{\ln x}$

(29) $y=\arcsin(\sin x^2)$

(30) $y=\arccos(\sin x^2-\cos x^2)$

(31) $y=\dfrac{1}{\arccos^2(x^2)}$

(32) $\rho=\dfrac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}\right)$

(33) $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}$

(34) $y=\operatorname{arctg}(x+\sqrt{1+x^2})$

(35) $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$

(36) $y=\ln(\cos^2x+\sqrt{1+\cos^4x})$

(37) $r=\ln\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{\varphi}}\right)$

(38) $s=\dfrac{t^6}{1+t^{12}}-\cos\operatorname{ctg}t^6$

(39) $y=\ln\cos\operatorname{arctg}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

(40) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1-x^2+x^4}{1+x^2+x^4}}$

16. 求下列函数的反函数的微商 $x(y)$

(1) $y=xe^x$

(2) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$

(3) $y=2e^{-x}-e^{-2x}$

(4) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

17. 设 $f(x)$ 为可微函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$：

(1) $y=f(x^3)$　　(2) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$

(3) $y=f(e^x+x^e)$　　(4) $y=\sin[f(\sin f(x))]$

(5) $y=f\{f[f(\sin x+\cos x)]\}$　　(6) $y=f(e^x)e^{f(x)}$

18. 写出下列曲线在已知点处的切线与法线方程：

(1) $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$　在 $t=\pi$ 处

(2) $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos 2t \end{cases}$　在 $t=\dfrac{\pi}{6}$ 处

(3) $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^2} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^2} \end{cases}$　在 $t=2$ 处

19. 设 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 为可微函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$：

(1) $y=\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$　　(2) $y=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$

(3) $y=\left[\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]^{\ln\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}}$　　(4) $y=\mathrm{arctg}[1+\varphi(x)+\varphi(x)^{\psi(x)}]$

20. 验证函数 $y=\ln\dfrac{1}{x+1}$ 满足关系式：

$$x\frac{dy}{dx}+1=e^y.$$

21. 验证函数 $y=e^{-x}+\dfrac{1}{2}(\cos x+\sin x)$ 满足关系式：

$$y'+y=\cos x$$

22. 从等式 $1+x+x^2+\cdots+x^n=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ 出发，导出表示和式

$$P_n=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$$

与

$$Q_n=1^2+2^2x+3^2x^2+\cdots n^2x^{n-1}$$

的公式.

23. 试证可微的偶函数其微商为奇函数；可微的奇函数其微商为偶函数.

24. 试证可微的周期函数其微商仍为具有相同周期的周期函数.

25. 当实数 n 满足什么条件时，函数

$$f(x)=\begin{cases} x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

具有(1)在点 $x=0$ 连续；(2)在点 $x=0$ 可微；(3)在点 $x=0$ 导函数连续.

26. 证明：双曲线 $xy=a^2$ 的切线与两坐标轴组成的三角形的面积等于常数 $2a^2$.

27. 一气球从离开观察者 500 米处离地铅直上升，其速度为 140 米/分. 当气球高度为 500 米时，观察者视线的仰角增加率如何？

28. 水自高为 18 厘米，底半径为 6 厘米的圆锥形漏斗流入直径为 10 厘米的圆柱形筒中，已知水在漏斗中深度为 12 厘米时水平面下降之速率为 1 厘米/分. 问圆柱形筒中水平面上升之速度如何？

29. 石块落在平静水面上，产生圆形波纹. 若最外一圈波的半径增大率恒为 1 米/秒. 问在 2 秒末，被扰动之水面面积增大率为何？

2.2 函数的微分

在实际问题中，常需要计算当自变量在某一点处有微小的变化时，函数对应的变化，即计算函数的改变量. 一般来说，函数的改变量很难求得. 不过，在应用上只要求出它具有一定精确度的近似值就足够了. 为此引入微分的概念，它是微分学中又一个重要概念.

2.2.1 微分的概念

先来考虑函数的微小改变量的实例.

例如，设一质点沿直线作变速运动，运动规律是 $s=s(t)$，则由时刻 t 到 $t+\Delta t$ 这段时间内，它所经过的路程为

$$\Delta s = s(t+\Delta t)-s(t)$$

当运动规律 $s(t)$ 非常复杂时，精确地算出这个改变量 Δs 就相当困难. 但是若时间间隔 Δt 充分小，则在这段时间内，质点的瞬时速度来不及发生很大的变化. 因此可以认为它在作匀速运动，速度

是 $s'(t)$. 于是路程 Δs 就近似地等于 $s'(t)\Delta t$,即用关于 Δt 的一次函数来代替 Δs.

这种计算路程 Δs 的方法,可以推广到一般的情形. 设函数 $y=f(x)$在某个区间上有定义. 若对于 x 取得的改变量 Δx,函数相应的改变量为

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

易见,Δy 是 Δx 的函数(图 2.7). 今希望用一个计算方便的关于 Δx 的函数来近似代替 Δy,并使其计算误差满足我们的要求. 自然,在所有关于 Δx 的函数中,一次函数的计算最为方便. 故用 Δx 的一次函数 $A\Delta x$ 近似代替 Δy,其中 A 与 Δx 无关. 而产生的误差为 $\Delta y-A\Delta x$,当 Δx 趋于零时,若 $\Delta y-A\Delta x=o(\Delta x)$,那么 Δx 的一次函数 $A\Delta x$ 就有特殊的意义,即可引出如下的概念.

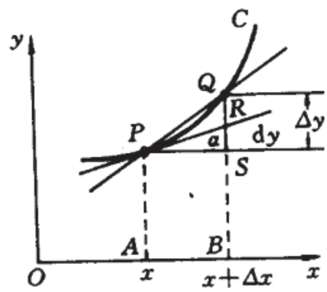


图 2.7

定义 设函数 $y=f(x)$在点 x 的一个邻域内有定义. 若函数 $y=f(x)$在点 x 的改变量 Δy 与自变量 x 的改变量 Δx 的关系可表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

其中 A 与 Δx 无关,$o(\Delta x)$是比 Δx 高级的无穷小量,则称函数 $f(x)$在点 x 有微分,并把 $A\Delta x$ 称为函数 $f(x)$在点 x 的微分,记为

$$\mathrm{d}y = A\Delta x \quad 或 \quad \mathrm{d}f(x) = A\Delta x$$

这时函数的改变量 Δy 是由 $A\Delta x$ 与 $o(\Delta x)$两部分组成. 通常把 $A\Delta x$ 称为它的线性主要部分. "线性"是因为 $A\Delta x$ 仅是 Δx 的一次函数;"主要"是因为它的另外一部分 $o(\Delta x)$是比 Δx 高级的无穷小量,即在 Δy 中 $A\Delta x$ 起主要作用,因此,$\Delta y\approx A\Delta x$ 或 $\Delta y\approx \mathrm{d}y$,其误差为 $o(\Delta x)$.

例如,半径为 R 的球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$. 当半径 R 的改变量为 ΔR 时,体积 V 的改变量

$$\Delta V=\frac{4}{3}\pi(R+\Delta R)^3-\frac{4}{3}\pi R^3$$

$$=4\pi R^2\cdot\Delta R+4\pi R(\Delta R)^2+\frac{4}{3}\pi(\Delta R)^3$$

显然,ΔV 的线性主要部分是 $4\pi R^2\Delta R$,其余部分为 $o(\Delta R)$,即有

$$\mathrm{d}V=4\pi R\Delta R$$

而

$$\Delta V\approx\mathrm{d}V$$

定理 函数 $y=f(x)$ 在点 x 有微分的充要条件是函数 $y=f(x)$ 在点 x 可微.

证 必要性,若函数 $y=f(x)$ 在点 x 有微分,即

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$$

其中 A 与 Δx 无关. 于是有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+o(1)$$

其中 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}o(1)=0$,故有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=A$$

即函数 $y=f(x)$ 在点 x 可微,且 $A=f'(x)$.

充分性,若函数 $y=f(x)$ 在点 x 可微,故有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$$

由极限与无穷小量的关系,得到

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+o(1)$$

其中 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}o(1)=0$. 于是

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+o(\Delta x)$$

这里 $f'(x)$与 Δx 无关，且 $o(\Delta x)$是比 Δx 高级的无穷小量. 由定义，可知函数 $y=f(x)$在点 x 有微分.

从而说明：函数 $y=f(x)$在点 x 有微分与可微是等价的，且 $A=f'(x)$. 因此 $f(x)$在点 x 的微分为

$$\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x$$

或

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

这与实例的直观想法完全一致.

函数的微分也有简单的几何意义：如图 2.7，设点 P 是 $y=f(x)$所表示的曲线 C 上一定点，坐标为$(x,f(x))$. 给 x 一个改变量 Δx，得曲线上另一点 Q，坐标为$(x+\Delta x,f(x+\Delta x))$. 过点 P，Q 分别作直线 PA，QB 垂直于 x 轴，再作直线 PS 垂直于 QB. 于是

$$QS = QB - SB = f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta y$$

设曲线在点 P 的切线与 QB 交于 R. 且令$\angle RPS=\alpha$，则由微商的几何意义可知

$$RS = PS\operatorname{tg}\alpha = f'(x)\Delta x = \mathrm{d}y$$

即当 Δy 是曲线的纵坐标的改变量时，$\mathrm{d}y$ 就是切线的纵坐标的改变量. 这时用微分 $\mathrm{d}y$ 代替改变量 Δy 时所产生的误差为

$$\Delta y - \mathrm{d}y = QS - RS = QR$$

从图 2.7 中可以看出，当改变量 Δx 越小时，切线 PR 就越靠近曲线 C，而误差 QR 就越小. 也就是说，在点 P 附近以切线近似代替曲线越精确. 这也就是微积分学中“以直代曲”或“线性逼近”的理论依据.

一般把自变量 x 的改变量 Δx 叫做自变量 x 的微分，记作

$$\Delta x = \mathrm{d}x$$

于是函数 $f(x)$在点 x 的微分表达式又可记为

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$$

其中的 $\mathrm{d}x$ 与 $\mathrm{d}y$ 现在都有完全确定的意义，它们分别为自变量 x 与因变量 y 的微分. 由此推得，函数的微商可以表示成这两个微分之比：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)$$

过去 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 是作为一个整体记号来表示函数的微商. 而一旦引入微分概念之后,就可以说成函数 $y=f(x)$ 的微商是函数的微分除以自变量的微分所得之商. 它也是微商这一名称的由来.

2.2.2 微分的运算法则与公式

因为函数有微分与它是可微等价,所以微分只不过是微商的另外一种形式而已,即函数的微分等于它的微商与自变量的微分的乘积. 于是计算函数的微分并不需要新的方法. 由微商的运算法则与公式,可相应地得到微分的运算法则与微分公式.

(一) 基本初等函数的微分公式

$y=c$ (常数)	$y=x^{\mu}$(μ 为实数)
$y=\log_a x$, $a>0, a\neq 1$,	$y=a^x, a>0, a\neq 1$
$y=\sin x$	$y=\cos x$
$y=\operatorname{tg} x$	$y=\operatorname{ctg} x$
$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$
$y=\operatorname{arctg} x$	$y=\operatorname{arcctg} x$
$\mathrm{d}(c)=0$	$\mathrm{d}(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x$
$\mathrm{d}(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$	$\mathrm{d}(a^x)=a^x\ln a\mathrm{d}x$
	$(a>0, a\neq 1)$
$\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\mathrm{d}x$	$\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\mathrm{d}x$
$\mathrm{d}(\operatorname{tg} x)=\sec^2 x\mathrm{d}x$	$\mathrm{d}(\operatorname{ctg} x)=-\csc^2 x\mathrm{d}x$
$\mathrm{d}(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$	$\mathrm{d}(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$
$\mathrm{d}(\operatorname{arctg} x)=\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$	$\mathrm{d}(\operatorname{arcctg} x)=-\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

(二) 微分的运算法则

设函数 $u=u(x)$, $v=v(x)$都可微,则有

$d(cu)=cdu$,其中 c 为常数.

$d(u\pm v)=du\pm dv$

$d(uv)=vdu+udv$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2},\ v\neq 0$$

这些法则的证明可以直接从微分的定义及定理得出. 例如

$$d(uv)=(uv)'dx=(vu'+uv')dx=vdu+udv$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\left(\frac{u}{v}\right)'dx=\frac{vu'-uv'}{v^2}dx=\frac{vdu-udv}{v^2},v\neq 0$$

(三) 复合函数的微分法则

设在函数 $y=f(x)$中,x 不是自变量,而 $x=\varphi(t)$,则复合函数 $y=f[\varphi(t)]$的微分 dy 为

$$dy=\{f[\varphi(t)]\}'dt=f'(x)\varphi'(t)dt$$

已知

$$dx=\varphi'(t)dt$$

故有

$$dy=f'(x)\varphi'(t)dt=f'(x)dx$$

从形式上来看,不论 x 是自变量还是函数 $x=\varphi(t)$,而函数 $y=f(x)$的微分 $dy=f'(x)dx$ 都相同. 通常把这个性质叫做一阶微分形式的不变性. 根据这个性质把前面的各个微分公式中的自变量 x 换成中间变量时公式仍成立. 这给函数的微分运算带来了方便.

例 1 计算 $y=e^{-ax}\sin bx$ 的微分.

解 由微分的运算法则得

$$\begin{aligned}dy&=\sin bx\,d(e^{-ax})+e^{-ax}d(\sin bx)\\&=\sin bx\cdot e^{-ax}d(-ax)+e^{-ax}\cos bx\,d(bx)\\&=e^{-ax}(b\cos bx-a\sin bx)dx\end{aligned}$$

例 2 求函数 $y=\mathrm{th}x$ 的微分.

解 由微分的运算法则得到

$$\mathrm{d}(\mathrm{th})x = \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}\right) = \frac{\mathrm{ch}x\mathrm{d}(\mathrm{sh}x) - \mathrm{sh}x\mathrm{d}(\mathrm{ch}x)}{\mathrm{ch}^2 x}$$

$$= \frac{\mathrm{ch}^2 x\mathrm{d}x - \mathrm{sh}^2 x\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2 x}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\mathrm{d}x$$

例 3 计算 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$的微分.

解 由微分表达式得

$$\mathrm{d}y = (\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}))'\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x$$

2.2.3 函数值的近似计算

我们知道,若函数 $y=f(x)$在点 x_0 可微,当自变量的改变量 Δx 很小时,就可用函数的微分 $\mathrm{d}y$ 作为函数改变量 Δy 的近似值,即有

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y$$

若设 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$,上述近似等式可改写为

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

或

$$f(x_0+\Delta x) \approx f'(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

令 $x=x_0+\Delta x$, $\Delta x=x-x_0$,又可写成

$$f(x) \approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

于是,用前面两个近似等式,可计算在点 x_0 附近的函数值. 特别,当 $x_0=0$,且$|x|$很小时,有

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x$$

由这个近似公式,可以推得几个常用的近似公式(当$|x|$很小时):

(1)$f(x)=\sin x$,有 $\sin x \approx x$(x 用弧度作单位);

(2)$f(x)=\text{tg}x$,有 $\text{tg}x \approx x$;

(3)$f(x)=(1+x)^{\alpha}$,有$(1+x)^{\alpha} \approx 1+\alpha x$,$\alpha$ 为实数;

(4)$f(x)=e^x$,有 $e^x \approx 1+x$;

(5)$f(x)=\ln(1+x)$,有 $\ln(1+x) \approx x$.

例 1 求 $\sin 30°13'$的近似值.

解 先将角度换成弧度. 令 $x_0=30°=\frac{\pi}{6}$,$\Delta x=13'=\frac{13\pi}{60\times 180}=\frac{13\pi}{10800}$,代入近似公式,有

$$\sin 30°13' \approx \sin 30° + \cos 30° \cdot \frac{13\pi}{10800} \approx 0.5033$$

而 $\sin 30°13'$的精确值为 0.503271….

例 2 计算$\sqrt[5]{245}$的近似值.

解 因为

$$\sqrt[5]{245} = (243+2)^{\frac{1}{5}} = 3\left(1+\frac{2}{243}\right)^{\frac{1}{5}}$$

应用近似公式(3),则有

$$\left(1+\frac{2}{243}\right)^{\frac{1}{5}} \approx 1+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{243} \approx 1.0016$$

故

$$\sqrt[5]{245} \approx 3.0048$$

例 3 钟摆的周期为 1 秒. 在冬季摆长缩短了 0.01 厘米. 问这钟每天大约快多少?

解 由物理学知,单摆的周期 T 与摆长 l 的关系为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

其中 g 为重力加速度. 已知摆的周期 $T=1$ 秒,故摆的原长为

$$l_0 = \frac{g}{(2\pi)^2}$$

到冬季摆长缩短了 0.01 厘米，即摆长的改变量为

$$\Delta l = (l_0 - 0.01) - l_0 = -0.01$$

此例要计算由摆长的改变量 Δl 而引起的周期的改变量 ΔT 是多少？由于

$$\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}l}\right|_{l=l_0} = \left.\frac{\pi}{\sqrt{g}}\frac{1}{\sqrt{l}}\right|_{l=l_0} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{l_0}} = \frac{2\pi^2}{g}$$

所以

$$\Delta T \approx \mathrm{d}T = \frac{2\pi^2}{g} \cdot \Delta l = \frac{2 \cdot (3.14)^2}{980}(-0.01) \approx -0.0002 \text{ 秒}$$

这即是说，由于摆长缩短了 0.01 厘米，摆的周期缩短了约 0.0002 秒，即每个周期快 0.0002 秒. 因此每天约快

$$86400 \times 0.0002 = 17.28 \text{ 秒}$$

2.2.4 误差的估计

在实际应用中，经常要求我们测量各种各样的量，有些量的大小可以直接测量得到. 这些数据通常称为直接测量数据. 例如一根电阻丝的直径 D 可用卡尺直接测出. 有些量的大小不易直接测量，例如电阻丝的截面积 S. 但可用直接测出的电阻丝截面的直径 D，通过公式 $S=\frac{\pi}{4}D^2$ 计算出 S. 这样得到的数据称为间接测量数据. 由于测量仪器的精度、测量条件及测量方法等各种因素的影响，直接测量到的数据会有误差. 因而根据这些数据计算出来的间接测量数据也会有误差，现在的问题是如何用直接测量的误差去估计间接测量的误差？这只有利用微分的概念才能得以解决.

设某个量的直接测量数据或近似值为 a，而精确值为 $A=a+\Delta a$. 实际上一个量的精确值通常是未知的. 因此 $A-a=\Delta a$ 往往是无法知道的. 不过有时能够知道 $|\Delta a|$ 不超过测量工具的精确度 δ_a，即 $|\Delta a| \leqslant \delta_a$.

δ_a 称为直接测量数据或近似值 a 的绝对误差. 例如用卡尺测量时,可认为绝对误差不超过卡尺最小刻度的一半. 若卡尺的最小刻度为 0.1 毫米,那么就认为绝对误差等于 0.05 毫米,而在估计误差时就按绝对误差等于 0.05 毫米来计算.

假定在某一过程中,存在着两个量 x 和 y,且 y 与 x 有函数关系:$y=f(x)$. 若测量 x 时,直接测量数据仍是 x,且绝对误差为 δ_x,被测量 x 的精确值为 $x+\Delta x$. 这时通过公式 $y=f(x)$ 可分别算出间接测量数据 $f(x)$,以及间接测量的量的精确值 $f(x+\Delta x)$. 这时用 x 去计算量 y 所产生的绝对误差为 δ_y. 于是有

$$|\Delta y|=|f(x+\Delta x)-f(x)|\leqslant \delta_y$$

由于 $|\Delta x|$ 通常很小,故可用微分作近似计算得

$$|\Delta y|=|f(x+\Delta x)-f(x)|\approx |f'(x)||\Delta x|\leqslant |f'(x)|\delta_x$$

即

$$|\Delta y|\approx |f'(x)||\Delta x|\leqslant |f'(x)|\delta_x$$

于是,可取

$$\delta_y=|f'(x)|\delta_x \qquad (f'(x)\neq 0)$$

这就是用直接测量的量的绝对误差来估计间接测量的量的绝对误差的公式.

例 1 用卡尺测量得一根电阻丝的直径 D 为 2.02 毫米,测量 D 的绝对误差 $\delta_D=0.05$ 毫米,即 $|\Delta D|\leqslant 0.05$ 毫米. 试计算电阻丝的截面积 S,并估计它的绝对误差.

解 若将测量直径 D 时所产生的误差当作自变量 D 的改变量 ΔD,利用计算电阻丝截面积的公式

$$S=\frac{\pi}{4}D^2$$

可以算出当 $D=2.02$ 毫米时的面积为

$$S=\frac{3.14}{4}(2.02)^2\approx 3.20(\text{平方毫米})$$

而计算 S 时所产生的误差就是截面积 S 对应的改变量 ΔS. 当

$|\Delta D|$很小时，可用函数的微分 dS 近似代替函数的改变量ΔS，即有

$$\Delta S \approx \mathrm{d}S = S'\Delta D = \frac{\pi}{2}D \cdot \Delta D$$

由于 D 的绝对误差$\delta_D=0.05$ 毫米，故$|\Delta D|\leqslant 0.05$
及

$$|\Delta S| \approx |\mathrm{d}S| = \frac{\pi}{2}D|\Delta D| \leqslant \frac{\pi}{2}D\delta_D$$

因此，S 的绝对误差为

$$\delta_S = \frac{\pi}{2}D\delta_D = \frac{\pi}{2} \times 2.02 \times 0.05 \approx 0.16(\text{平方毫米})$$

即算出的截面积为 $S=3.20$ 平方毫米的绝对误差不超过 0.16 平方毫米.

不过，在有些情形下，知道绝对误差的意义不大. 例如，若我们用卡尺测量两根电阻丝的直径分别为 $D_1=2.02$ 毫米与 $D_2=1.02$ 毫米. 若绝对误差都是 0.05 毫米. 难道能说这两种测量的精确度是一样的吗？显然不能，为了比较两种测量的精确度，必须引入相对误差的概念. 相对误差是指绝对误差与近似值之比，即

$$|\delta a| = \frac{\delta_a}{|a|}$$

例如考虑用卡尺测量两根电阻丝的直径，从所得的数据知，第一根的相对误差为

$$|\delta D_1| = \frac{0.05}{2.02} \approx 2.5\%$$

而第二根的相对误差为

$$|\delta D_2| = \frac{0.05}{1.02} \approx 5\%$$

所以从相对误差来看，第一根的测量精度更好些.

若已知直接测量数据 x 的相对误差为$\delta x=\frac{\delta_x}{|x|}$时，则不难估计出间接测量数据 y 的相对误差为

$$\delta_y=\frac{\delta y}{|y|}=\frac{|f'(x)|\delta_x}{|f(x)|}=\left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right|\delta x$$

例 2 试估计例 1 中算出的截面积 S 的相对误差.

解 由相对误差公式得到

$$\delta S=\frac{|Df'(D)|}{|f(D)|}\delta_D=\frac{0.16}{3.20}=5\%$$

复习思考题

1. 微分概念是怎样引入的？它和函数的改变量有什么关系？

2. 用几何图形表出函数的微分 dy 与函数的改变量 Δy 间的关系，从这图形可以看出什么样的函数，它的微分恒等于它的改变量？

3. 函数的微分有什么重要的特性？

4. 用公式：$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$ 作近似计算时，对 Δx 有什么要求？为什么？

习　题　2.2

1. 当自变量 x 由 $x=1$ 变到 $x=1.02$ 时，函数 $y=x^2$ 的改变量 Δy 等于多少？Δy 的主要部分 dy 等于多少？

2. 设 $y=x^2+x$，计算在 $x=1$ 处，当 $\Delta x=10,1,0.1,0.01$ 时，相应的函数改变量 Δy 和函数的微分 dy，并观察两者之差 $\Delta y-\mathrm{d}y$ 随着 Δx 减小的变化情况.

3. 求下列函数的微分：

(1) $y=\ln\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)$　　(2) $y=5^{\sqrt{\operatorname{arctg}x^2}}$

(3) $y=\arccos\frac{1}{|x|}$　　(4) $y=\sin x-x\cos x$

(5) $y=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$　　(6) $y=\operatorname{tg}^2(1+2x^2)$

4. 当 φ 由 $\frac{\pi}{6}$ 变到 $\frac{61}{360}\pi$ 时，求 $y=\sin 2\varphi$ 的微分.

5. 验证函数 $y=\frac{1+\ln x}{x-x\ln x}$满足关系式

$$2x^2\mathrm{d}y=(x^2y^2+1)\mathrm{d}x$$

6. 当$\frac{|x|}{a^n}$很小($a>0$),证明近似公式

$$\sqrt[n]{a^n+x}\approx a+\frac{x}{na^{n-1}}$$

7. 利用微分近似计算:

(1) $\sqrt[5]{1.01}$　　(2) $\sin 29°$　　(3) $\ln 1.03$　　(4) $e^{1.01}$

8. 若一条电缆的长等于 $2s$,半拱的长为 l,而电缆垂距为 f,则近似等式

$$s=l\left(1+\frac{2}{3}\frac{f^2}{l^2}\right)$$

成立. 问:

(1) 当电缆垂距 f 变动 $\mathrm{d}f$ 时,长度 s 变化如何?

(2) 若电缆长度 s 变化 $\mathrm{d}s$,垂距 f 变化怎样?

9. 有一立方形铁箱,它的边长为 70 ± 0.1 厘米,求出它的体积的改变量并估计相对误差.

10. 计算球体体积时,要求精确度在 2% 之内,问这时测量直径 D 的相对误差不超过多少?

11. 扩音器的插头为圆柱形,其截面半径 $r=0.15$ 厘米,长度 $l=4$ 厘米,为了提高它的导电性能,需在这圆柱的侧面镀一层厚度为 0.001 厘米的纯银. 问需约多少克纯银?

2.3 高阶微商与高阶微分

2.3.1 高阶微商

前面已经指出,函数 $y=f(x)$的微商 $y'=f'(x)$,亦称一阶微商,通常仍然是 x 的一个函数. 因此我们可以继续讨论 $f'(x)$的微商的问题.

定义 若函数 $y=f(x)$的微商 $y'=f'(x)$在点 x 可微,即极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的二阶微商，记为

$$y'', f''(x), \frac{d^2y}{dx^2} \text{ 或 } \frac{d^2f}{dx^2}.$$

按定义，函数 $f(x)$ 在点 x 的二阶微商就是

$$f''(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

二阶微商和一阶微商一样也有重要的物理意义. 我们知道，若一个质点作变速直线运动，它的运动规律是 $s=f(t)$，则 $s'=f'(t)$ 就表示该质点在瞬时 t 的速度，而二阶微商 $s''=f''(t)$ 就应是"速度的变化率"，在物理上这个量就叫做质点的加速度. 因此加速度就是路程对时间的二阶微商.

类似地，函数 $y=f(x)$ 的二阶微商 $y''=f''(x)$ 仍是 x 的函数. 若函数 $y''=f''(x)$ 的微商存在，就称它为函数 $y=f(x)$ 在点 x 的三阶微商，记为

$$y''', f'''(x), \frac{d^3y}{dx^3} \text{ 或 } \frac{d^3f}{dx^3}$$

一般地，若函数 $y=f(x)$ 的 $n-1$ 阶微商 $y^{(n-1)}=f^{(n-1)}(x)$ 的微商存在，就称它为函数 $y=f(x)$ 的 n 阶微商，记为

$$y^{(n)}, f^{(n)}(x), \frac{d^ny}{dx^n} \text{ 或 } \frac{d^nf}{dx^n}$$

因此有

$$y^{(n)}=(y^{(n-1)})' \text{ 或 } \frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

即

$$y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x)-f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}$$

二阶与二阶以上的微商，统称为高阶微商. 从定义可以看出，高阶微商是归纳定义的. 求函数 $y=f(x)$ 的 n 阶微商只要按求微商的法则和公式逐次进行 n 次运算就行了. 因此求函数的高阶微

商不需要任何的新方法.

例 1 设 $y=P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n+1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 是一个 n 次多项式,试求它的各阶微商.

解 应用逐阶整理法,把它微商一次,得到

$$y'=P'_n(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$$

这是一个$(n-1)$次多项式. 故 n 次多项式的微商仍然是一个多项式,但已比原来的多项式降低一次. 因此容易知道,它的 $n-1$ 阶微商就变成一个常数,即有

$$y^{(n)}=n!a_0$$

而

$$y^{(n+1)}=y^{(n+2)}=\cdots=0$$

这就是说,n 次多项式的一切阶数高于 n 的微商都等于零. 这是一个很有用的结论.

例 2 求函数 $y=\mathrm{e}^{ax}$ 的 n 阶微商,其中 a 为常数.

解 应用逐阶整理法,易见

$$y'=a\mathrm{e}^{ax},y''=a^2\mathrm{e}^{ax},y'''=a^3\mathrm{e}^{ax}$$

一般地,有

$$y^{(n)}=a^n\mathrm{e}^{ax}$$

例 3 设 $y=\ln(1+x)$,试求 $y^{(n)}$.

解 应用逐阶整理法,有

$$y'=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$$

$y''=(-1)^{2-1}(1+x)^{-2}(2-1)!,y'''=(-1)^{3-1}(1+x)^{-3}(3-1)!$

一般地,有

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}(1+x)^{-n}(n-1)!=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

例 4 证明有下列 n 阶微商公式:

$$\sin^{(n)}x=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos^{(n)} x = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

证 只证明前一个公式，后一个公式可类似地证明. 由于 $(\sin)' x = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$，因此当 $n=1$ 时公式是正确的，今归纳假设 $n=k$ 时公式也正确，即

$$\sin^{(k)} x = \sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned} \sin^{(k+1)} x &= [(\sin x)^{(k)}]' = \left[\sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right]' \\ &= \cos\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[x + (k+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

故 $n=k+1$ 时公式成立. 由数学归纳法知，公式对一切的自然数 n 都成立.

例 5 设 $y = \cos\alpha x \cos\beta x$，求 $y^{(n)}$，其中 α, β 为常数.

解 因为

$$y = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x]$$

应用例 4 的公式，得到

$$\begin{aligned} y^{(n)} = &\frac{(\alpha+\beta)^n}{2}\cos\left[(\alpha+\beta)x + \frac{n\pi}{2}\right] \\ &+ \frac{(\alpha-\beta)^2}{2}\cos\left[(\alpha-\beta)x + \frac{n\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

例 6 设 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，且 $\varphi'(t) \neq 0$，$\psi'(t)$，$\varphi''(t)$ 与 $\psi''(t)$ 都存在，求 y''.

解 已算出

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

要求 y''，就是要求由参数方程

$$y' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\ x = \varphi(t)$$

所确定的 y' 对 x 的微商，应用参数方程的微商法则，有

$$y''=\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}$$

例 7 设 $y=f(x)$，$x=\varphi(t)$，它们都存在高阶微商，试求复合函数 $y=f[\varphi(t)]$ 的三阶微商.

解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f'(x)\varphi'(t)$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\\&=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\\&=f''(x)[\varphi'(t)]^2+f'(x)\varphi''(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right]\\&=\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}[\varphi'(t)]^3+3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\varphi'(t)\varphi''(t)+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\varphi'''(t)\end{aligned}$$

2.3.2 莱布尼兹公式

若函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 都有 n 阶微商，而 c 是任意常数，则下面的两个公式显然成立

$$(cu)^{(n)}=cu^{(n)}$$

$$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$$

但是两个函数的乘积 $u\cdot v$ 的高阶微商就没有这样容易了. 例如，由乘积的微商法则，有

$$(uv)'=u'v+v'u,$$

$$(uv)''=u''v+2u'v'+uv''$$

$$(uv)'''=u'''v+3u'''v+3u'v''+uv'''$$

$$\cdots\cdots$$

若令 $u^{(0)}=u, v^{(0)}=v$,就得到

$$(uv)'=u^{(1)}v^{(0)}+u^{(0)}v^{(1)}$$

$$(uv)''=u^{(2)}v^{(0)}+2u^{(1)}v^{(1)}+u^{(0)}v^{(2)}$$

$$(uv)'''=u^{(3)}v^{(0)}+3u^{(2)}v^{(1)}+3u^{(1)}v^{(2)}+u^{(0)}v^{(3)}$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

可见当微商的阶数愈高,表达式也就愈复杂.但是仔细观察上面三个式子不难发现它们的规律.它们右端的系数分别是 1,1;1,2,1;1,3,3,1;…,这恰好与熟知的牛顿二项式的各次幂$(u+v)^1$,$(u+v)^2$,$(u+v)^3$,…,之展开式的系数相同.

一般地,若将二项式$(u+v)^n$ 的展开式

$$(u+v)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{n-k}v^k$$

的左端二项和代之以乘积 $u\cdot v$,n 次幂代之以 n 阶微商,并把右端出现的函数 u,v 各次幂代之以对应阶的微商,$u^{(0)}$,$v^{(0)}$代之以函数 u,v,就得到两个函数乘积的高阶微商公式.

定理 设 u 与 v 都是 x 的函数,且存在 n 阶微商,则

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$$

并称这个公式为莱布尼兹公式,其中 $C_n^k=\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

证 当 $n=1$ 时,公式显然成立.假定对自然数 n 公式成立,即有

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$$

则当为 $n+1$ 时,有

$$(uv)^{(n+1)}=\left[(uv)^{(n)}\right]'=\left[\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}\right]'$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left[u^{(n-k+1)}v^{(k)}+u^{(n-k)}v^{(k+1)}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k+1)} v^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k+1)}$$

在上式右端的第二项中，令 $k'=k+1$，则有

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k+1)} = \sum_{k'=1}^{n+1} C_n^{k'-1} u^{(n+1-k')} v^{(k')}$$

显然

$$\sum_{k'=1}^{n+1} C_n^{k'-1} u^{(n+1-k')} v^{(k')} = \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} u^{(n+1-k)} v^{(k)}$$

代入后，得到

$$\begin{aligned}(uv)^{(n+1)} &= u^{(n+1)} v + \sum_{k=1}^{n} C_n^k u^{(n-k+1)} v^{(k)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} u^{(n+1-k)} v^{(k)} \\ &\quad + uv^{(n+1)} \\ &= u^{(n+1)} v + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) u^{(n+1-k)} v^{(k)} + uv^{(n+1)} \\ &= u^{(n+1)} v + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k u^{(n+1-k)} v^{(k)} + uv^{(n+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(n+1-k)} v^{(k)}\end{aligned}$$

即 $n+1$ 时公式也成立，由数学归纳法知，公式对一切自然数成立.

对于多个函数乘积的高阶微商，亦有类似的公式. 它也可以从多项式幂的展开式中按前述法则得到.

例 1 求函数 $y=x^2\cos ax$ 的 50 阶微商 $y^{(50)}$.

解 由于函数 y 是两个函数 $u=\cos ax$ 与 $v=x^2$ 的乘积. 故可用莱布尼兹公式求其高阶微商. 因为

$$u^{(n)}=a^n\cos\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$v'=2x, v''=2, v'''=v^{(4)}=\cdots=0$$

所以

$$y^{(50)} = a^{50} x^2 \cos(ax + 25\pi) + 50 \cdot 2xa^{49} \cos\left(ax + \frac{49}{2}\pi\right)$$

$$+\frac{50\cdot 49}{2}\cdot 2a^{48}\cos(ax+24\pi)$$

$$=-a^{50}x^2\cos ax-100a^{49}x\sin ax+2450a^{48}\cos ax$$

$$=a^{48}(2450-a^2x^2)\cos ax-100a^{49}x\sin ax$$

例 2 证明勒让德(Legendre)多项式

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n]$$

满足微商关系式

$$(x^2-1)P''_n+2xP'_n-n(n+1)P_n=0$$

证 令 $y=(x^2-1)^n$,故有

$$y'=2nx(x^2-1)^{n-1}$$

于是有

$$(x^2-1)y'=2nx(x^2-1)^n$$

两端对 x 求$(n+1)$阶微商,利用莱布尼兹公式,得

$$(x^2-1)y^{(n+2)}+2(n+1)xy^{(n+1)}+n(n+1)y^{(n)}$$
$$=2nxy^{(n+1)}+2n(n+1)y^{(n)}$$

化简后,得到

$$(x^2-1)y^{(n+2)}+2xy^{(n+1)}-n(n+1)y^{(n)}=0$$

由于

$$P''_n=\frac{1}{2^n n!}y^{(n+2)},P'_n=\frac{1}{2^n n!}y^{(n+1)},P_n=\frac{1}{2^n n!}y^{(n)},$$

因此将前面的等式乘以$\frac{1}{2^n n!}$就得到所要证明的关系式.

例 3 设 $y=\mathrm{e}^{ax}\sin bx$,计算 $y^{(n)}$

解 可令 $u=\mathrm{e}^{ax}$,$v=\sin bx$,则有

$$u^{(k)}=a^k\mathrm{e}^{ax},v^{(k)}=b^k\sin\left(bx+\frac{k\pi}{2}\right)$$

应用莱布尼兹公式,得到

$$y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k\mathrm{e}^{ax}\sin\left(bx+\frac{k\pi}{2}\right)$$

但是，这个结果较繁，使用不便. 今换一种方法. 因为

$$y'=ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\sin(bx+\varphi)$$

其中 $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$，且 $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

应用逐阶整理法，可得到

$$y^{(n)}=(\sqrt{a^2+b^2})^n e^{ax}\sin(bx+n\varphi)$$

这种先将函数 $y=f(x)$ 化简，再求高阶微商的方法，由于避开了结果复杂的莱布尼兹公式，因此大家应该掌握.

例 4 设 $y=\dfrac{2x}{x^2-1}$，求 $y^{(n)}$

解 因为

$$y=\frac{2x}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=(x-1)^{-1}+(x+1)^{-1}$$

所以

$$y^{(n)}=[(x-1)^{-1}]^{(n)}+[(x+1)^{-1}]^{(n)}$$
$$=(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}}+\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$$

例 5 设 $y=\operatorname{arctg}x$，求 $y^{(n)}(0)$.

解 因为 $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$，在 $(-\infty,+\infty)$ 上存在任何阶微商，而

$$(1+x^2)y'=1$$

对上述等式两端求 n 阶微商，应用莱布尼兹公式，则有

$$(1+x^2)y^{(n+1)}+2nxy^{(n)}+n(n-1)y^{(n-1)}=0$$

令 $x=0$，化简后，得到递推公式

$$y^{(n+1)}(0)=-n(n-1)y^{(n-1)}(0)$$

当 n 为奇数时，最后递推到 $y'(0)$；当 n 为偶数时，最后递推到 $y(0)$，因为 $y(0)=0$，$y'(0)=1$，故有

$$y^{(n)}=\begin{cases}y^{(2k)}(0)=0\\ y^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!,k=0,1,2,\cdots\end{cases}$$

2.3.3 高阶微分

高阶微分的定义与高阶微商完全类似. 函数 $y=f(x)$的一阶微分 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$,一般来说仍是 x 的函数. 因此又可以讨论 $\mathrm{d}y$ 求微分的问题.

定义 函数 $y=f(x)$的一阶微分 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$ 在点 x 的微分称为 $y=f(x)$在该点的二阶微分,记为 d^2y,即

$$\mathrm{d}^2y=\mathrm{d}(\mathrm{d}y)\quad\text{或}\quad \mathrm{d}^2f(x)=\mathrm{d}[\mathrm{d}f(x)]$$

同样函数 $y=f(x)$在点 x 的二阶微分 d^2y 的微分称为 $y=f(x)$在该点的三阶微分,记为 $\mathrm{d}^3y=\mathrm{d}(\mathrm{d}^2y)$;一般地,函数 $y=f(x)$在点 x 的$(n-1)$阶微分 $\mathrm{d}^{n-1}y$ 的微分称为 $y=f(x)$在该点的 n 阶微分,记为

$$\mathrm{d}^ny=\mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1}y)\quad\text{或}\quad \mathrm{d}^nf(x)=\mathrm{d}[\mathrm{d}^{n-1}f(x)]$$

二阶以及二阶以上的微分,统称为高阶微分. 那么如何来计算高阶微分呢? 当 x 是自变量时,函数 $y=f(x)$的一阶微分为

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$$

其中一阶微商 $f'(x)$仍是 x 的函数,而自变量的微分 $\mathrm{d}x=\Delta x$ 与 x 无关,所以在对 $\mathrm{d}y$ 进行微分时,$\mathrm{d}x$ 可像常数因子一样提到微商符号外,于是有

$$\mathrm{d}^2y=\mathrm{d}(\mathrm{d}y)=(\mathrm{d}y)'\mathrm{d}x=(f'(x)\mathrm{d}x)'\mathrm{d}x=f''(x)(\mathrm{d}x)^2$$

同样可得

$$\mathrm{d}^3y=\mathrm{d}(\mathrm{d}^2y)=[f''(x)(\mathrm{d}x)^2]'\mathrm{d}x=f'''(x)(\mathrm{d}x)^3$$

一般地,有

$$\mathrm{d}^ny=f^{(n)}(x)(\mathrm{d}x)^n$$

习惯上,把$(\mathrm{d}x)^n$ 记为 $\mathrm{d}x^n$. 于是有

$$\mathrm{d}^ny=f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n$$

这里的 $\mathrm{d}x^n$ 表示 $\mathrm{d}x$ 的 n 次幂. 从而可见,函数 $y=f(x)$的 n 阶微分等于它的 n 阶微商与 $\mathrm{d}x$ 的 n 次幂的乘积. 因此求函数的 n 阶微分 d^ny 也不需用什么新方法,而且又可得到

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x)$$

这就是说，当 x 为自变量时，函数的 n 阶微商就是它的 n 阶微分与自变量的微分 dx 的 n 次幂之商.

一阶微分具有形式的不变性，即不论 x 是自变量或是中间变量，函数 $y=f(x)$ 的微分都可写为

$$dy = f'(x)dx.$$

一阶微分的这种性质对高阶微分是否还成立呢？换句话说，当 x 不是自变量时，函数的高阶微分是否还可表示成

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n.$$

回答一般是否定的. 因为当确定高阶微分时，dx 已不能再算作常量，从而得到的表达式就完全不同了. 例如，应用乘积的微分公式，二阶微分这时可以表示成

$$\begin{aligned} d^2 y &= d[f'(x)dx] = d[f'(x)]dx + f'(x)d(dx) \\ &= f''(x)dx^2 + f'(x)d^2 x. \end{aligned}$$

显然，与 x 为自变量时的二阶微分相比，它多了一项 $f'(x)d^2x$. 但是，若 x 是 t 的线性函数，就是说 $x=at+b$，则 $dx=adt$ 仍可算作常量，这样的复合函数之高阶微分又化成以前的表达式了. 于是我们有下述结论：

若 x 是自变量的线性函数，则高阶微分的形式仍具有不变的性质. 而在其它情形，微分形式的不变性就不再成立了.

例 设 $y=\ln x$，求 d^2y 与 d^3y，其中 x 为自变量 t 的三次可微函数.

解 由一阶微分形式的不变性得

$$dy = \frac{dx}{x}$$

所以

$$d^2 y = d\left(\frac{1}{x}dx\right) = d\left(\frac{1}{x}\right)\cdot dx + \frac{1}{x}d(dx) = -\frac{1}{x^2}dx^2 + \frac{1}{x^2}d^2 x;$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^3 y &= \mathrm{d}\left(-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x^2+\frac{1}{x}\mathrm{d}^2 x\right)\\ &= \mathrm{d}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x^2-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}(\mathrm{d}x^2)+\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}^2 x+\frac{1}{x}\mathrm{d}(\mathrm{d}^2 x)\\ &= \frac{2}{x^3}\mathrm{d}x^3-\frac{2}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}^2 x-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}^2 x+\frac{1}{x}\mathrm{d}^3 x\\ &= \frac{2}{x^3}\mathrm{d}x^3-\frac{3}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}^2 x+\frac{1}{x}\mathrm{d}^3 x\end{aligned}$$

复习思考题

1. 写出函数乘积的高阶微商的莱布尼兹公式. 这个公式在哪些情况下用起来特别方便?

2. 写出:x^n, $\sin x$, $\cos x$, $\log_a(1+x)$, e^{ax}, a^x 的 n 阶微商.

3. 记号 $\mathrm{d}x^3$、$(\mathrm{d}x)^3$、$\mathrm{d}(x^3)$有什么区别?

4. 所谓"一阶微分形式的不变性"对于高阶微分. 这种不变性是否还存在?

5. 指出下面计算的错误:

(1)设 $x=a\sin\theta$, $y=b\cos\theta$. 因为

$$\mathrm{d}y=-b\sin\theta\mathrm{d}\theta,\ \mathrm{d}x=a\cos\theta\mathrm{d}\theta,\ \mathrm{d}^2 y=-b\cos\theta\mathrm{d}\theta^2$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{-b\cos\theta\mathrm{d}\theta^2}{(a\cos\theta\mathrm{d}\theta)^2}=\frac{-b\cos\theta\mathrm{d}\theta^2}{a^2\cos^2\theta\mathrm{d}\theta^2}=-\frac{b}{a^2\cos\theta}$$

(2)设 $x=a\sin\theta$, $y=b\cos\theta$.

因为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}(b\cos\theta)}{\mathrm{d}(a\sin\theta)}=\frac{-b\sin\theta\mathrm{d}\theta}{a\cos\theta\mathrm{d}\theta}=-\frac{b}{a}\mathrm{tg}\theta$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)'=\left(-\frac{b}{a}\mathrm{tg}\theta\right)'=-\frac{b}{a}\sec^2\theta$$

习题 2.3

1. 求下列函数的二阶微商

(1) $y=e^{-x^2}$　　(2) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) $y=x^2a^x$　　(4) $y=\sin\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$

(5) $y=(1+x^2)\operatorname{arctg}x$　　(6) $y=x[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]$

2. 设 $u=\varphi(x)$，$v=\psi(x)$为可微商两次的函数，求 y''

(1) $y=\ln\dfrac{u}{v}$　　(2) $y=\sqrt{u^2+v^2}$

3. 求下列参数方程的$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$

(1) $x=\ln(1+t^2)$　　$y=t-\operatorname{arctg}t$

(2) $x=a(t-\sin t)$　　$y=a(1-\cos t)$

(3) $x=a\varphi\cos\varphi$　　$y=a\varphi\sin\varphi$

(4) $x=a\cos^3\varphi$　　$y=a\sin^3\varphi$

4. 设 $x=\sqrt{1+t}$，$y=\sqrt{1-t}$. 验证$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{2}{y^3}$

5. 验证函数 $y=A\sin(\omega t+\delta)$满足关系式

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=0$$

6. 设函数 $f(x)$有三阶微商求 y''，y'''

(1) $y=f(x^2)$　　(2) $y=f(e^x+x)$

(3) $y=\ln f(x)$　　(4) $y=e^{f(ax+b)}$

7. 若 r_1，r_2，是代数方程 $r^2+pr+q=0$ 的两个根. 证明：函数 $y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$满足关系式

$$y''+py'+qy=0$$

其中 c_1，c_2，是任意两个常数.

8. 求下列函数的高阶微商

(1) $(x^2e^x)^{(50)}$　　(2) $[\ln(1+x)^x]^{(30)}$

(3) $[(x^2+1)\sin x]^{30}$　　(4) $\left(\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}\right)^{(100)}$

(5) $\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)^{(n)}$　　(6) $\left(\dfrac{e^x}{x}\right)^{(n)}$

(7) $\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{(n)}$　　(8) $f(x)=\arcsin x$，求 $f^{(n)}(0)$

9. 对于以下两种情形:(1)x 为自变量,(2)x 为中间变量,分别求函数 $y=e^x$ 的一阶微分 dy 和二阶微分 d^2y.

10. 设 u 与 v 都是变量 x 的可微分两次的函数,试对下列函数求 d^2y:

(1)$y=u\cdot v$　　　　　　(2)$y=\dfrac{u}{v}$

11. 设 $y=e^u$,其中 u 是 x 的可微分足够多次的函数,求 d^3y.

12. 设 $y=\sin x, x=e^t$,试用(1)x 和 dx;(2)t 和 dt 表示 d^2y.

2.4 微分学的基本定理

这一节里所述的罗尔(Rolle)定理、拉格朗日(Lagrange)定理与柯西(Cauchy)定理,统称为微分学基本定理. 它们在理论上与应用中有着重要意义. 虽然微商是研究函数性质的重要工具,但仅从微商 的概念出发并不能充分体现它的作用,它需要建立在微分学基本定理的基础上才能充分发挥作用. 在这几个定理中,拉格朗日定理尤为重要,它刻画了函数在整个区间上的变化与微商概念的局部性之间的联系,是研究函数性质的理论依据.

2.4.1 费马定理与罗尔定理

为了今后讨论问题的方便,先给出函数 $f(x)$在点 x_0 的局部极值或极值的概念.

定义 设函数 $f(x)$在点 x_0 的邻域内有定义,若存在正数 δ,对任意的 h,当$|h|<\delta$时有

$$f(x)=f(x_0+h)\leqslant f(x_0)\qquad(\text{或 } f(x)\geqslant f(x_0))$$

则称函数 $f(x)$在点 x_0 取极大值(或极小值),也称取局部极大值(或局部极小值). 这时点 x_0 称为 $f(x)$的极大值点(或极小值点). 函数 $f(x)$在点 x_0 的极大值或极小值统称为在点 x_0 的极值或局部极值;极大值点或极小值点统称为极值点.

在这个定义中,$f(x)=f(x_0)$可以成立. 例如在点 x_0 的邻域内是常值函数,总有 $f(x)=f(x_0)$,即常值函数在点 x_0 既取到极

大值也取到极小值.

如图 2.8 所示的函数在点 x_0 与 x_2 取到局部极大值;在点 x_1 与 x_3 取到局部极小值.在讨论连续函数的性质时,我们曾引入了函数在一个闭区间上的最大值和最小值的概念.从图 2.8 中可以看出,函数在某一点取到了极大值(或极小值),并不一定就在该点取到整个区间上的最大值(或最小值).例如,函数在点 x_0 取到极大值,但它并非是整个区间上的最大值.反之,若函数在区间的某个内点上取到了最大值(或最小值),则一定就在该点取到极大值(或极小值).

现在来研究,若函数在某一点取到了极值,那么它在这点有何特别的性质?从图 2.8 可看出,凡在函数取到极值的点,其切线都具有水平方向.也就是说,若可微函数在点 x_0 取到极值,则必有 $f'(x_0)=0$.下面将分析证明这个从几何直观上得出的结论.

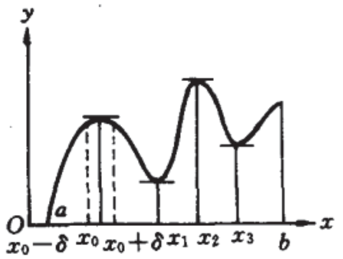


图 2.8

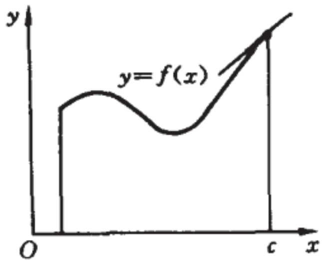


图 2.9

费马定理 若函数 $f(x)$ 在其定义区间上的一个内点 c 处取到极值,且函数在这点可微,则必有

$$f'(c)=0$$

证 不妨设函数 $f(x)$ 在点 c 取到局部极小值.这时存在某个正数 δ,对任意的 h,当 $|h|<\delta$ 时,有

$$f(c+h)\geqslant f(c)$$

或

$$f(c+h)-f(c)\geqslant 0$$

当 $h<0$ 时,有

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leqslant 0$$

由极限的保号性,故有

$$f'_-(c)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leqslant 0$$

当 $h>0$ 时,有

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\geqslant 0$$

故得到

$$f'_+(c)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\geqslant 0$$

但已知函数 $f(x)$在点 c 可微,即

$$f'(c)=f'_+(c)=f'_-(c)$$

故有 $f'_+(c)=f'_-(c)=0$,即 $f'(c)=0$.

对函数 $f(x)$在 c 取到局部极大值的情形,可用同样方法证明.

注意 1,费马定理的条件 $c\in(a,b)$,不能改为 $c\in[a,b]$,即不能把 c 取在区间的端点处. 例如 $y=\sin x$,$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. 在 $x=0$ 处有极小值,但在 $x=0$ 处微商不为零. 一般地如图 2.9.

注意 2,函数 $f(x)$在点 c 可微的条件也不能随便去掉. 例如函数 $y=|x|$在 $x=0$ 处取极小值,但不可微,自然不能有 $f'(0)=0$;

注意 3,费马定理中给出的仅是必要条件,但并不充分,即 $f'(c)=0$时,c 也未必是极值点. 例如函数 $y=x^3$,虽然 $f'(0)=0$,但 $x=0$ 不是极值点.

由费马定理可以得出一个非常有用的定理.

罗尔定理 若函数 $f(x)$满足下列条件:

1. 在闭区间$[a,b]$上连续;

2. 在开区间(a,b)内可微;

3. $f(a)=f(b)$.

则在(a,b)内至少存在一点ξ,使得

$$f'(\xi)=0, a<\xi<b$$

证 由条件1和在闭区间上连续函数的性质可知,函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上取到最大值M与最小值m.下面分两种情形来讨论.

(1)若$M=m$.由最大值与最小值的定义知,对任意的$x\in[a,b]$,有$m\leqslant f(x)\leqslant M$.故函数$f(x)$在$[a,b]$上必为常值函数:$f(x)\equiv M$.因此对任意的$x\in[a,b]$,有$f'(x)=0$.这时在$(a,b)$内任取一点作为$\xi$,有

$$f'(\xi)=0$$

(2)若$M>m$.由条件3知,M,m当中至少有一个不等于$f(b)$.不妨设$M\neq f(b)$.因此$M\neq f(a)$.这表明最大值M只能在区间$[a,b]$的内部某点ξ达到,即有

$$f(\xi)=M,\ a<\xi<b$$

由条件2知,函数$f(x)$在(a,b)内可微,故$f'(\xi)$存在,且$f(\xi)$是函数$f(x)$的最大值,并在(a,b)的内部达到,从而是极大值.于是由费马定理知

$$f'(\xi)=0,\ a<\xi<b.$$

注意:罗尔定理中的条件是充分条件,若不满足定理的条件,结论可能不成立.

另外,罗尔定理肯定了在(a,b)内至少存在一点ξ,使$f'(\xi)=0$.尽管没有指明ξ的确切值,但它仍有重要的应用.

例1 不用求出函数$f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$的微商,应用罗尔定理,说明方程$f'(x)=0$有几个实根,并指出它们所在区间.

解 因为函数$f(x)$在$[-1,1]$上满足罗尔定理的条件,故至少存在一点$c_1\in(-1,1)$,使得

$$f'(c_1) = 0$$

同样可证，在区间(1,2)与(2,3)内分别至少存在一点 $c_2 \in (1,2)$ 与 $c_3 \in (2,3)$，使得

$$f'(c_2) = 0 \text{ 与 } f'(c_3) = 0$$

由于 $f(x)$是 x 的四次函数，故 $f'(x)$是 x 的三次函数. 因此 $f'(x)=0$ 是 x 的三次代数方程，它最多只有三个实根. 今已证明它确实有三个实根，且分别位于区间$(-1,1)$，$(1,2)(2,3)$内.

在证明题中也要用到罗尔定理.

例 2 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可微，且 $f(a)=f(b)=0$，则在(a,b)内存在一点 ξ，使

$$f(\xi) + f'(\xi) = 0, a < \xi < b$$

证 取 $F(x)=f(x)e^x$. 故 $F(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可微，且 $F(a)=F(b)=0$. 由罗尔定理知，在(a,b)存在一点 ξ，使

$$F'(\xi) = 0,\ a < \xi < b$$

即有

$$f'(\xi)e^\xi + e^\xi f(\xi) = 0$$

或

$$f(\xi) + f'(\xi) = 0,\ a < \xi < b$$

罗尔定理有简单的几何意义. 若一条光滑曲线(即曲线上每一点都有不垂直于 x 轴的切线)的两个端点有相同的纵坐标，那么在这条曲线上至少可以找到这样一点，使得在该点的切线平行于 x 轴，亦即平行于两端点的联线(图 2.10).

2.4.2 中值定理

现在考虑一般的情形，若曲线的两个端点 A 与 B 的纵坐标不相同，即 $f(a)\neq f(b)$. 这时是否能在曲线 $y=f(x)$上找到一点，使得在该点的切线仍平行于两个端点的联线 AB 呢?

由于直线 AB 的斜率等于$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，而 $f'(x)$表示曲线 y

$=f(x)$上横坐标为 x 的点之切线的斜率,因此上面涉及到的问题,又可叙述成:在区间(a,b)内是否能找到一点 ξ,使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

或

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\ a<\xi<b$$

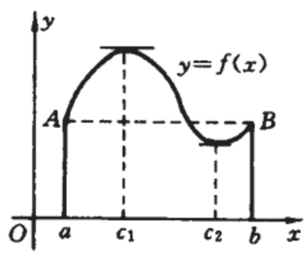


图 2.10

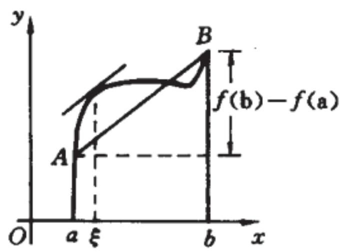


图 2.11

从几何直观说明(图 2.11)这样的点 ξ 是存在的. 于是又得到一个很重要的定理.

拉格朗日定理 若函数 $f(x)$满足下列条件:

1. 在闭区间$[a,b]$上连续;

2. 在开区间(a,b)内可微.

则在开区间(a,b)内至少存在一点 ξ,使

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

证 将拉格朗日定理与罗尔定理的三个条件相比,这里少了第三个条件. 为此我们设想在 $f(x)$上再加上一个适当的函数,构造出一个新的函数 $F(x)$,使 $F(x)$不但满足条件 1,2,而且有 $F(a)=F(b)$. 把罗尔定理用于 $F(x)$,从而得到 $f'(x)$的某种性质. 最简单的是加上 x,即设$F(x)=f(x)+x$. 显然 $F(a)\neq F(b)$,其原因是 x 在区间$[a,b]$的两个端点取固定值 a,b,一般不能使 $f(a)+a=f(b)+b$. 于是启发我们给 x 乘以一个"伸缩系数",即设$F(x)=f(x)+\lambda x$,其中 λ 为待定系数. 令 $F(a)=F(b)$

或 $f(a)+\lambda a=f(b)+\lambda b$. 因此只要取

$$-\lambda=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

于是,所构造的函数

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$$

就在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可微,且 $F(a)=F(b)$,由罗尔定理可知,在(a,b)内至少存在一点 ξ,使 $F'(\xi)=0$,即有

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

故

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\ a<\xi<b$$

或

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\ a<\xi<b$$

上述公式称为拉格朗日中值公式.

为了应用的方便,拉格朗日中值公式常常改写为其它形式.

由于 $a<\xi<b$,故有 $0<\dfrac{\xi-a}{b-a}<1$,令 $\theta=\dfrac{\xi-a}{b-a}$,$0<\theta<1$ 即有

$$\xi=a+\theta(b-a)$$

这时在(a,b)内的一点 ξ,就相当于在$(0,1)$内存在一点 θ,于是有形式

$$f(b)-f(a)=f'[a+\theta(b-a)](b-a),\ 0<\theta<1$$

特别,若 $a=x$,$b=x+\Delta x$, $b-a=\Delta x$,又有形式

$$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,\ 0<\theta<1$$

虽然,拉格朗日定理并没有指明点 ξ 在区间(a,b)内的确切位置,但并不影响它在高等数学中的广泛应用,它不仅是用微商的局部性研究函数整体性的重要工具,而且是沟通函数与其微商之间关系的桥梁.

应用拉格朗日定理可证明不等式.

例 1 证明：当 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ 时，有不等式

$$\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha}<\mathrm{tg}\beta-\mathrm{tg}\alpha<\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}$$

成立.

证 令 $f(x)=\mathrm{tg}x$，则函数 $f(x)$ 在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续，在 (α,β) 内可微. 应用拉格朗日定理，得到

$$f(\beta)-f(\alpha)=f'(\xi)(\beta-\alpha),\ \alpha<\xi<\beta$$

即

$$\mathrm{tg}\beta-\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{\cos^2\xi}(\beta-\alpha),\ \alpha<\xi<\beta$$

当 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ 时，函数 $\cos^2 x$ 严格减的，故 $\frac{1}{\cos^2 x}$ 严格增，从而得到

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}<\frac{1}{\cos^2\xi}<\frac{1}{\cos^2\beta}$$

但 $\beta-\alpha>0$，故有

$$\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha}<\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\xi}<\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}$$

或

$$\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha}<\mathrm{tg}\beta-\mathrm{tg}\alpha<\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}.$$

推论 1 设函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可微，且 $f'(x)\equiv 0$，则在 (a,b) 内，$f(x)=c$（常数）.

证 在 (a,b) 内取定一点 x_0 及任意一点 x. 显然函数 $f(x)$ 在闭区间 $[x_0,x]$ 或 $[x,x_0]$ 上满足拉格朗日定理的条件. 因此在 x_0 与 x 之间至少存在一点 ξ，使

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$$

已知 $f'(\xi)=0$，于是有

$$f(x)=f(x_0).$$

令 $f(x_0)=c$，并由 x 的任意性可知，函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内，有

$$f(x)=c(\text{常数})$$

我们已知，常值函数的微商是零. 推论 1 指出微商恒为零的函数必是常值函数.

推论 2 若函数 $f(x)$，$g(x)$在开区间(a,b)内可微，且对任意的 $x\in(a,b)$，$f'(x)\equiv g'(x)$，则在(a,b)内，$f(x)$与 $g(x)$至多相差一个常数，即有

$$f(x)=g(x)+c$$

其中 c 为常数.

证 由假设条件知，对任意的 $x\in(a,b)$，有$[f(x)-g(x)]'\equiv 0$，再由推论 1 知在(a,b)内，有

$$f(x)-g(x)=c(\text{常数})$$

或

$$f(x)=g(x)+c$$

推论 2 在第三章中还要用到，这里先应用它来证明恒等式.

例 2 证明恒等式：

(1) $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$，$|x|\leqslant 1$

(2) $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2}$，$|x|<+\infty$

证 (1) 令 $f(x)=\arcsin x$，$g(x)=-\arccos x$. 当$|x|<1$时，这两个函数是可微的，并且

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=g'(x)$$

由推论 2 知，它们至多相差一个常数，即

$$\arcsin x+\arccos x=c$$

为了确定常数 c，可令 $x=0$，即得 $c=\frac{\pi}{2}$，从而得到

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},\ |x|<1,$$

显然当 $x=\pm 1$ 时，这个三角等式仍成立. 从而得到所要证明

的(1).

采用同样的方法可证明(2).

最后对拉格朗日定理作一推广.

柯西中值定理 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足下列条件:

(1)在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

(2)在开区间 (a,b) 内可微;

(3)对任意的 $x\in(a,b)$, $g'(x)\neq 0$.

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\ a<\xi<b$$

证 首先应用拉格朗日中值定理,得到

$$g(b)-g(a)=g'(\eta)(b-a),\ a<\eta<b$$

而 $b-a>0$, $g'(\eta)\neq 0$,故 $g(b)-g(a)\neq 0$.

其次,由于当 $g(x)=x$ 时,柯西中值定理就是拉格朗日定理.因此 $g(x)$ 的地位与该定理中的 x 类似. 于是启发我们应作辅助函数 $F(x)=f(x)+\lambda g(x)$,其中 λ 为待定常数. 令 $F(a)=F(b)$,有

$$f(a)+\lambda g(a)=f(b)+\lambda g(b)$$

只需

$$\lambda=-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

这时, $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)$

在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可微,且 $F(a)=F(b)$. 根据罗尔定理,在 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使 $F'(\xi)=0$,即有

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=f'(\xi)$$

由于 $g'(\xi)\neq 0$,故有

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},a<\xi<b$$

这个公式也叫做柯西中值公式. 特别,当 $g(x)=x$ 时,它就是

拉格朗日中值公式.故柯西中值定理是拉格朗日定理的推广.

复习思考题

1. 极大值和最大值有什么区别？有什么联系？

2. 设 $f(x)$ 在 x_1 取得极大值，在 x_2 取得极小值，是否一定有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$？试画图说明之.

3. 若 $f(x)$ 在点 x_0 的微商等于 0，即 $f'(x_0)=0$，$f(x)$ 是否一定在点 x_0 取到极值？举例说明之.

4. 若函数 $f(x)$ 在区间的内点 x_0 处取到极值，是否一定有 $f'(x_0)=0$？考查函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 的情形.

5. 在罗尔定理中，三个条件(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(2) $f(x)$ 在 (a,b) 内可微，(3) $f(a)=f(b)$ 中有一条件不成立，那么结论就不正确了.试分别举例说明之.

6. 试用几何语言叙述费马、罗尔、拉格朗日三条定理.

7. 设 $ab<0$，$f(x)=\dfrac{1}{x}$，$a\leqslant x\leqslant b$，问在区间 $[a,b]$ 上拉格朗日定理的结论是否成立？为什么？

8. 设 $f(x)=x^2$，$g(x)=x^3$，$-1\leqslant x\leqslant 1$，问在区间 $[-1,1]$ 上柯西中值定理的结论是否成立？为什么？

习题 2.4

1. 验证罗尔定理对函数 $f(x)=x^3+4x^2-7x-10$ 在闭区间 $[-1,2]$ 上的正确性.

2. (1)验证拉格朗日定理对函数 $f(x)=\ln x$ 在闭区间 $[1,\mathrm{e}]$ 上的正确性.

(2)验证拉格朗日定理对函数 $f(x)=\operatorname{arctg}x$ 在闭区间 $[0,1]$ 上的正确性.

3. 应用罗尔定理证明：方程 $x^3-3x+c=0$ 在闭区间 $[0,1]$ 内不可能有两个不同的实根.其中 c 为任意实数.

4. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上有二阶微商，且 $f(2)=f(1)=0$，又 $F(x)$

$=(x-1)^2 f(x)$，则在区间(1,2)内至少有一点 ξ，使得 $F''(\xi)=0$.

5. 设对于所有的实数对 x,y，不等式

$$|f(y)-f(x)|\leqslant M|y-x|^2,(M\text{为正常数})$$

都成立. 证明：在 $-\infty<x<+\infty$ 上 $f(x)\equiv$常数.

6. (1)不用求出函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的微商，应用罗尔定理. 说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根，并指出它们所在的区间.

(2)若实系数多项式

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,(a_0\neq 0)$$

的根全是实根，则其逐次微商 $P'_n(x),P''_n(x),\cdots P_n^{(n-1)}(x)$ 也仅有实根，试证明之.

7. 应用拉格朗日定理证明下列不等式

(1)当 $b>a>0,n>1$ 时，有

$$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$$

(2)当 $x\neq 0$ 时，$e^x>1+x$

(3)当 $0<b\leqslant a$ 时，

$$\frac{a-b}{a}\leqslant \ln\frac{a}{b}\leqslant\frac{a-b}{b}$$

(4)当 $x>0$ 时，

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$$

(5)当 $0<a<b$ 时，

$$(a+b)\ln\frac{a+b}{2}<a\ln a+b\ln b$$

8. 证明下列恒等式

(1) $\operatorname{arctg}x=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(2) $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}, & \text{当 } x>-1\\ -\dfrac{3\pi}{4}, & \text{当 } x<-1\end{cases}$

(3) 当 $|x|\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi$.

9. 设 $f(x),g(x)$ 均为可微函数，$f(0)=g(0)$，且当 $x>0$ 时，有 $f'(x)>g'(x)$. 试证当 $x>0$ 时，恒有 $f(x)>g(x)$.

10. 试证明：若函数 $f(x)$ 在有穷区间 (a,b) 内可微，但无界，则其导函数 $f'(x)$ 在区间 (a,b) 内也无界. 其逆定理不真，举例说明.

11. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)=0$ 及 $f'(a)\cdot f'(b)>0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少存在一点 c，使 $f(c)=0$.

12. 若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 可微，$f(0)=0$，$f'(x)$ 严格增，证明 $\dfrac{f(x)}{x}$ 严格增.

13. 证明方程

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x-a_n=0$$

（其中 $a_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n-1, a_n>0$）有且仅有一个正根.

14. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可微分二次，且满足 (1) $f(a)>0$，(2) $f'(a)<0$，(3) 当 $x>a$ 时，$f''(x)\leqslant 0$. 试证在区间 $(a,+\infty)$ 内有且仅有方程 $f(x)=0$ 的一个实根.

15. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且当 $x>a$ 时，$f'(x)\geqslant k>0$，k 为常数，证明：若 $f(a)<0$，则方程 $f(x)=0$ 在区间 $(a,+\infty)$ 内有且仅有一个实根.

题中条件 $f'(x)\geqslant k>0$ 能否改为 $f'(x)>0$? 试在区间 $[1,+\infty)$ 上研究函数 $y=-\dfrac{1}{x}$.

16. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微，且 $|f'(x)|<1$，又 $f(0)=f(1)$. 证明对于 $[0,1]$ 上的任意两点 x_1,x_2，恒有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{1}{2}$.

17. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上可微，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$. 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

2.5 泰勒(Taylor)公式

在分析函数的某些局部性质时，通常是在这个局部范围内，用一些构造简单的函数去近似代替比较复杂的函数，以简化所研究的问题. 而多项式是结构最简单的一种函数，这是因为计算一个多项式的值只要进行加法和乘法两种运算. 因此作为构造简单的函数自然首先应该选取多项式. 这就得到了著名的泰勒公式.

2.5.1 泰勒公式

(一)泰勒多项式

在局部范围内,用多项式来近似表示一个任意可微函数,实际上在应用微分作近似计算时就已经讨论过了.若函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微,有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0).$$

或

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x)(x-x_0)$$

上式右端是关于 $x-x_0$ 的一次多项式,且当 $x-x_0$ 越小时,这种用一次多项式去近似函数 $f(x)$ 的程度就越好.但它只精确到关于 $(x-x_0)$ 的高级无穷小量 $o(x-x_0)$,即允许误差为 $o(x-x_0)$.

一般地,若允许有误差 $o((x-x_0)^n)$.这时假设 $f(x)$ 在点 x_0 附近有直到 $n+1$ 阶的连续微商,我们希望找到一个关于 $x-x_0$ 的 n 次多项式

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n$$

但它在 x_0 的附近可以近似地表示函数 $f(x)$,并且它们之间的误差是关于 $(\Delta x)^n=(x-x_0)^n$ 的高级无穷小量,即有

$$f(x)-P_n(x)=o((x-x_0)^n)$$

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 都是待定常数.这种想法能否实现,关键在于是否存在 $(n+1)$ 个系数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 使

$$f(x)=P_n(x)+o((x-x_0)^n)$$

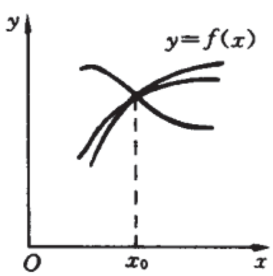


图 2.12

由于要求 $P_n(x)$ 能在点 x_0 附近很好地表示 $f(x)$.自然应该要求它们在点 x_0 的值相等,即

$$P_n(x_0)=f(x_0)$$

其次,从图 2.12 看出,在点 x_0 与 $y=f(x)$ 相切的曲线比其它曲线在点 x_0 附近更接近于 $f(x)$.因此必须要求多项式 $y=P_n(x)$ 所表示的曲线与 $y=f(x)$ 在点 x_0 有相同的切线,

即

$$P'_n(x_0) = f'(x_0)$$

为使 $P_n(x)$ 与 $f(x)$ 在点 x_0 保持更高阶的接触，应要求

$$P''_n(x_0)=f''(x_0)$$
$$P'''_n(x_0)=f'''(x_0)$$
$$\cdots \quad \cdots$$
$$P_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)$$

现在就来根据这些条件确定多项式 $P_n(x)$. 由于

$$P'_n(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1}$$
$$P''_n(x)=2a_2+3\cdot 2a_3(x-x_0)+\cdots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$$
$$\cdots \quad \cdots$$
$$P_n^{(x)}(x)=n(n-1)\cdots 2a_n$$

代入上述条件，从而得到

$$a_0 = f(x_0), a_1 = f'(x_0), 2a_2 = f''(x_0), \cdots, n!a_n = f^{(n)}(x_0)$$

或

$$a_0 = f(x_0), a_1 = f'(x_0), a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \cdots, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

因此对给定的函数 $f(x)$，多项式 $P_n(x)$ 就唯一地确定了，且有

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

并称它为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的 n 阶泰勒多项式.

（二）泰勒公式

泰勒(Taylor)**定理**

设函数 $f(x)$ 在某一区间内具有直至 $n+1$ 阶的微商，而 x_0 是这区间上的一个点，则对这区间内的任意点 x，$f(x)$ 可按 $x-x_0$ 的方幂展开成

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，而 ξ 是 x_0 与 x 之间的一点.

证 与证明拉格朗日定理类似. 考虑函数 $f(x)$ 与 $P_n(x)$ 的差

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)$$

设 $R_n(x)=\lambda(x-x_0)^{n+1}$，当任意固定 x 与 x_0 时，让 λ 是待定的常数，作辅助函数

$$F(t)=f(t)+\frac{f'(t)}{1!}(x-t)+\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n+\lambda(x-t)^{(n+1)}$$

根据假设函数 $F(t)$ 在区间 (x_0,x)（或 (x,x_0)）内可微，而在 $[x_0,x]$（或 $[x,x_0]$）上连续，且有 $F(x_0)=f(x)=F(x)$. 由于 $F(t)$ 满足罗尔定理的全部条件，因此在 x_0 与 x 之间存在一点 ξ，使 $F'(\xi)=0$. 因为

$$F'(t)=f'(t)+[f''(t)(x-t)-f'(t)]$$
$$+\left[\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2-f''(t)(x-t)\right]+\cdots$$
$$+\left[\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\right]$$
$$-(n+1)\lambda(x-t)^n$$

所以有

$$0=F'(\xi)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n-(n+1)\lambda(x-\xi)^n$$

从而得到

$$\lambda=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

故有

$$R_n(x)=\lambda(x-x_0)^{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

其中 ξ 在 x_0 与 x 之间.

这个定理中的公式称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的 n 阶泰勒公式，而 $R_n(x)$ 叫做它的**余项**.

由于 ξ 位于 x 与 x_0 之间，故可仿照拉格朗日公式引入 $\theta=\frac{\xi-x_0}{x-x_0}$. 则有

$$\xi = x_0+\theta(x-x_0) \quad 0<\theta<1$$

从而余项又可写成

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

如果在泰勒公式中令 $x_0=0$，便得到

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

这是泰勒公式一个极为重要的特殊情形，称为**马克劳林**(Maclaurin)**公式**.

显然，泰勒公式是拉格朗日中值公式的一个重要的推广. 在泰勒公式中，只须令 $n=0$，就得中值公式.

最后再回到这小节一开始就提出的用 n 次多项式近似表示函数的问题上去. 由泰勒公式的余项之表达式，不难得出下述结论：

假设函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有直到 $n+1$ 阶的微商，并且 $f^{(n+1)}(x)$ 有界，即存在正数 M，使在点 x_0 的附近有 $|f^{(n+1)}(x)|<M$，则当 $\Delta x=x-x_0$ 趋向于零时，余项 $R_n(x)$ 是 $(\Delta x)^n$ 的高阶无穷小量，即

$$R_n(x)=o((\Delta x)^n)$$

这时，如果在泰勒公式中舍去微不足道的余项，就得到在点 x_0 的附近用 n 次多项式去近似函数 $f(x)$ 的公式

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!})(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

当 $x_0=0$ 时，就有

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

而且这两个近似公式的误差分别为

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}\right|<\frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$$

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<\frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$

容易看出，若函数 $f(x)$ 有直到 $n+1$ 阶连续微商，即 $f^{(n+1)}(x)$ 在点 x_0 的邻域内连续. 故在含点 x_0 且全部属于这个邻域的闭区间上有界. 从而不仅解决了计算 $f(x)$ 的近似值问题，而且还可对产生的误差进行定量估计.

另外，由于 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
$$+o((x-x_0)^n)$$

这个公式称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的带皮埃诺(Peano)余项的 n 阶泰勒公式. 虽然皮埃诺余项未对误差进行定量估计，但它有利于研究函数在一点的性态. 故也经常使用.

2.5.2 几个初等函数的泰勒展开式

应用上面所得到的结果，我们来导出几个常用的初等函数的马克劳林展开式.

1° $f(x)=e^x$

这时有 $f^{(k)}(x)=e^x$，故 $f^{(k)}(0)=1,k=0,1,2,\cdots,n$，故得到函数 e^x 在点 $x=0$ 的展开式为

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$$

其中余项

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \quad 0<\theta<1$$

由于 e^x 在整个数轴上有任意阶微商，故这个展开式对一切 x 都成立. 若舍去余项，则得近似公式

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

其误差为

$$|R_n(x)| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}\right| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|x|}$$

2° $f(x)=\sin x$

因为

$$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$$

所以

$$f^{(k)}(0) = \sin\frac{k\pi}{2} = \begin{cases} 0, & k = 2m \\ (-1)^m, & k = 2m+1 \end{cases}$$

即 $f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=0, f'''(0)=-1, f^{(4)}(0)=0, \cdots$故得 $\sin x$ 在点 $x=0$ 的展开式为

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m}(x)$$

其中余项

$$R_{2m}(x) = \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\sin\left(\theta x + \frac{2m+1}{2}\pi\right)$$

这个展开式也对一切 x 都成立. 若舍去余项，则得近似公式

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

其误差为

$$|R_{2m}(x)| = \left|\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\sin\left(\theta x + \frac{2m+1}{2}\pi\right)\right| \leqslant \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

3° $f(x)=\cos x$

用完全同样的方法可以得到 $\cos x$ 在点 $x=0$ 的展开式

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}+R_{2m-1}(x)$$

其中余项

$$R_{2m-1}(x) = \frac{x^{2m}}{(2m)!}\cos(\theta x + m\pi)$$

近似公式为

$$\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}$$

误差为

$$|R_{2m-1}(x)| = \left|\frac{x^{2m}}{(2m)!}\cos(\theta x + m\pi)\right| \leqslant \frac{|x|^{2m}}{(2m)!}$$

4° $f(x)=(1+x)^{\alpha}$

因为

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

而

$$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$$

即

$$f(0) = 1, f'(0) = \alpha, f''(0) = \alpha(\alpha-1), \cdots$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$$

所以$(1+x)^{\alpha}$ 在点 $x=0$ 的展开式为

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)$$

其中余项

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$$

这个展开式 当 $x>-1$ 时总是有意义.

5° $f(x)=\ln(1+x)$

采用相同的方法可以得到,当 $x>-1$ 时,$\ln(1+x)$在点 $x=0$ 的展开式为

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x),$$

其中余项

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}$$

前面根据马克劳林公式导出了五个函数在点 $x=0$ 的展开式，这种方法常称为“直接”方法. 由于函数的高阶微商比较难求，因此仅掌握直接方法是不够的，从泰勒公式的唯一性表明，不论用何种方法求得的展开式

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$$

都一定是 $f(x)$在点 $x=0$ 的马克劳林公式. 因而利用上述五个基本公式，便可导出许多初等函数的马克劳林公式.

例 1 求 $\cos(x^2)$的马克劳林展开式.

解 由于当 x 趋于零时，x^2 也趋于零. 因此可以在 $\cos x$ 的马克劳林展开式中，将 x 换成 x^2，从而得到

$$\begin{aligned}\cos(x^2) &= 1 - \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^4}{4!} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{(x^2)^{2m-2}}{(2m-2)!} \\ &\quad + R_{2m-1}(x^2) \\ &= 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{4m-4}}{(2m-2)!} + R_{2m-1}(x^2)\end{aligned}$$

其中

$$R_{2m-1}(x^2) = \frac{x^{4m}}{(2m)!}\cos(\theta x^2 + m\pi), 0 < \theta < 1$$

例 2 求 $\cos^2 x$ 的马克劳林展开式.

解 因为

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

当 x 趋于零时，$2x$ 也趋于零. 因此可以在 $\cos x$ 的马克劳林展开式中，将 x 换成 $2x$，从而得到，

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Big[1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{(2x)^{2m-2}}{(2m-2)!}$$

$$+R_{2m-1}(2x)\Big]$$

或

$$\cos^2 x = 1-\frac{2}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{2^{2m-3}}{(2m-2)!}x^{2m-2}$$
$$+R^*_{2m-1}(2x)$$

其中

$$R^*_{2m-1}(2x)=\frac{2^{2m-1}}{(2m)!}x^{2m}\cos(2\theta x+m\pi),\ 0<\theta<1$$

例 3 求 $\ln x$ 在点 $x_0=1$ 的泰勒展开式.

解 因为 $\ln x=\ln[1+(x-1)]$,且当 x 趋于 1 时,$x-1$ 趋于零,所以可在 $\ln(1+x)$的马克劳林展开式中,将 x 换成$(x-1)$,从而得到

$$\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{(x-1)^m}{m}$$
$$+R_m(x-1)$$

其中

$$R_m(x-1)=\frac{(-1)^m}{m+1}\cdot\frac{(x-1)^{m+1}}{[1+\theta(x-1)]^{m+1}},0<\theta<1$$

2.5.3 泰勒公式在近似计算中的应用

设函数 $f(x)$在点 x_0 附近有 $n+1$ 阶的连续微商,且 $f(x)$及其各阶微商在点 x_0 的值容易算出. 设为 $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $\cdots$, $f^{(n)}(x_0)$,由泰勒公式可知,$f(x)$在 x_0 近旁一点 x 的函数值近似为

$$f(x)\approx P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$
$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

且误差不超过$\dfrac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$,即

$$|f(x)-P_n(x)|\leqslant\frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

其中 M 是 $|f^{(n+1)}(x)|$ 在包含点 x_0 与 x 的区间上的上界. 因此，为了使近似计算函数值所产生的误差不超过预先指定的微小正数 q，必须这样选取上述近似公式的最小项数 n*，使满足

$$\frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}<q$$

一般说来，从这一不等式解出 n 是十分困难的. 通常的作法是，先试取项数 n，然后估计由此而引起的误差. 如果这时的误差超过预先给定的精确度 q，则可继续增加近似公式的项数，直到具有预先给定的精确度为止.

例 1　计算数 e 的值，使误差不超过 10^{-5}.

解　函数 e^x 在点 $x=0$ 的泰勒展开式为

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

其中 $0<\theta<1$. 令 $x=1$ 即得

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$$

若用近似公式

$$e\approx1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

计算 e，所得的误差是 $\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}<\frac{e}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}$.

根据问题所要求的精确度：误差不超过 10^{-5}，来确定近似公式中的项数 n. 令

$$\frac{3}{(n+1)!}<10^{-5}$$

解出 $(n+1)!>3\times10^5$. 因此只需取 $n=9$，这时

---

* 在近似公式中常把 $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 算作一项.

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{9!}$$

在具体计算时，每一项都应取六位. 由于前三项可算得准确值，所以其余各项产生的误差不大于 $10^{-6} + 7 \times 0.5 \times 10^{-6} < 5 \times 10^{-6}$，逐次计算各项后再相加给出 e 的近似值为 2.718282，其误差不超过 10^{-5}.

例 2 应用四阶近似公式：

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$$

近似计算 $\sin x$ 时，若使其误差不超过 10^{-5}，问 x 应有何限制？

解 这个例题与例 1 不同，恰好与它相反，是当 n 固定时，问 x 应在什么范围内才可以保证所要求的精确度. 实际上，仍可从误差估计入手. 这时误差为

$$|R_4(x)| = \frac{|\cos\theta x|}{5!}|x|^5 \leqslant \frac{|x|^5}{5!} = \frac{|x|^5}{120}$$

要使 $|R_4(x)| < 10^{-5}$，只需

$$\frac{|x|^5}{120} < 10^{-5}$$

即

$$|x|^5 < 12 \times 10^{-4}$$

解出 $|x|$，有

$$|x| < 0.2605$$

要用四阶近似公式来近似计算 $\sin x$ 的值，只有当 $|x| < 0.2605 \approx 14.9°$ 时，误差才能小于 10^{-5}.

复习思考题

1. 泰勒公式主要解决什么问题？为什么说泰勒公式是研究函数局部性质的一个重要工具？

2. 写出函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的泰勒展开式和在点 $x=0$ 的马克劳林展

开式.

3. 写出函数 e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^\alpha$, $\ln(1+x)$的马克劳林展开式，并指出它们成立的区间.

4. 试证明当 α 为自然数时，函数$(1+x)^\alpha$ 的马克劳林展开式就是牛顿二项式公式.

习题 2.5

1. 按$(x-4)$的乘幂展开多项式 $x^4-5x^3+x^2-3x+4$.

2. 已知 $f(x)$是一个四次多项式，并且 $f(2)=-1$, $f'(2)=0$, $f''(2)=2$, $f'''(2)=-12$, $f^{(4)}(2)=24$，试计算 $f(-1)$, $f'(0)$, $f''(1)$.

3. 求函数 $y=\mathrm{tg}x$ 在 $x_0=0$ 的二阶泰勒展开式.

4. 写出函数 $y=\arcsin x$ 的三阶马克劳林展开式.

5. 求 $y=\dfrac{1}{x}$在 $x_0=-1$ 的 n 阶泰勒展开式.

6. 求函数 $y=\sqrt{x}$在点 $x_0=4$ 的三阶泰勒展开式.

7. 求函数 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$的 $2n$ 阶马克劳林展开式.

8. 求函数 $y=\sin^2 x$ 的 $2n$ 阶马克劳林展开式.

9. 若 $f(x)$在$[a,b]$上有 n 阶微商存在，且

$$f(a)=f(b)=f'(b)=f''(b)=\cdots=f^{(n-1)}(b)=0,$$

则在(a,b)内至少存在一点 ξ，使得 $f^{(n)}(\xi)=0$，其中 $a<\xi<b$.

10. 利用函数 $f(x)=x^{10}-3x^6+x^2+2$ 在点 $x_0=1$ 的泰勒展开式的前三项计算 $f(1.03)$的近似值.

11. 应用三阶泰勒公式求下列各数的近似值，并估计误差：

(1)$\sin 18°$　　(2)$\sqrt[3]{30}$　　(3)$\ln 1.2$

12. 应用近似公式 $\cos x\approx 1-\dfrac{1}{2}x^2$，计算 $\cos x$ 时，若使其误差不超过 10^{-4}，问 x 应有何限制?

13. 近似计算$\sqrt{e}$之值，使其误差不超过 10^{-4}.

14. 近似计算 $\cos 10°$之值，使其误差不超过 10^{-3}.

2.6 未定式的极限

2.6.1 $\frac{0}{0}$型未定式

若当 x 趋向于 x_0 时，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是无穷小量，则比式$\frac{f(x)}{g(x)}$称为当 x 趋向于 x_0 时的$\frac{0}{0}$型未定式. 这时极限的除法运算法则已不能直接运用. 由于这种极限可能存在，也可能不存在，因此称为未定式.

应用初等的方法确定这种未定式的极限是相当困难的. 但是若借助于微分学的基本定理，就能给出一个简便而有效的方法，去计算出它的极限.

定理 1 （洛比达(L'Hospital)法则） 若函数 $f(x)$和 $g(x)$在点 x_0 的某个去心邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内有定义，其中 $\delta>0$，且满足下列条件：

(1)在 x_0 的去心邻域内可微，且 $g'(x)\neq 0$，

(2)$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$

(3)$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$(有限或$\infty$).

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$$

其中 l 为有限或无穷大.

证 由假设条件(2)知，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$. 因为当 x 趋于 x_0 时，$\frac{f(x)}{g(x)}$的极限与 $f(x_0)$及 $g(x_0)$无关. 所以只要改变或补充在点 x_0 的函数值，使 $f(x_0)=g(x_0)=0$. 函数 $f(x)$与 $g(x)$在点 x_0 就连续. 设 x 是点 x_0 的邻域内的任意一点，在以 x 与 x_0 为

端点的闭区间上，$f(x)$与$g(x)$满足柯西中值定理的一切条件. 于是在x_0与x之间存在一点ξ，使得

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

由于ξ在x_0与x之间，因此当x趋于x_0时，则亦有ξ趋向于x_0，再由条件(3)，有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$$

定理 2 设函数$f(x)$与$g(x)$满足下列条件：

(1)存在某个正数A，当$|x|>A$时，$f(x)$与$g(x)$都可微，且$g'(x)\neq 0$，

(2)$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$，

(3)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$ （有限或∞）.

则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$$

证 作代换$x=\dfrac{1}{y}$. 由于当x趋向于∞时，y趋向于零，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{y\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)}$$

对上式右端是可以用洛比达法则的，因而

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{y\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$$

在使用洛比达法则时，要注意验证条件，必须是$\frac{0}{0}$型未定式才能使用.

上述洛比达法则把求未定式$\frac{f(x)}{g(x)}$的极限归结为求它们微商比$\frac{f'(x)}{g'(x)}$的极限. 若$\frac{f'(x)}{g'(x)}$当 x 趋向于 x_0 或∞时还是$\frac{0}{0}$型的未定式，并且函数 $f'(x)$与 $g'(x)$也满足定理中所述的条件，则可继续使用洛比达法则

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

依此类推，直到算出极限为止，这里用"lim"表示 x 趋向于 x_0 或∞.

例 1 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+x)}$.

解 这是一个$\frac{0}{0}$型的未定式，因而可用洛比达法则，求得

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{\frac{1}{1+x}} = 2$$

例 2 求极限$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

解 这是$\frac{0}{0}$型未定式，连续应用洛比达法则得

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}=\frac{3}{2}$$

例 3 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-x}{x-\sin x}$.

解 根据洛比达法则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x}=2$$

例 4 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}{\dfrac{1}{x}}$.

解 由洛比达法则得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1$$

例 5 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x^2}$.

解 这是$\dfrac{0}{0}$型未定式. 由洛比达法则，得

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{2x}=\infty$$

2.6.2 $\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式

如果当 x 趋于 x_0(或 x 趋于∞)时，$f(x)$的极限任意，$g(x)$趋于∞，则仍称$\dfrac{f(x)}{g(x)}$是当 x 趋于 x_0(或 x 趋于∞)时的$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式.

对于这种未定式，前述洛比达法则依然成立. 这里仅对 x 趋于 x_0 时的情形叙述如下.

定理 设函数 $f(x)$与 $g(x)$在点 x_0 的一个去心邻域内有定义，且满足下列条件：

(1) $f(x)$与 $g(x)$在点 x_0 的去心邻域内可微，且 $g'(x)\neq0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$(有限或$\infty$).

则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$(有限或$\infty$).

证 因$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$，故对一切 $x,x_1\in x_0$ 的 δ 邻域内的点，

当 $x\neq x_1$ 时,有 $\left|\frac{g(x_1)}{g(x)}\right|<1$. 今在以 x_1 与 x 为端点的闭区间上应用柯西中值定理,由条件(2)得到

$$l-\varepsilon<\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}<l+\varepsilon\ (x_1<\xi<x)$$

或有

$$l-\varepsilon<\frac{\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{f(x_1)}{g(x)}}{1-\dfrac{g(x_1)}{g(x)}}<l+\varepsilon$$

于是,有

$$\begin{aligned}h(x)&=\frac{f(x_1)}{g(x)}+(l-\varepsilon)\left[1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right]\\&<\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{f(x_1)}{g(x)}+(l+\varepsilon)\left[1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right]=k(x).\end{aligned}$$

因 $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=l-\varepsilon$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}k(x)=l-\varepsilon$,故 $\exists\, 0<\delta_1<\delta$,使得 $\forall\, x\in x_0$ 的 δ_1 邻域都有 $h(x)>l-2\varepsilon$ 与 $k(x)<l+2\varepsilon$,故导出

$$l-2\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<l+2\varepsilon$$

从而证明

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$$

例 1 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\mu}{\mathrm{e}^x}\quad(\mu>0)$.

解 这是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式. 对于正常数 μ,总存在自然数 n,使 $n-1<\mu\leqslant n$,而 $\mu-n\leqslant 0$. 连续应用洛比达法则 n 次,故有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\mu}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}}{\mathrm{e}^x}=0$$

这个例子说明,当 x 趋于 $+\infty$ 时,无论 μ 为多么大的正常数,x^μ 的级总比 e^x 低. 亦即对任意大的正常数 μ,x^μ 趋向于无穷大的

速度比 e^x 慢得多.

例 2 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\mu}\quad(\mu>0)$.

解 这是$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式,应用洛比达法则,得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\mu}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\mu x^{\mu-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mu x^\mu}=0$$

这个结果说明,当 x 趋于正无穷大时,不论 μ 是怎样小的正常数,x^μ 的级总比 $\ln x$ 的级高,亦即对任意小的正数 μ,x^μ 趋向于无穷大的速度比 $\ln x$ 快得多. 综合例 1 与例 2 得到. 当 x 趋向于正无穷大时,三者之中以 $\ln x$ 趋向无穷大的级最低. 这是因为当 $x\to+\infty$时 $\ln\ln x$ 比 $\ln x$ 的级还要低.

例 3 若 $f(x)$在$(0,+\infty)$内可微,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=0$,求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

解 化成$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式,故有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f(x)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x f(x)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x f(x)+e^x f'(x)}{e^x}\\&=\lim_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=0\end{aligned}$$

2.6.3 其它未定式

除了$\dfrac{0}{0}$型与$\dfrac{\infty}{\infty}$型的未定式外,还有 $0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,1^\infty,\infty^0$ 等类型的未定式. 通过一些初等变换,这些未定式的极限都可化成$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式去计算.

如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$,则乘积 $f(x)g(x)$就是当 x 趋向 x_0 时的 $0\cdot\infty$型未定式. 因为

$$f(x)g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\text{或}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

即可化成$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型未定式.

如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$,则差 $f(x)-g(x)$是当 x 趋向 x_0 时的$\infty-\infty$型的未定式. 这时若将差写成

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}$$

它就化成了$\frac{0}{0}$型未定式. 但在实际计算时,由问题本身常常可以得出更简便的化法.

若 $y=f(x)^{g(x)}$为未定式 0^0,1^∞,或∞^0,则

$$\ln y=g(x)\ln f(x)$$

就是 $0\cdot\infty$型的未定式. 设其极限为 k、$+\infty$或$-\infty$,所求未定式的极限就是 e^k、$+\infty$或 0.

例 1 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^\mu\ln x\quad(\mu>0)$

解 这是 $0\cdot\infty$型未定式. 但若将它写成

$$x^\mu\ln x=\frac{\ln x}{\frac{1}{x^\mu}}$$

就化成$\frac{\infty}{\infty}$型未定式了. 故有

$$\lim_{x\to 0^+}x^\mu\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^\mu}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\mu}{x^{\mu+1}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^\mu}{\mu}=0$$

例 2 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\operatorname{tg}x)$.

解 这是$\infty-\infty$型未定式. 由于

$$\sec x-\operatorname{tg}x=\frac{1-\sin x}{\cos x}$$

当 $x\to\frac{\pi}{2}$时,上式右端是 $\frac{0}{0}$型未定式,应用洛比达法则,得到

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\operatorname{tg}x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}=0$$

例 3 求极限 $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

解 这是 1^{∞}型未定式. 令 $y=x^{\frac{1}{1-x}}$,两边取对数,得到

$$\ln y=\frac{\ln x}{1-x}$$

右端当 x 趋于 1 时,是$\frac{0}{0}$型未定式,所以

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=-1$$

或

$$\lim_{x\to1}\ln y=\ln\lim_{x\to1}y=-1$$

从而得到

$$\lim_{x\to1}y=\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}=e^{-1}$$

例 4 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}x^x$

解 这是 0^0 型未定式. 由于 $x^x=e^{x\ln x}$因此

$$\lim_{x\to0^+}x^x=\lim_{x\to0^+}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x}=e^0=1$$

其中应用到例 1,当 $\mu=1$ 时的情形.

例 5 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}x}\right)^{\sin x}$.

解 这是∞^0 型的未定式. 若将它写成

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\mathrm{tg}x}\right)^{\sin x}=\lim_{x\to0^+}\mathrm{e}^{-\sin x\ln\mathrm{tg}x}$$

$$=\exp\left(-\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\mathrm{tg}x}{\dfrac{1}{\sin x}}\right)$$

则右端函数的指数是$\frac{\infty}{\infty}$型未定式,利用洛比达法则,得到

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\mathrm{tg}x}{\dfrac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{\sec^2x}{\mathrm{tg}x}}{-\dfrac{\cos x}{\sin^2x}}=\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right)=0.$$

故

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\mathrm{tg}x}\right)^{\sin x}=\mathrm{e}^0=1$$

例 6 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$.

解 当 $x\to\infty$时,这个比式的分子与分母都趋向于无穷大,由洛比达法则,用微商之比代替函数之比就得到$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1}$,显然它没有极限.然而所给的比趋向于极限 1.所以在此情形,洛比达法则并不适用.这个结论并不违反前面所证的定理.因为这个定理只是断言,若微商之比的极限存在,则函数之比亦存在同一的极限,但它并不可逆.

2.6.4 由泰勒公式求极限

洛比达法则成功地解决了确定未定式的极限问题.但有时需要连续计算好几次微商之比才见分晓.例如

$$\lim_{x\to0}\frac{24-12x^2+x^4-24\cos x}{(\sin x)^6}$$

在这种情形下,直接利用泰勒公式反而更加简便.仍以这极限为例.根据泰勒公式把函数 $\sin x$ 与 $\cos x$ 展开成

$$\sin x = x + o(x), \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$$

于是算得

$$\begin{aligned}
&\frac{24 - 12x^2 + x^4 - 24\cos x}{\sin^6 x} \\
&\quad = \frac{24 - 12x^2 + x^4 - 24\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right)}{(x + o(x))^6} \\
&\quad = \frac{\frac{x^6}{30} + 24o(x^6)}{(x + o(x))^6} = \frac{\frac{1}{30} + 24o(1)}{(1 + o(1))^6}
\end{aligned}$$

其中 $o(1)$是当 x 趋于零时的无穷小量. 显然当 x 趋于零时,上式趋于$\frac{1}{30}$,这就是所要求的极限.

下面再举一些例子来说明这个方法.

例 1 求极限$\lim\limits_{x \to 0}\frac{x - \sin x}{x^2 \sin x}$.

解 $$\lim_{x \to 0}\frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} = \lim_{x \to 0}\frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)}{x^2(x + o(x))}$$

$$= \lim_{x \to 0}\frac{\frac{x^3}{6} - o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \frac{1}{6}$$

例 2 求极限$\lim\limits_{x \to 0}\frac{1 - \cos x\cos 2x\cos 3x}{1 - \cos x}$.

解 由于

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$$

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + o(x^2) = 1 - 2x^2 + o(x^2)$$

$$\cos 3x = 1 - \frac{(3x)^2}{2!} + o(x^2) = 1 - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)$$

代入所给的未定式得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)(1-2x^2+o(x^2))\left(1-\frac{9}{2}x^2+o(x^2)\right)}{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-7x^2+o(x^2))}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{7x^2+o(x^2)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=14$$

注意 对形如$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)\beta(x)-\alpha_1(x)\beta_1(x)}{\gamma(x)}$的极限，若 $\gamma(x)\sim x^m$，就应将 $\alpha(x)$，$\beta(x)$，$\alpha_1(x)$，$\beta_1(x)$都展开到 x^m 项才行.

复习思考题

1. 叙述$\frac{0}{0}$型，$\frac{\infty}{\infty}$型未定式的洛比达法则.

2. 下列极限是否可以用洛比达法则？为什么？

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{1-x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$

习题 2.6

1. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-x}{x-\sin x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{\beta x}-\cos\beta x}$　　(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{tg}x-1}{\sin 4x}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^{x^2}-1)\sin x^2}{x^2(1-\cos x)}$　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\mathrm{ctg}x-1}{x^2}$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$　　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln \mathrm{tg}7x}{\ln \mathrm{tg}2x}$

(10) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\mathrm{tg}x}{\mathrm{tg}3x}$

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x\cos x}$

(12) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{a\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\sin bx}}$, $(b>0)$

(13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\mathrm{tg}x}-e^x}{\mathrm{tg}x-x}$

(14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$ $(a>0)$

(15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$

(16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

(17) $\lim\limits_{x\to \infty}x(e^{-\frac{1}{x}}-1)$

(18) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

(19) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-0}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$

(20) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}}$

(21) $\lim\limits_{m\to \infty}\left(\cos\dfrac{x}{m}\right)^m$

(22) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-0}(\mathrm{tg}x)^{2x-\pi}$

(23) $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}$

(24) $\lim\limits_{x\to \infty}x\sin\dfrac{k}{x}$

(25) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$

(26) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{ctg}x}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

(27) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$

(28) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)$

(29) $\lim\limits_{x\to 1-0}\ln x\ln(1-x)$

(30) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$

(31) $\lim\limits_{x\to \infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

(32) $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{\ln(1-x)+\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{2}}{\mathrm{ctg}\pi x}$

(33) 若 $f(x)$在$(0,+\infty)$内可微，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=l$，求证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=l$.

2. 设函数 $f(x)$在区间$[a,+\infty]$上可微，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=l$. 证明：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=l.$$

3. 下列极限是否存在？是否可用洛比达法则？为什么？若有极限，求其极限值.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{k}{x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos\dfrac{1}{x}}{\mathrm{tg}x}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2\cos x}{x+2\cos x}$ (4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

4. 当 $x\to+\infty$时,试比较下列无穷大量的级

(1) $(\ln x)^k$ $(k>0)$与 x^a $(a>0)$

(2) x^a,$(a>0)$与 $e^{\sqrt{x}}$

(3) e^x 与 x^x

(4) $\ln\sin\frac{a}{x}$与 $\ln\sin\frac{b}{x}$,$(a>0,b>0)$.

5. 应用泰勒公式求极限

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[4]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-x^2}}{x^2}$ (2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}(\mathrm{tg})x-\sin(\sin x)}{\mathrm{tg}x-\sin x}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x^2-x^2\cos x-1}{\sin x^2}$ (4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$

2.7 函数的增减性与极值

前面几节,我们介绍了微商、微分及微分学的基本定理. 在这一节中,将运用微分学的这些理论来研究函数的各种性质. 且解决一些实际问题. 我们从函数的增减这个最简单的问题开始.

2.7.1 函数增减性的判别

微商为我们更广泛地研究函数的性态提供了有力的工具. 从微商的几何意义知道,若函数 $y=f(x)$所描述的曲线在区间(a,b)内处处存在切线. 当切线与 x 轴的正向的夹角为锐角时,有 $f'(x)>0$,此时曲线在(a,b)内严格增的,如图 2.13(a). 当切线与 x 轴正向的夹角为钝角时,有 $f'(x)<0$,此时曲线在(a,b)内严格减的,如图 2.13(b)

实际上有如下的定理成立.

定理 1 (严格单调的充分条件) 设函数 $f(x)$在区间(a,b)

内可微，若对任意的 $x \in (a,b)$，有 $f'(x)>0$(或 $f'(x)<0$)，则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内严格增(或严格减).

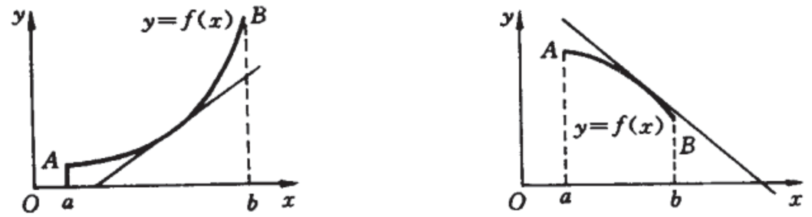


图 2.13

证 在区间 (a,b) 内任取两点 x_1, x_2，且 $x_1<x_2$. 于是函数 $f(x)$ 在闭区间 $[x_1,x_2]$ 上连续，在开区间 (x_1,x_2) 内可微. 根据拉格朗日定理，在 (x_1,x_2) 内至少存在一点 ξ，使

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$$

但 $f'(\xi)>0$，及 $x_2-x_1>0$，故有

$$f(x_2)>f(x_1)$$

即函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内严格增的.

用同样的方法，可证严格减的情形.

定理 1 指明. 要讨论可微函数的增减区间，只要求出这个函数的微商，再判断它的符号就行了. 因此应该找出使微商取正负值的分界点. 易见，当导函数 $f'(x)$ 连续时，这个分界点必满足方程 $f'(x)=0$，即分界点是 $f'(x)$ 的零点. 用这些微商的零点来划分定义域，就可确定函数在各个部分区间上的增减性. 若函数在某些点上不可微，则用来划分函数定义域的分点还应包括这些微商不存在的点. 因此可按下述步骤讨论函数的增减性.

(1)确定连续函数 $f(x)$ 的定义域;

(2)求出 $f'(x)$，用方程 $f'(x)=0$ 的根及 $f'(x)$ 不存在的点，将定义域分成若干个部分区间;

(3)判断 $f'(x)$ 在每个部分区间内的符号. 就可确定函数 $f(x)$ 的增减性.

例 1 求函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ 的增减性区间.

解 函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$. 因为

$$f'(x)=-2x\mathrm{e}^{-x^2}$$

它在点 $x=0$ 处为零,故以 $x=0$ 为端点把$(-\infty,+\infty)$分成两个区间$(-\infty,0)$与$(0,+\infty)$. 由于 $f'(x)=-2x\mathrm{e}^{-x^2}$ 是连续函数,因此在区间$(-\infty,0)$内不会变号;同理 $f'(x)$在区间$(0,+\infty)$内符号相同. 于是可在每一个区间内,分别任意挑选一点来确定 $f'(x)$的符号. 然后由定理 1 用 $f'(x)$的符号来判断 $f(x)$的增减性. 从而列出下表:

x	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	严格增↑	严格减↓

易见,函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ 在$(-\infty,0)$内严格增,而在$(0,+\infty)$内严格减.

例 2 确定函数 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 的增减区间.

解 此即为确定 $f'(x)$取正值和取负值的区间. 因为

$$f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

它在点 $x=0$ 处不存在. 故以 $x=0$ 为端点把整个数轴分成两个区间$(-\infty,0)$与$(0,+\infty)$.

易见,在区间$(-\infty,0)$内,$f'(x)<0$,而在区间$(0,+\infty)$内,$f'(x)>0$. 所以 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ 在$(-\infty,0)$内是严格减的,而在$(0,+\infty)$内是严格增的.

利用定理 1 可证明一些不等式.

例 3 证明:当 $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$时,有$\frac{\sin x}{x}\geqslant\frac{2}{\pi}$成立.

证 取函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$,定义域为$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,且在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内有

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x}{x^2}(x-\mathrm{tg}x)$$

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时,有 $\mathrm{tg}x>x$ 及 $\cos x>0$,故得

$$f'(x)<0$$

由定理 1 知,函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 内严格减,且在右端点 $\frac{\pi}{2}$ 处左连续. 因此在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处必取最小值,即有

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}\geqslant f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi},0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$$

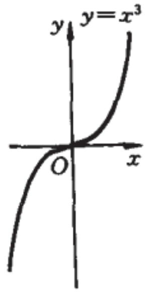


图 2.14

定理 1 的相反结论是不成立的. 就是说,若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内严格增,则不能由此推出 $f'(x)$ 大于零. 同样,若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 严格减,也不能有 $f'(x)$ 小于零. 例如,函数 $y=x^3$ 在整个数轴上是严格增的,但当 $x=0$ 时却有 $y'=3x^2=0$. 图 2.14 显示出曲线 $y=x^3$ 从左到右是上升的,而在 $x=0$ 有一条水平的切线.

注意 如果在区间 (a,b) 恒有 $f'(x)\geqslant0$(或 $\leqslant0$),而等号只在一些孤立点上成立,定理 1 的结论也是正确的.

例 4 证明:

当 $x>0$ 时,$x>\sin x$;当 $x<0$ 时,$x<\sin x$.

证 取 $f(x)=x-\sin x$,且在 $(-\infty,+\infty)$ 内可微,故有

$$f'(x)=1-\cos x$$

易见,对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$ 恒有 $f'(x)\geqslant0$. 不过等号只在一些孤立的点上成立. 故函数 $f(x)=x-\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 总是严格增的,而 $f(0)=0$,故得到,

当 $x<0$ 时,有 $f(x)<f(0)$,或 $x-\sin x<0$,即 $x<\sin x$.

当 $x>0$ 时,有 $f(0)<f(x)$,或 $x-\sin x>0$,即 $x>\sin x$.

关于一般的单调性有如下定理.

定理 2（单调的必充条件） 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可微，则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内不减（或不增）的必要充分条件是 $f'(x)\geqslant 0$（或 $f'(x)\leqslant 0$），$x\in(a,b)$.

证 必要性：设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内不减. 在区间 (a,b) 内任取两点 $x,x+h$.

(1) 当 $h>0$ 时，有 $x<x+h$ 及 $f(x)\leqslant f(x+h)$ 故得

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geqslant 0$$

(2) 当 $h<0$ 时，有 $x+h<x$ 及 $f(x+h)\leqslant f(x)$，故得

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geqslant 0$$

因此，对任意的 x 与 $x+h\in(a,b)$，总有

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geqslant 0$$

已知函数 $f(x)$ 在点 x 可微，由极限的保号性，则有

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geqslant 0$$

充分性的证明与定理 1 的证明类似.

同理可证不增的情形.

2.7.2 函数的极值

在生产实践与科学实验中，常常会遇到在一定条件下，如何使得产量最多、质量最好、效率最高、用料最省、成本最低等一类问题. 它们往往可归结为求函数的最大值或最小值问题.

例如，从半径为 R 的铁皮中，应剪去多大的扇形，才能使余下的铁皮所围成的锥形容器具有最大的容积(图 2.15).

设剪去扇形后，所余铁皮的圆心角为 x，则由它围成的底圆之圆周长为 Rx，故圆锥底半径为 $r=\frac{Rx}{2\pi}$，而

$$h=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{R^2-\left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2}$$

$$=\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2}$$

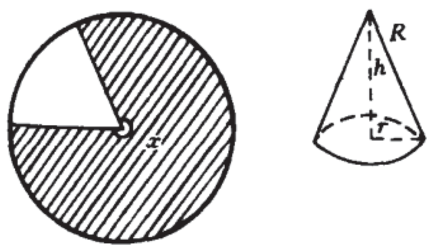


图 2.15

因此圆锥的体积为

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2\cdot\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2}$$

$$=\left(\frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2-x^2}\right),0\leqslant x\leqslant 2\pi$$

于是上述锥形容器的问题就化成了当 x 为何值时，函数

$$f(x)=\frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2-x^2}$$

取最大值.

再考察另一个例子.

某工厂 C 到铁路的距离 CB 为 20 公里，需要从距 B 为 150 公里的 A 站运来原料，现要从铁路上某处 D 修一条公路与工厂连接（图 2.16），已知铁路运费与公路运费之比是 3∶5，问点 D 应选在何处，才能使总运费最省.

设 $BD=x$，则 $AD=150-x$，$CD=\sqrt{x^2+20^2}$，如果把铁路每吨公里的运费算作 3，根据已知条件，公路每吨公里的运费就是 5，于是沿铁路从 A 到 D 每吨的运费是 $3(150-x)$；沿公路从 D 到 C 每吨的运费是 $5\sqrt{x^2+400}$，故每吨的总运费为

$$f(x)=3(150-x)+5\sqrt{x^2+400}.$$

这个函数的定义域是 $[0,150]$. 因此，我们的问题是：在区间 $[0,$

150]内 x 取什么值时函数 $f(x)$ 有最小值.

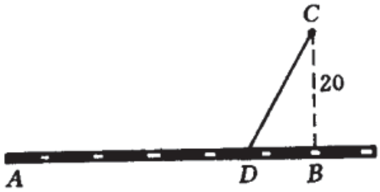


图 2.16

上面两个例子都可以归结为求函数的最大值和最小值的问题,怎样求出函数在某个区间上的最大值和最小值呢? 我们先来指出解决这个问题的一般方法.

设函数 $f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上,其图形如图 2.17 所示,从图上可以看出,$f(x)$ 在左端点 a 处取到最小值,在点 x_0 取到最大值;同时还看到,这个函数在点 x_1,x_4,有极大值,在点 x_2,x_3 有极小值. 而最大值就是这些极大值与函数的端点值中之最大者,最小值就是函数的极小值与端点值中之最小者. 因此,要知道函数在哪一点取最大值(或最小值),就必须先找出使函数取极大值(或极小值)的点. 然后再把它们和函数端点上的值作一比较,就能得到使函数取最大值(或最小值)的点.

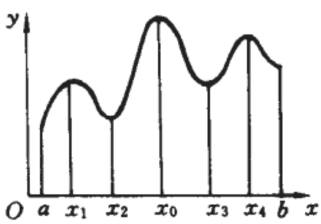


图 2.17

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的内部某点 c 取到最大值(或最小值),那么函数 $f(x)$ 在点 c 必取到局部极大值(或局部极小值). 如图 2.17 的点 x_0. 因此求函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值(或最小值)的问题就归结为如何去确定使函数取得极值的点的问题.

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微,且函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内的某点 c 取到极值,由费马定理知,必有

$$f'(c)=0$$

即 c 是方程 $f'(x)=0$ 的解. 为了叙述的方便,把方程 $f'(x)=0$ 的解称为函数 $f(x)$ 的驻点. 于是,可微函数 $f(x)$ 只能在它的驻点上取到极值. 但是可微函数在驻点上不一定就取到极值. 例如函数

$f(x)=x^3$, $f'(x)=3x^2$,. 显然 $f'(x)=0$ 只有一个解 $x=0$,故也只有一个驻点. 然而函数 $f(x)=x^3$ 在点 $x=0$ 处并不取到极值.

那么函数 $f(x)$ 在什么样的驻点上取到极值呢? 若取到极值,它是极大值还是极小值呢? 下面介绍两个判别方法.

如图 2.18(a),若存在一个正数 δ,函数 $f(x)$ 在驻点 x_0 左侧的小区间 $(x_0, -\delta, x_0)$ 内严格增,而在驻点 x_0 右侧的小区间 $(x_0, x_0+\delta)$ 内严格减,则函数 $f(x)$ 在驻点 x_0 必取到极大值;又如图 2.18(b),类似地可得到函数 $f(x)$ 在驻点 x_0 必取到极小值.

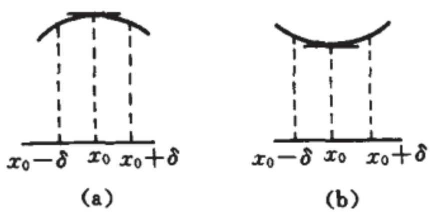


图 2.18

已知函数 $f(x)$ 的严格增(或严格减)可由微商的符号决定. 于是得到了一个判别驻点 x_0 为极值点的法则.

定理 1(第一判别法) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内连续,在点 x_0 的去心邻域 $(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$ 内可微,

(1) 当 $x\in(x_0-\delta, x_0)$ 或 $x<x_0$ 时, $f'(x)<0$,而 $x\in(x_0, x_0+\delta)$ 或 $x>x_0$ 时, $f'(x)>0$,则函数 $f(x)$ 在点 x_0 取到极小值;

(2) 当 $x\in(x_0-\delta, x_0)$ 或 $x<x_0$ 时, $f'(x)>0$,而当 $x\in(x_0, x_0+\delta)$ 或 $x>x_0$ 时, $f'(x)<0$,则函数 $f(x)$ 在点 x_0 取到极大值;

(3) 当 $f'(x)$ 在驻点 x_0 的左、右两侧保持同一符号时,则函数 $f(x)$ 在点 x_0 无极值.

证 根据函数单调性的判别法与极值的定义,立即得证.

例 1 求函数 $f(x)=(x-1)^2(x-2)^3$ 的极值.

解 因为

$$f'(x)=2(x-1)(x-2)^3+3(x-1)^2(x-2)^2$$
$$=(x-1)(x-2)^2(5x-7)$$

若令 $f'(x)=0$,可得驻点 $x_1=1,x_2=\frac{7}{5},x_3=2$. 为了确定它们是否为极值点,必须考虑 x 通过这些点时,$f'(x)$ 的符号变化的情况. 于是可列表如下:

x	$(0,1)$	$\left(1,\frac{7}{5}\right)$	$\left(\frac{7}{5},2\right)$	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$

可见函数 $f(x)$在点 $x_1=1$ 达到极大值,在点 $x_2=\frac{7}{5}$达到极小值,且相应的极值为

$$f(1)=0,f\left(\frac{7}{5}\right)=-0.035;$$

而在点 $x_3=2$ 不达到极值.

应用定理 1 讨论函数的极值时,确定 $f'(x)$在驻点附近的符号,有时是相当费事的. 但若函数 $f(x)$在驻点上还存在高阶微商,则利用高阶微商的符号也可确定驻点是否为极值点. 于是又得到判别极值的第二个判别法.

定理 2 若函数 $f(x)$在驻点 x_0 的 n 阶微商存在,且

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$$

而 $f^{(n)}(x_0)\neq0$. 若有

(1)当 n 是奇数时,则函数 $f(x)$在点 x_0 无极值.

(2)当 n 是偶数时,则函数 $f(x)$在点 x_0 取极值. 当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时,$f(x)$在点 x_0 取极小值;当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时,$f(x)$在点 x_0 取极大值.

证 由假设知,函数 $f(x)$可在点 x_0 附近作泰勒展开,即对任意的 h,有

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}h+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+o(h^n)$$

令 $\Delta f=f(x_0+h)-f(x_0)$，由假设得

$$\Delta f=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+o(h^n)$$

判别函数 $f(x)$ 在点 x_0 是否取到极值，就是判别无论 h 是正或是负，当 $|h|$ 充分小时，Δf 是否保持同号.

由于 Δf 右端的第二项 $o(h^n)$ 是比 h^n 高级的无穷小量($h\to 0$ 时). 因此当 $|h|$ 充分小时，Δf 的符号就由它右端的第一项的符号决定.

当 n 是奇数时，若 $h<0$，有 $h^n<0$，若 $h>0$，有 $h^n>0$. 于是，当 h 改变符号时 h^n 也改变符号，即 Δf 改变符号，故函数 $f(x)$ 在点 x_0 不取极值.

当 n 是偶数时，当 h 改变符号时，h^n 不改变符号. 于是，Δf 的符号与 $f^{(n)}(x_0)$ 的符号相同. 因此得到

当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时，有 $\Delta f>0$，函数 $f(x)$ 在点 x_0 取极小值；当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时，有 $\Delta f<0$，函数 $f(x)$ 在点 x_0 取极大值.

推论 如果函数 $f(x)$ 在驻点 x_0 的二阶微商存在，则当 $f''(x_0)$ 大于零时，函数 $f(x)$ 在点 x_0 取极小值；而当 $f''(x_0)$ 小于零时，函数 $f(x)$ 在点 x_0 就取极大值.

上面讨论函数的极值时，总是假设函数在所论及的点处存在有限的微商. 但是函数在微商不存在或为无穷大的点上亦有可能达到极值. 对于这一类点，如果函数在该点连续，且在邻近各点处均有微商，则仍可按前一方法判定它是否为函数的极值点.

例 2 求函数 $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 的极大值与极小值.

解 求出一阶微商

$$f'(x)=\sqrt[3]{x^2}+\frac{2(x-1)}{3\sqrt[2]{x}}=\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$$

当 $x=\dfrac{2}{5}$ 时它为零，当 $x=0$ 时为无穷大. 考虑通过这些点时 $f'(x)$

的符号，于是得

x	$(-\infty,0)$	$\left(0,\dfrac{2}{5}\right)$	$\left(\dfrac{2}{5},+\infty\right)$
$f'(x)$	+	−	+

由此可知，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取到极大值 $f(0)=0$，而在 $x=\dfrac{2}{5}$ 取到极小值 $f\left(\dfrac{2}{5}\right)=-\dfrac{3}{25}\sqrt[3]{20}$.

例 3 求函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 在区间 $[-4,4]$ 上的最大值与最小值.

解 先求出函数在这区间内的全部极值，然后与区间端点的函数值进行比较，其最大者即为最大值，最小者即为最小值. 因为

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$$

令 $f'(x)=0$ 可得驻点 $x_1=-1, x_2=3$. 又由

$$f''(x)=6(x-1)$$

推知 $f''(-1)<0, f''(3)>0$，所以函数在 $x_1=-1$ 处取到极大值，在 $x_2=3$ 处取到极小值. 而相应的极值为 $f(-1)=10, f(3)=-22$. 在区间端点的函数值为 $f(-4)=-71, f(4)=-15$. 于是求得函数在区间 $[-4,4]$ 上的最大值是 10，最小值为 -71，它们分别在 $x=-1, x=-4$ 上达到.

应该注意，在某些情况下可以很方便的求出函数的最大值和最小值. 比如说，如果函数在区间内部只有一个极大值而无极小值，那么这个极大值就一定是函数在整个区间上的最大值(图 2.19)，同样，如果函数在区间内部只有一个极小值而无极大值，那么这个极小值就一定是函数在整个区间上的最小值. 这种情况在实际问题中是经常会遇到的.

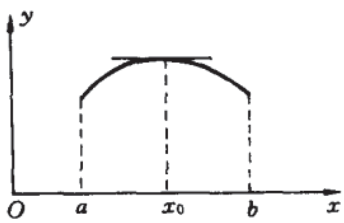


图 2.19

此外，如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是增函数时，那就更简单

了，这时 $f(b)$ 必是最大值，$f(a)$ 必是最小值；如果 $f(x)$ 是减函数，则恰好相反.

例 4 求函数

$$f(x) = x - \ln(1+x^2)$$

在区间[2,3]上的最大值和最小值.

解 由于在区间[2,3]上

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{(1-x)^2}{1+x^2} > 0$$

所以函数 $f(x)$ 在这个区间上是严格增的. 因此最大值为 $f(3)=3-\ln 10$，最小值为 $f(2)=2-\ln 5$.

现在再回到本节一开始提出的两个求最大值与最小值的问题.

例 5 在剪扇形的例中，已经归结为求函数

$$V = \frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}, \qquad x \in [0, 2\pi]$$

的最大值. 因为右端的系数对于 V 的极值点并无影响，而余下的乘积 $x^2\sqrt{4\pi^2-x^2}$ 是正的，于是当它的平方达到最大值时，它也达到最大值. 因而可以只考虑函数

$$f(x) = 4\pi^2x^4 - x^6$$

求出一阶微商

$$f'(x) = 16\pi^2x^3 - 6x^5$$

并令 $f'(x)=0$，解之得驻点

$$x_1 = 0, x_2 = -2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}, x_3 = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$$

由问题的实际意义知 $0<x<2\pi$，所以只有 x_3 在这个范围内，容易验证 $f''(x)<0$，由此推得函数 $f(x)$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内有唯一的极大值点 x_3，于是就可断言，这个极大值点就对应着有最大体积的圆锥形容器. 从而剪去扇形的圆心角为

$$2\pi - x_3 = \frac{2}{3}(3-\sqrt{6})\pi$$

例 6 在运费最小的问题中所列出的函数关系为

$$f(x) = 3(150 - x) + 5\sqrt{x^2 + 400}$$

因为

$$f'(x) = -3 + \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 400}}$$

并令它为零可得

$$x^2 = 225$$

舍去不合题意的解可得唯一的驻点 $x=15$. 容易算得

$$f''(x) = \frac{2000}{(x^2 + 400)^{\frac{3}{2}}}$$

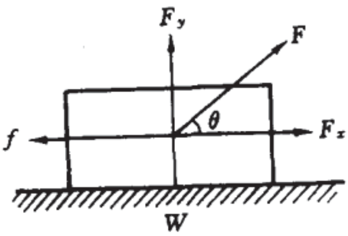


图 2.20

故 $f''(15)>0$. 函数 $f(x)$ 在 $x=15$ 取极小值,这个极小值也是它在区间$[0,150]$上的最小值. 如此,D 点应选在距离 B 为 15 公里处,总运费最省.

例 7 重量为 W 的物体放在一粗糙的水平面上,施一力用以克服摩擦,使之移动. 问该力应与水平面成何角度,方能使所施之力为最小?

解 设作用力 F 与水平面成 θ 角(图 2.20),由物理学知,克服摩擦的水平分力 $F_x=F\cos\theta$ 应与正压力 $W-F_y=W-F\sin\theta$ 成正比,其比例系数就是摩擦系数 μ,因此有

$$F\cos\theta = \mu(W - F\sin\theta)$$

由此即得

$$F = \frac{\mu W}{\cos\theta + \mu\sin\theta}$$

于是问题就成为 θ 在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上应取何值时 F 为最小. 因为这个分式的分子 μW 是一个常数,所以它的分母取得最大值时,它才能取得最小值. 如此,可以只考虑函数

$$g(\theta) = \cos\theta + \mu\sin\theta$$

的极值点. 解方程

$$g'(\theta) = -\sin\theta + \mu\cos\theta = 0$$

得驻点 $\theta = \mathrm{arctg}\mu$. 由

$$g''(\theta) = -\cos\theta - \mu\sin\theta$$

知 $g''(\mathrm{arctg}\mu) < 0$. 故当 $\theta = \mathrm{arctg}\mu$ 时, $g(\theta)$ 有最大值, 也即 F 有最小值.

复习思考题

1. 函数 $y=f(x)$ 的驻点和极值点有何区别? 在什么条件下, 驻点必是极值点?

2. 怎样求出函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值和最小值?

3. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内有唯一的一个极值点 x_0, 若 $f(x)$ 在点 x_0 达到极大(或极小), 则 $f(x)$ 在点 x_0 达到最大(或最小). 对否? 你能证明吗?

4. 为什么当微商 $f'(x) \geqslant 0$, 且等于零只在一些孤立点上成立时, 函数 $y=f(x)$ 仍是严格增函数?

5. 若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内严格增, 则有 $f'(x)>0 (a<x<b)$, 对否?

6. 单调函数的导函数是否也必定是单调函数?

习题 2.7

1. 证明函数 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$ 在 $(-1,1)$ 内严格减.

2. 证明函数 $f(x)=x^3+x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格增.

3. 证明函数 $y=\mathrm{arctg}x-x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格减.

4. 利用函数的增减性证明下列不等式

(1) 当 $x \neq 0$ 时, 有 $e^x > 1+x$,

(2) 当 $x>0$ 时, 有 $\ln(1+x) > \dfrac{\mathrm{arctg}x}{1+x}$,

(3) 当 $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$时,有$\frac{\mathrm{tg}x_2}{\mathrm{tg}x_1}>\frac{x_2}{x_1}$,

(4) 当 $x>0$ 时,有 $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$

(5) 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$时,有 $\sin x+\mathrm{tg}x>2x$

(6) 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$时,有 $\sin x>\frac{2}{\pi}x$

(7) 当 $x>0$ 时,有 $e^x>1+x^2$

(8) 当 $x>0, y>0, 0<\alpha<\beta$时,

有$(x^\alpha+\beta^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$

5. 求下列函数的极值

(1) $y=2x^3-3x^2$　　(2) $y=\frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$

(3) $y=\sqrt[3]{(x^2-a^2)^2}$　　(4) $y=x-\ln(1+x)$

(5) $y=x^2e^{-x^2}$　　(6) $y=2e^x+e^{-x}$

(7) $y=\cos x+\sin x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$

(8) $y=x^{\frac{1}{x}}$　　(9) $y=x-\sin x$

(10) $y=x^2(x-1)^3$　　(11) $y=(x-3)^4$

(12) $y=x+\mathrm{tg}x$　　(13) $y=e^x\cos x$

(14) $y=\frac{x}{\ln x}$　　(15) $y=\sqrt[3]{(2x-x^2)^2}$

(16) $y=3-2(x+1)^{\frac{1}{3}}$　　(17) $y=\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$

6. 求下列函数在所给区间上的最大值和最小值

(1) $y=x^4-2x^2+5, [-2,2]$

(2) $y=x^3-3x^2+6x-2, [-1,1]$

(3) $y=\sqrt{100-x^2}$　　$[-6,8]$

(4) $y=\sin 2x-x$　　$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

(5) $y=\frac{x-1}{x+1}$　　$[0,4]$

(6) $y=x^x$　　$[e^{-1},-\infty)$

(7) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$, $[0,1]$

(8) $y=x\ln x$, $(0,+\infty)$

7. 用极值方法证明下列不等式

(1) 若 $0\leqslant x\leqslant 1, p>1$, 则

$$\frac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1$$

(2) 当 $|x|\leqslant 2$ 时, 有 $|3x-x^3|\leqslant 2$

(3) 若 $m>0, n>0$, 则当 $0\leqslant x\leqslant a$ 时有

$$x^m(a-x)^n\leqslant\frac{m^m\cdot n^n}{(m+n)^{m+n}}a^{m+n}$$

8. 下列方程有几个实根? 并确定实根所在范围:

(1) $x^3-6x^2+9x-10=0$ (2) $\ln x=ax$ $(a>0)$

9. 有一面积为 8×5 厘米^2 的长方形厚纸, 在各个角剪去相同的小正方形, 把四边折起来成一个无盖的盒子. 要使盒子的容积最大, 问剪去的小正方形边长应为多少?

10. 要做一个圆锥形的漏斗, 其母线长 20 厘米, 要使其体积最大, 其高应为多少?

11. 试证: 定容圆锥形帐幕当其高为底半径的$\sqrt{2}$倍时, 所需材料最省.

12. 三个点 A, B 和 C 不在同一直线上, $\angle ABC=60°$, 汽车以 80 公里/小时的速度由 A 向 B 行进, 同时火车以 50 公里/小时的速度由 B 向 C 驶去, 若 $AB=200$ 公里, 问运动开始几小时后汽车与火车的距离最小?

13. 过点 $M(1,4)$ 引一直线, 使其在两坐标轴上的截距均为正, 且它们之和为最小, 求此直线方程.

14. 某工厂将制造一种无盖的圆柱形圆桶, 容量为 $\dfrac{3}{2}\pi$ 米^3, 用来作底的金属每平方米 30 元, 作侧面的金属每平方米 20 元, 为使成本最低, 应如何制做这圆桶?

15. 有甲乙两城, 甲位于一直线形的河岸, 乙离岸 40 公里, 而其到岸的垂足与甲相距 50 公里, 两城同用一抽水机从河中取水. 从水厂到甲城及乙城之水管费分别为每公里 500 元和 700 元, 为使水管费用最省, 水厂应建在河边何处?

16. 一张 1.4 米高的图片挂在墙上, 它的底边高于观察者的眼 1.8 米, 问

观察者离墙多远才能看得最清晰(即视角最大)?

17. 宽度为 a 的运河垂直地流向宽度为 b 的运河,问能在运河中航行的船的最大长度是多少?

2.8 函数图形的描绘

在平面解析几何中,描绘函数图形的基本方法是描点法.就是选取自变量的一组值 $x_1, x_2 \cdots x_n$,算出相应的函数值 $y_1, y_2, \cdots y_n$,把点$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$描绘在直角坐标纸上,然后用光滑曲线段把这些点连接起来,所得曲线就认为是这个函数的图形.显然,这样描出的曲线是极其粗糙的,选取的点不可能太多,而一些关键性的点,如极值点等常常可能会漏掉;曲线的单调性、凹凸性等一些重要的性态也没有掌握.尤其是常把两点之间的较大变化给漏掉.例如在图 2.21 中,函数图形在 P,Q 两点之间转了一个大弯,若描点时仅用虚线把 P,Q 连接起来,就无法把这种重大变化反映出来.因此用描点法所描绘的函数图形往往不能真实地表现出函数的几何特征.

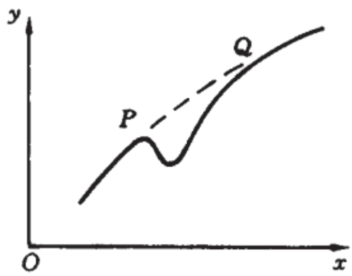


图 2.21

现在要应用微分学的知识,进一步研究函数的其它几种变化性态,并对它们作出尽可能多的分析与判断,然后给出描绘图形的分析方法.

2.8.1 曲线的凹凸性与扭转点

在描绘函数的图形时,需要利用一阶微商确定出函数的上升、下降区间和函数的极值.但是,函数是怎样上升与下降的呢?例如在图 2.22(a)中,函数 $y=x^2$ 与 $y=\sqrt{x}$在区间$(0,+\infty)$内都是严

格增的.但是它们严格增的方式却显著地不同.曲线 $y=x^2$ 呈凹形,而曲线 $y=\sqrt{x}$呈凸形,故需要研究曲线的凹凸性.

如图 2.22(b),若在曲线 L 上任取两点,则联结这两点的直线总位于两点间曲线段的上方.我们就称曲线 L 呈凹形;又如图 2.22(c),联结曲线 L 的两点的直线总位于两点间曲线段的下方.我们就称曲线 L 呈凸形.这里指的"上"、"下"是以 y 轴正向为准.从而可以给出曲线凹、凸性的定义.

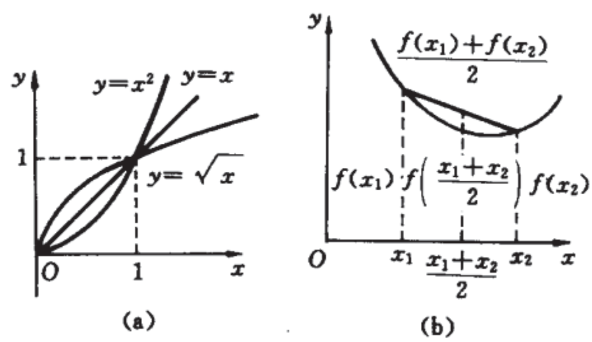


图　2.22

定义 1　若函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续,对(a,b)内任意两点 x_1,x_2,恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

成立,则称函数 $f(x)$在(a,b)内是凹的;

若恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

成立,则称函数 $f(x)$在(a,b)内是凸的.

要直接应用定义 1 判别函数 $f(x)$的凹凸性是较困难的.但若函数 $f(x)$有连续微商 $f'(x)$.根据微商的几何意义.凹函数上每点的切线处于函数 $f(x)$图形下方,且切线的斜率 $f'(x)$是增加

的；凸函数上每点的切线在函数 $f(x)$ 的图形上方，且切线的斜率 $f'(x)$ 是减少的. 但是 $f'(x)$ 的增减性又可用 $f''(x)$ 的符号来判断. 于是有如下的定理.

定理 1 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续且存在二阶微商 $f''(x)$.

(1)若对任意的 $x\in(a,b)$，有 $f''(x)>0$，则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是凹的.

(2)若对任意的 $x\in(a,b)$，有 $f''(x)<0$，则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是凸的.

证 在 (a,b) 内任取两点 x_1 与 x_2，且 $x_1<x_2$. 令

$$x_0=\frac{1}{2}(x_1+x_2),$$

即

$$x_1+x_2-2x_0=0.$$

根据假设函数 $f(x)$ 在 x_0 的泰勒公式为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$$

其中 ξ 在 x 与 x_0 之间.

特别，当 $x=x_1$ 与 $x=x_2$ 时，分别有

$$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(x_1-x_0)^2,$$

$$x_1<\xi_1<x_0$$

$$f(x_2)=f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(x_2-x_0)^2,$$

$$x_0<\xi_2<x_2$$

将上述两个等式的两端分别相加，得到

$$\begin{aligned}f(x_1)+f(x_2)=&2f(x_0)+f'(x_0)(x_1+x_2-2x_0)\\&+\frac{1}{2}[f''(\xi_1)(x_1-x_0)^2+f''(\xi_2)(x_2-x_0)^2]\\=&2f(x_0)+\frac{1}{2}[f''(\xi_1)(x_1-x_0)^2\end{aligned}$$

$$+f''(\xi_2)(x_2-x_0)^2]$$

(1)若对任意的 $x\in(a,b)$，有 $f''(x)>0$，则有 $f''(\xi_1)>0$，$f''(\xi_2)>0$从而有

$$f''(\xi_1)(x_1-x_0)^2+f''(\xi_2)(x_2-x_0)^2>0$$

于是有

$$f(x_1)+f(x_2)>2f(x_0)$$

即

$$f(x_0)=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

故函数 $f(x)$在(a,b)内是凹的；

(2)若对任意的 $x\in(a,b)$，有 $f''(x)<0$，则有 $f''(\xi_1)<0$，$f''(\xi_2)<0$，故有

$$f''(\xi_1)(x_1-x_0)^2+f''(\xi_2)(x_2-x_0)^2<0$$

于是

$$f(x_1)+f(x_2)<2f(x_0)$$

即

$$f(x_0)=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

故函数 $f(x)$在(a,b)内是凸的.

例 1 求函数 $f(x)=e^{-x^2}$ 的凹、凸区间.

解 在 2.7.1 中，已求出函数 e^{-x^2} 的上升、下降区间与极值点. 今应用定理 1 再求出它的凹、凸区间. 因为

$$f'(x)=-2xe^{-x^2},f''(x)=2(2x^2-1)e^{-x^2}.$$

令 $f''(x)=0$，得到

$$x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

故可把它的定义域$(-\infty,+\infty)$分成三个区间：

$$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$$

考虑 $f''(x)$在这些区间的符号,并列表如下:

x	$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$
$f''(x)$	+	−	+
$f(x)$	凹	凸	凹

从例 1 可看出:$x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$的两侧,左侧是凹形的,右侧是凸形的,从 $x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$的两侧正好与 x_1 的两侧相反,左侧是凸形的,右侧是凹形的. 从而说明,$x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$是凹形与凸形的分界点,$x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$也是凹形与凸形的分界点. 一般地有如下定义.

定义 2 若函数 $y=f(x)$在含点 x_0 的某个区间内连续,且点 x_0 是连续曲线 $y=f(x)$凹形与凸形的分界点,则称点 $M(x_0,f(x_0))$为曲线 $y=f(x)$的扭转点或拐点 .

与讨论函数存在极值的必要条件与充分条件一样,可得函数有扭转点的必要条件与充分条件.

定理 2 设函数 $f(x)$在点 x_0 的邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内存在二阶微商,且点 $M(x_0,f(x_0))$是函数 $f(x)$的图形上的扭转点,则 $f''(x_0)=0$.

定理 3 设函数在点 x_0 的邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内存在二阶微商,且这个二阶微商在通过点 x_0 时改变符号,则点$(x_0,f(x_0))$是函数图形上的扭转点,且有 $f''(x_0)=0$.

于是由定理 3 可知,例 1 中的 $x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,$x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$都是曲线 e^{-x^2} 的扭转点. 在 x_1 处曲线由凹变凸;在 x_2 处曲线由凸变凹.

在此我们还必须说明,仅满足方程 $f''(x)=0$ 的解 x_0,不一定对应曲线 $y=f(x)$的扭转点. 例如曲线 $f(x)=x^4$,在点 $x=0$ 显然

有 $f''(0)=0$,但 $x=0$ 却是这曲线的极值点.

另外,连续函数有可能在二阶微商不存在的点处出现曲线的扭转点.所以在求函数的扭转点时,还要考虑那些使 $f''(x)$ 不存在的点.

例如,曲线 $y=(x-2)^{5/3}+3$,有 $y'=\frac{5}{3}(x-2)^{2/3}$,$y''=\frac{10}{9}(x-2)^{-\frac{1}{3}}$.求得使 y'' 不存在的点为 $x=2$.显然点 $(2,3)$ 是曲线的扭转点.

2.8.2 曲线的渐近线

有些函数的图形会远离原点无限地伸展出去,例如双曲线、抛物线等.因此还需要研究曲线无限伸展时的变化状态.有的曲线会与某条直线无限地接近.我们把这种直线叫做曲线的渐近线.若知道曲线的渐近线,就可以清楚地了解曲线在伸向无穷远处时的变化过程.故要较正确地画出函数的图形,还必须找出它们的渐近线.

定义 若当动点沿着曲线无限远离原点时,动点与某一直线的距离趋向于零,则称这条直线为该曲线的渐近线.

如何求出已给曲线的渐近线呢?曲线的渐近线有三种,即垂直渐近线、水平渐近线与斜渐近线.

(一) 垂直渐近线

若函数 $f(x)$ 适合

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\infty \text{ 或 } \lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$$

则称直线 $x=a$ 是曲线 $y=f(x)$ 的垂直渐近线,即垂直于 x 轴的渐近线(如图 2.23).

例如 $f(x)=\frac{1}{(x+1)(x-2)}$,由于

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to -1^-} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty, \lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$$

故此曲线有两条垂直渐近线，分别为 $x=-1$ 与 $x=2$

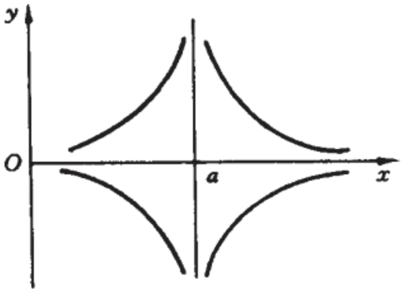


图 2.23

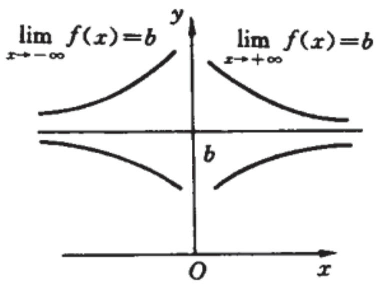


图 2.24

（二）水平渐近线

若函数 $f(x)$适合

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$ 或 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$

则称直线 $y=b$ 是曲线 $y=f(x)$的一条水平渐近线，即为平行于 x 轴的渐近线(如图 2.24).

例如曲线 $y=\mathrm{e}^{-x^2}$，有

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} = 0 \text{ 或 } \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x^2} = 0.$$

所以这条曲线有水平渐近线 $y=0$.

（三）斜渐近线

再进而考察一般的斜渐近线.

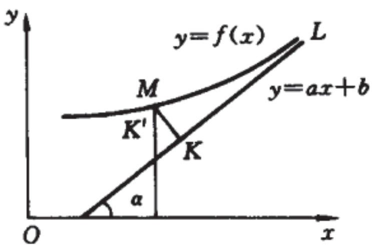


图 2.25

设直线 L 的方程为 $y=ax+b(a\neq 0)$，它与 x 轴正向的交角为 α. MK 是曲线 $y=f(x)$上点 M 到直线 L 的距离，MK'是当横坐标 x 相同时，曲线上点 M 的纵坐标与直线 L 上点 K'的纵坐标差(图 2.25). 由直角三角形 $MK'K$ 得

$$MK' = \frac{MK}{|\cos\alpha|}$$

于是条件 MK 趋向于零成立必须而且只须条件 MK' 趋向于零成立. 但是

$$MK' = f(x) - ax - b$$

由此得到,直线 $y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的渐近线的充分必要条件为

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - ax - b] = 0$$

容易由这一条件确定出 a 与 b 的值. 因为这时也有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x) - ax - b}{x} = 0$$

即

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - a\right) = 0$$

或者

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = a$$

求出 a 以后,再由上面的条件得 b

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - ax]$$

反之,由这些算式定出的 a 与 b 并由此得到的直线 $y=ax+b$ 显然就是曲线的渐近线.

定理 曲线 $y=f(x)$ 存在斜渐近线的充分必要条件是:当 x 趋向于无穷大时,下面两个极限存在

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - ax]$$

这时渐近线的方程为 $y=ax+b$.

如果要确定曲线与渐近线的相对位置,需要分别讨论当 x 趋向于 $+\infty$ 和 $-\infty$ 时,差 $f(x)-(ax+b)$ 的符号,若它是正号,则曲线在渐近线之上;若是负号,则曲线在渐近线之下. 若这个差不保持同一符号,则曲线在渐近线上下摆动.

例 1 求曲线 $y=\dfrac{x^2}{1+x}$的渐近线.

解 因为所给曲线适合

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2}{1+x}=\infty$$

故知 $x=-1$ 是这条曲线的垂直渐近线. 再求它的斜渐近线. 由极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(1+x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x}=1$$

得 $a=1$. 又由极限

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-x\right)=-\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x}=-1$$

得 $b=-1$. 如此得其斜渐近线为 $y=x-1$.

例 2 设曲线为 $x=\dfrac{1}{t}$,$y=\dfrac{t}{t+1}$,求其渐近线.

解 因为当 $x\to\infty$时,$t\to0$,故有

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{t\to0}\frac{t}{t+1}=0$$

即 $y=0$ 为水平渐近线. 另外,当 $x\to-1$ 时,$t\to-1$,故有

$$\lim_{x\to-1}y=\lim_{t\to-1}\frac{t}{1+t}=\infty$$

即 $x=-1$ 为垂直渐近线.

2.8.3 作图的分析法,例

现在我们已掌握了应用微商讨论函数的增减性、极值点;曲线的凹凸性、扭转点,以及用极限讨论曲线的渐近线等方法. 在对函数的各种变化性态进行深入研究之后,就可能比较精确地描绘出函数的图形. 作图的大致步骤如下:

(1) 确定函数的定义域,求出函数的间断点;

(2) 确定函数是否具有奇偶性或周期性;

(3) 确定函数的上升、下降的区间与极值点;

(4) 确定曲线的凹、凸性区间与扭转点；

(5) 确定曲线的渐近线；

(6) 根据需要，有时还要找一些辅助点，例如曲线与坐标轴的交点或曲线上的某些特殊点.

一般可将(3)与(4)的讨论列成表格，然后按曲线的性态逐段描绘出图形.

例 1 描绘函数 $f(x)=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ 的图形.

解 函数 $f(x)$ 除 $x\neq -1$ 外在 $-\infty<x<\infty$ 上都有定义，并且

$$\lim_{x\to -1} f(x) = -\infty$$

因此 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的垂直渐近线.

我们索性找一下有无其它渐近线.

因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3-x(x+1)^2}{(x+1)^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x^2+2x-1}{(x+1)^2}=-5$$

所以 $y=x-5$ 是 $f(x)$ 的斜渐近线.

容易看到，当 $x=1$ 时 $f(x)=0$；当 $x=0$ 时 $f(x)=-1$，因此函数的图形分别与 x 轴，y 轴交于点 $(1,0)$，$(0,-1)$.

由于

$$f'(x)=\frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$$

所以

$$f'(1)=f'(-5)=0$$

这表明 $f(x)$ 在点 $(1,0)$，$\left(-5,13\dfrac{1}{2}\right)$ 有水平切线，有可能出现

$f(x)$的极值. 但是

$$f''(x) = \frac{24(x-1)}{(x+1)^4}$$

故得

$$f''(-5) < 0, f''(1) = 0$$

所以 $x=-5$ 为极大值点，$x=1$ 可能是扭转点. 此外在 $x=-1$ 处，$f''(x)$不存在，因而函数图形在经过 $x=-1$ 时也可能改变凹凸性.

以所得的几个特性点为端点把整个数轴分成几个区间，考察在这些区间中微商的变化情况就得到下表.

为了简便用"凸↗"表示曲线凸的上升；"凹↗"表示凹的上升，而用"凸↘"表示曲线凸的下降，"凹↘"表示凹的下降.

x	$(-\infty,-5)$	-5	$(-5,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	不存在	+	0	+
$f''(x)$	−	−	−	不存在	−	0	+
$f(x)$	凸↗	极大点 -13.5	凸↘	∞	凸↗	扭转点 0	凹↗

根据上面的分析，即可描绘出函数的大致图形(图 2.26).

例 2 描绘函数 $f(x)=\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$的图形.

解 函数的定义域是除点 $x=1$ 外的整个数轴. 由于

$$f'(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$$

令 $f'(x)=0$ 得 $x_1=3, x_2=-1$，因 $f''(3)>0$，故 $x_1=3$ 是极小值点，其极小值为 $f(3)=0$；又 $f''(-1)<0$，故 $x_2=-1$ 为极大值点，其极大值为 $f(-1)=-2$.

再求渐近线. 容易看出

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$$

所以 $x=1$ 为 $f(x)$的一条垂直渐近线. 由于

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \lim_{x\to\infty} \frac{(x-3)^2}{4x(x-1)} = \frac{1}{4}$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - \frac{1}{4}x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x-3)^2}{4(x-1)} - \frac{x}{4}\right] = -\frac{5}{4},$$

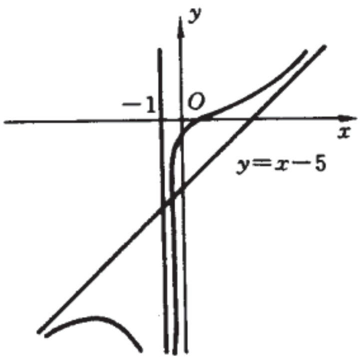


图 2.26

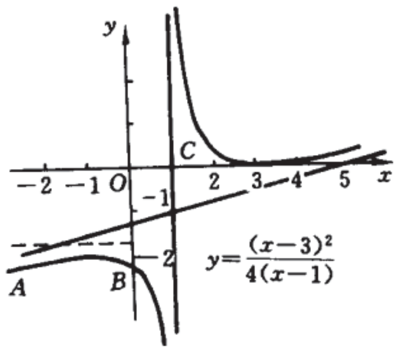


图 2.27

于是得 $f(x)$的另一条渐近线为 $y=\frac{1}{4}(x-5)$.

考察函数及其微商在几个特性点所分成的区间之变化情况，并列成下表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	不存在	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	不存在	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	凸↗	极大点 -2	凸↘	∞	凹↘	极小点 0	凹↗

按此表及上面所求的渐近线，即可描出函数的图形(图2.27).

例 3 描绘分布曲线 $y=e^{-x^2}$.

解 因为 $y=\mathrm{e}^{-x^2}$. 是定义在 $(-\infty,\infty)$ 上的偶函数，所以它的图形可以无限伸展且对称于 y 轴.

关于这个函数的上升、下降区间、凹凸，扭转点等上面都已讨论过. 今再列表如下：

x	$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$	0	$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	凹↗	扭转点 $\sqrt{\mathrm{e}}/\mathrm{e}$	凸↗	极大点 1	凸↘	扭转点 $\sqrt{\mathrm{e}}/\mathrm{e}$	凹↘

又因 $\lim\limits_{x\to\infty}y=0$，故 x 轴为一条水平渐近线. 根据这些分析可大致描出 $y=\mathrm{e}^{-x^2}$ 的图形（图 2.28）它在概率论与数理统计中十分有用.

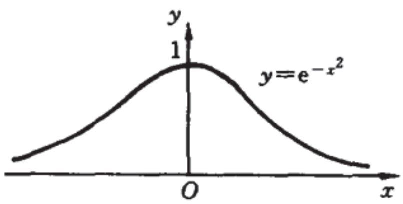


图 2.28

复习思考题

1. 若二阶微商 $f''(x)$ 在区间 (a,b) 内恒大于零，问 $f(x)$ 的图形在 (a,b) 内有什么特性？

2. 何谓函数 $y=f(x)$ 的扭转点？满足 $f''(x)=0$ 的点是否一定是扭转点？

3. 设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内具有三阶连续导数，若 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)=0$，而 $f'''(x_0)\neq0$，问 $x=x_0$ 是否为极值点？为什么？又 $x=x_0$ 是否为扭转点？为什么？

4. 当曲线 $y=f(x)$的图形无限伸展时,在什么条件下有水平渐近线?有斜渐近线?

5. (1)曲线是由参数方程 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$所表示的. 验证:只有在 $t=t_0$ 的那些值且$\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)=\infty$和$\lim\limits_{x\to t_0}\psi(t)=\infty$时才可能有斜渐近线. 若斜渐近线的方程为 $y=ax+b$,则

$$a=\lim_{t\to t_0}\frac{\psi(t)}{\varphi(t)},\qquad b=\lim_{t\to t_0}[\psi(t)-a\varphi(t)]$$

(2) 在参数方程 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$所表示的曲线中,如何求平行于坐标轴的渐近线?

6. 描绘函数 $y=f(x)$的图形有哪些主要步骤?

习题 2.8

1. 求下列函数的凹凸区间和扭转点:

(1) $y=x^5$　　(2) $y=e^{\operatorname{arctg}x}$

(3) $y=a-\sqrt[5]{(x-b)^2}$　　(4) $y=x^4(12\ln x-7)$

(5) $y=(1+x^2)e^x$　　(6) $y=x+\sin x$

(7) $y=\ln(1+x^2)$　　(8) $y=\dfrac{x^3}{x^2+3a^2}$　$(a>0)$

(9) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$　　(10) $y=\dfrac{a}{x}\ln\dfrac{x}{a}$　$(a>0)$

2. 求下列曲线的扭转点:

(1) $x=t^2$, $y=3t+t^3$

(2) $x=e^t$, $y=\sin t$

3. 利用函数的凹凸性,证明下列不等式:

(1) $e^{\frac{x+y}{2}}<\dfrac{e^x+e^y}{2}$

(2) $(x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}<x\ln x+y\ln y$, $0<x<y$

4. 问 a, b 为何值时,点(1,3)为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的扭转点.

5. 试决定 $y=k(x^2-3)^2$ 中 k 的值,使曲线在扭转点处的法线通过原点.

6. 选定 α 和 β 的值,使点(2,2.5)为曲线 $x^2y+\alpha x+\beta y=0$ 的扭转点. 又问它还有哪些扭转点?

7. 证明曲线 $y=\frac{x+1}{x^2+1}$ 有三个扭转点在同一直线上.

8. 试证曲线 $y=\pm e^{-x}$ 和 $y=e^{-x}\sin x$ 的图形在曲线 $y=e^{-x}\sin x$ 的扭转点上有公共切线.

9. 求下列曲线的渐近线：

(1) $y=\frac{2}{x^2-3x+2}$　　(2) $y=xe^{\frac{2}{x}}+1$

(3) $y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$　　(4) $y=2x+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$

(5) $y^3=a^3-x^3$　　(6) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

(7) $y=\frac{3x^2-2x+3}{x-1}$　　(8) $(y+x+1)^2=x^2+1$

(9) $y=\frac{xf(x)+a}{f(x)}$，其中 $f(x)$ 为多项式(不恒等于常数)，且 $a\neq 0$.

(10) $y=\frac{\sin x}{x}$

10. 求由参数方程表示的曲线的渐近线：

(1) $x=\frac{2e^t}{t-1}$　　$y=\frac{te^t}{t-1}$

(2) $x=\frac{3at}{1+t^3}$　　$y=\frac{3at^2}{1+t^3}$　$(a>0)$

(3) $x=\frac{t-8}{t^2-4}$　　$y=\frac{3}{t(t^2-4)}$

11. 证明抛物线 $y=ax^2$ 无渐近线.

12. 描绘下列各曲线的图形：

(1) $y=\frac{8a^3}{x^2+a^2}$　　(2) $y=x-2\operatorname{arctg}x$

(3) $y=x-\frac{1}{x}$　　(4) $y=\frac{x^3}{3-x^2}$

(5) $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$　　(6) $y=\frac{\ln x}{x}$

(7) $y=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$　　(8) $y=e^{-x}\sin x$　$(0\leqslant x\leqslant\pi)$

2.9 平面曲线的曲率

2.9.1 曲率的概念

在 2.8.1 中,曾利用函数 $f(x)$的二阶微商 $f''(x)$的符号判断了曲线的凹性和凸性,或者说确定了曲线的弯曲方向.现在要来考虑曲线弯曲的程度.例如梁受力弯曲时,断裂往往发生在弯曲最利害的地方、火车拐弯越利害之处,产生的离心力也越大.曲率就是表示曲线的弯曲程度的一个量.那么弯曲程度是什么意思呢?比如在直线上各点作切线就是它本身,且沿直线 L 从 C 点到 D 点,切线方向无变化(图 2.29(a)).但是沿曲线 S 从 A 点到 B 点,曲线拐了一个弯,且切线方向随着切点的移动而改变.因此常说的"拐弯抹角"指的是弯与角的内在联系.在曲线 S 上正是从 A 到 B 拐过的一段弯路 $\sigma=\overset{\frown}{AB}$,切线方向转了一个角度 φ,它显然可用这段曲线在两个端点处的切线夹角来表示.于是曲线的弯曲程度就可由 φ 与 σ 这两个量来确定(图 2.29(b)).

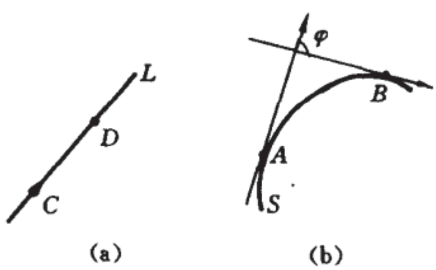


图 2.29

我们还可看出,当两个弧段 σ 相等时,切线方向转动角度大者弯曲程度较大(图 2.30(a));当两弧段的切线方向的转动角度 φ 相等时,弧段长者弯曲程度较小(图 2.30(b)).

因此很自然地用 φ 与 σ 这两个量的商 $\frac{\varphi}{\sigma}$ 来表示该弧段的平均

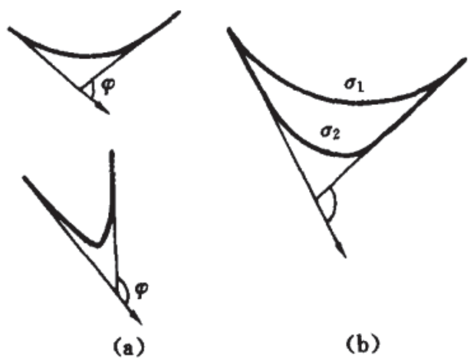


图 2.30

弯曲程度，并称为曲线在这弧段上的平均曲率. 为了定义曲线在某点 A 处的曲率，可在 A 的近旁任取曲线上的一点 B，计算出 $\overset{\frown}{AB}$ 弧段的平均曲率，当 B 越接近 A 时，则这个平均曲率越能反映出曲线在点 A 的弯曲程度. 当 $\lim\limits_{\sigma\to0}\frac{\varphi}{\sigma}$ 收敛时，自然就定义曲线在点 A 的曲率为其平均曲率 $\frac{\varphi}{\sigma}$ 的极限. 根据以上分析得到

定义 设 B 是曲线上异于 A 的任一点，如果当 B 沿曲线趋于 A 时，弧段在点 A 与 B 的切线间的夹角 φ 与这弧段的长 σ 之比的极限存在，就称这极限为曲线在点 A 的曲率，常用小写字母 k 表示，即

$$k=\lim_{\sigma\to0}\frac{\varphi}{\sigma}$$

最简单的曲线是直线和圆，根据这个定义，就可以计算出它们的曲率.

由于直线上任意两点的切线夹角 φ 为零，所以任意一段直线的平均曲率 $\frac{\varphi}{\sigma}$ 也为零. 从而有 $k=0$，即直线上的曲率处处为零.

若在半径为 r 的圆周上取一弧段 $\overset{\frown}{AB}$，由于圆弧段两端的切线

夹角 φ 等于它所对的圆心角(图 2.31),所以圆弧段的长为 $\sigma=r\varphi$,而其平均曲率为

$$\frac{\varphi}{\sigma}=\frac{1}{r}$$

于是当 B 沿圆周趋于 A 时,就得到点 A 的曲率为

$$k=\lim_{\sigma\to 0}\frac{\varphi}{\sigma}=\lim_{\sigma\to 0}\frac{1}{r}=\frac{1}{r}$$

就是说,圆周上的曲率处处相等,且等于半径的倒数.

2.9.2 曲率的计算

直接利用定义计算一般曲线的曲率是十分困难的,但从它却可以导出实际计算曲率的公式.

设曲线方程为 $y=f(x)$. 在曲线上取横标为 x 和 $x+\Delta x$ 的点 A 和 B(图 2.32),当点 A 变至点 B 时,对应于 x 的增量 Δx,弧长的增量为 Δs. 切线正向与 x 轴正向的夹角 α 的增量为 $\Delta\alpha$,于是在弧段 AB 上

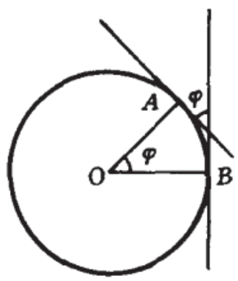


图 2.31

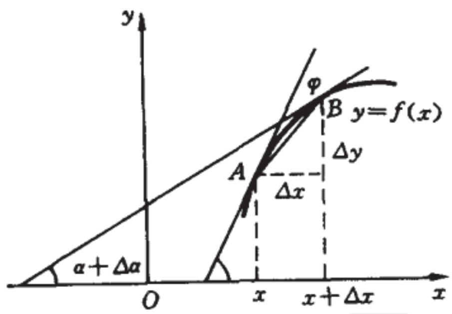


图 2.32

$$\sigma=|\Delta s|,\ \varphi=|\Delta\alpha|$$

按照定义,曲线在点 A 的曲率为

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

从图 2.32 中容易看出

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x), \operatorname{tg}(\alpha + \Delta\alpha) = f'(x + \Delta x)$$

由此得

$$\alpha = \operatorname{arctg} f'(x), \alpha + \Delta\alpha = \operatorname{arctg} f'(x + \Delta x)$$

所以

$$|\Delta\alpha| = |\operatorname{arctg} f'(x + \Delta x) - \operatorname{arctg} f'(x)|$$

另一方面，若把曲线在区间$[a, x]$中的一段弧长记为 $s(x)$，其中 a 是左端点的横标，那么弧段$\overset{\frown}{AB}$的长为

$$\Delta s = s(x + \Delta x) - s(x)$$

于是

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\operatorname{arctg} f'(x + \Delta x) - \operatorname{arctg} f'(x)|}{|s(x + \Delta x) - s(x)|}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left|\dfrac{\operatorname{arctg} f'(x+\Delta x) - \operatorname{arctg} f'(x)}{\Delta x}\right|}{\left|\dfrac{s(x+\Delta x) - s(x)}{\Delta x}\right|}$$

上式分子的极限为

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arctg} f'(x)\right| = \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arctg} y'\right| = \frac{|y''|}{1 + y'^2}$$

分母的极限为

$$\left|\frac{\mathrm{d}s(x)}{\mathrm{d}x}\right| = \sqrt{1 + y'^2}$$

这个公式在第三章中证明.从而就导出了计算曲率的公式

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

如果曲线用参数方程 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$给出，则因

$$y' = \frac{\psi'}{\varphi'}, y'' = \frac{\psi''\varphi' - \psi'\varphi''}{\varphi'^3}$$

就有

$$k = \frac{|\psi''\varphi' - \psi'\varphi''|}{(\varphi'^2 + \psi'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

这就是曲线在参数方程下的曲率公式.

例 计算椭圆 $x=a\cos t, y=b\sin t$ 的曲率.

解 因为 $\varphi'=-a\sin t, \varphi''=-a\cos t, \psi'=b\cos t, \psi''=-b\sin t$, 代入公式得椭圆的曲率为

$$k=\frac{ab}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

特别,当 $a=b$ 时,就又得到了圆的曲率

$$k=\frac{1}{a}$$

2.9.3 曲率圆

我们曾用切线的斜率作为函数的变化率,即微商的几何解释. 今用圆的半径来作为曲率的几何尺度,即为了更形象地表示曲率,引入曲率圆的概念.

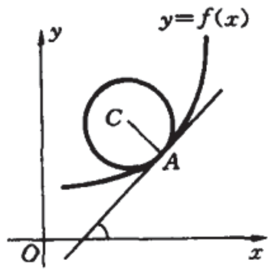


图 2.33

假定曲线 $y=f(x)$ 在点 A 的曲率 k 不为零. 过点 A 引曲线的法线,在此法线上曲线凹的一侧取点 C,使 $AC=\frac{1}{k}$,然后以 C 为中心,AC 为半径作一圆(图 2.33)则这个圆就叫做曲线在点 A 的曲率圆或密切圆,它的半径叫曲率半径,圆心叫曲率中心.

密切圆和曲线在点 A 显然是相切的,并且有相同的凹凸. 由于密切圆的曲率等于半径的倒数,所以它在点 A 与曲线也有相同的曲率. 因此,在通过点 A 的一切圆中,以这个密切圆在点 A 附近和曲线的形状最为接近. 这就是在涉及有关曲线的凹凸和曲率的问题中,常用它来代替曲线的理论依据.

曲率圆的概念不仅给出了曲率的几何直观解释,而且在实际应用中,有时要利用曲率圆或曲率半径.

例 图 2.34 表示铁路由直轨 BO 转弯到点 $A(2,2)$ 的一段线

路. 问$\overset{\frown}{OA}$应用何种曲线联结才使火车经过接合处时不发生振荡?

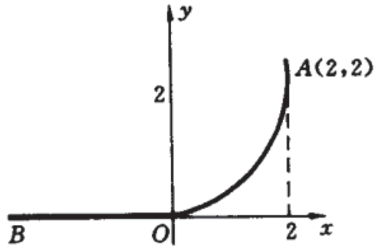


图 2.34

解 由物理学知,当一列火车在曲线轨道上以速度 v 运行时,所产生的离心力为

$$\frac{mv^2}{r} = mv^2 k$$

其中 m 为火车的质量. r 为各点处的曲率半径,k 为曲率. 当 m,v 为常数时,离心力随曲率 k 而变化. 当 k 不连续变化时,离心力就发生间断而突变,从而使列车产生振荡. 因此只有当曲率 k 连续变化时,离心力也连续变化,才不致于引起剧烈振动.

由此可见,应该选择最简单的曲线 $y=f(x)$ 作为$\overset{\frown}{OA}$弧段,使 BOA 成为连续、光滑、曲率连续变化的曲线. 特别是在接合点 O 处应满足下列条件:

(1) $f(0)=0$,(2) $f'(0)=0$,(3) $f''(0)=0$,即 $k=0$,以及曲线应通过点 $A(2,2)$,故有(4) $f(2)=2$.

易见,满足上述四个条件的最简单曲线应为三次多项式

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

其中 a,b,c,d 为待定常数. 根据上述四个条件恰能确定这四个常数,即$\overset{\frown}{OA}$弧段的方程应为立方抛物线 $y=\frac{1}{4}x^3$,而不是想像中的连接一段圆弧形状的路线.

复习思考题

1. 如何计算平面曲线的曲率?
2. 什么叫做曲率圆、曲率半径及曲率中心?

习题 2.9

1. 求下列曲线在指定点的曲率

(1) $xy=4$ 在点$(2,2)$处；

(2) $y=\ln x$ 在点$(1,0)$处；

(3) $y=x^3$ 在点(x,y)处；

(4) $y^2=8x$ 在点$\left(\dfrac{9}{8},3\right)$处；

(5) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$在点$(0,0)$处；

(6) $x^3+y^3=3axy$ 在点$\left(\dfrac{3}{2}a,\dfrac{3}{2}a\right)$处；

(7) $x=3t^2, y=3t-t^3$，在 $t=1$ 处；

(8) $x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t)$ 在 $t=\dfrac{\pi}{2}$处；

2. 求曲线 $y=2(x-1)^2$ 的最小曲率半径.

3. 对数曲线 $y=\ln x$ 上哪一点的曲率半径最小？并求出该点的曲率半径.

4. 求曲线 $y=\mathrm{e}^{-x^2}$，在点 $M(0,1)$处的曲率圆方程.

5. 证明：悬链线 $y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}(a>0)$上任一点 P 的曲率半径的数值等于点 P 之法线夹于点 P 与 x 轴间的长度.

6. 要使函数

$$f(x)=\begin{cases}x^3, & 当\ x\leqslant 1\\ ax^2+bx+c, & 当\ x>1,\end{cases}\quad (a>0)$$

到处都有连续曲率，a,b,c 应为何值？

7. 已知半径为 5，中心在$(0,5)$的圆弧 AO(图 2.35)，及连接两点 $B(1,3)$，$C(11,66)$的线段 BC，今用 5 次抛物线将点 O 与点 B 连接起来，使曲线 $AOBC$ 到处都有连续的曲率，试求该抛物线的方程.

总 复 习 题

1. 证明下列等式

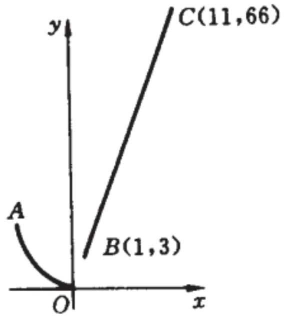


图 2.35

(1) $(\operatorname{arcsh}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$　　　　(2) $(\operatorname{arcth}x)'=\dfrac{1}{1-x^2}$

(3) $(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)}=\dfrac{(-1)^n e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$

2. 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可微，且 $f(a)=f(b)=0$，则存在 $\xi\in(a,b)$. 使

$$f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$$

3. 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内具有连续的 $(n+1)$ 阶微商. 当 x_0+h 也在这个邻域内时，有

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\cdots+\frac{f^{(n)}+(x_0+\theta h)}{n!}h^n \quad 0<\theta<1.$$

且 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$，证明 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$.

4. 设函数 $f(x)$ 存在二阶微商. 证明

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)+f(x_0-\Delta x)-2f(x_0)}{(\Delta x)^2}=f''(x_0)$$

5. 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{xe^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

求 $f'_+(0)$, $f'_-(0)$.

6. 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$　　　　(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}(e^x\ln x-x^{\ln x})$

(3) $\lim\limits_{\varphi\to 0}\left(\frac{\mathrm{tg}\varphi}{\varphi}\right)^{\frac{1}{\varphi^2}}$　　　　(4) $\lim\limits_{x\to 1^+}[\ln(x-1)]\ln x$

7. 求下列函数的极值:

(1) $y=x^2\mathrm{e}^{-x}$

(2) $y=2\sin x+\cos 2x \quad (0\leqslant x\leqslant 2\pi)$

(3) $y=a\mathrm{e}^{kx}+b\mathrm{e}^{-kx}$ ($a>0,b>0$,及 k 为常数)

(4) $y=\frac{\mathrm{e}^x}{\sin x}$

8. 当单位球中内接正圆锥的体积最大时,问它的高等于多少?

9. 证明:若函数 $f(x)$ 在某个区间 I 上可微,对任意的 $x_1,x_2\in I$,有

$$f(x_2)\geqslant f'(x_1)(x_2-x_1)+f(x_1)$$

则

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

反之亦然.

10. 设函数在区间 (a,b) 内存在二阶微商. 函数在区间 (a,b) 内是凹的,则对任意的 $x\in(a,b)$,有 $f''(x)\geqslant 0$.

11. 设 $f(x)$ 两次可微,且 $f''(x)<0$, $f(0)=0$,证明:对任意正数 x_1,x_2,有

$$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$$

12. 求 $\sqrt[n]{n}$ 的最大值(n 为正整数).

13. 设 $x>0$, $0<a<1$,证明:

$$x^a-ax\leqslant 1-a$$

14. 设在 $[0,1]$ 上, $|f''(x)|\leqslant M$,且 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内取得最大值,证明 $|f'(0)|+|f'(1)|\leqslant M$.

15. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的两次可微函数, $f(0)=f(1)=0$,证明存在 $0\in(0,1)$,使得

$$f''(c)=\frac{2f'(c)}{1-c}$$

3 单变量函数的积分学

积分学包括不定积分和定积分两部分. 它与微分学有着密切的联系. 微积分基本定理,又称牛顿-莱布尼兹公式揭示了微分与积分之间的本质联系,即微分与积分是互逆运算;揭示了定积分与不定积分之间的联系,即把定积分的计算归结为求原函数. 本章将从实际问题出发引进不定积分与定积分的概念,给出它们的各种计算法则和相互关系,并讨论积分学在几何、物理等领域中的重要应用.

3.1 不 定 积 分

3.1.1 原函数与不定积分的概念

在第二章中,我们曾经研究了对于给定的函数,如何求它的变化率,这就是求微商的问题. 例如,一个作变速直线运动的质点,若已知它的运动规律为

$$s = s(t)$$

要求它在时刻 t 的瞬时速度 $v(t)$. 就是求函数变化率的问题. 我们只要将函数 $s=s(t)$ 对 t 求微商就行了,即 $v(t)=s'(t)$.

但是,在科学技术的广泛实践中,常常要求研究与此相反的问题. 例如一个质点作直线运动时,若已知它的速度 $v(t)$ 与时间 t 的关系为

$$v(t) = at$$

其中 a 为某一常数,而要求出这个质点的运动规律,亦即确定它所

走过的路程 s 与时间 t 的关系.这就是说要求一个函数 $s(t)$,使得

$$s'(t) = at$$

易见,对任意常数 C,函数

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + C$$

都满足这样的要求.而由第 2.4 节所述的中值定理的推论知,凡属满足这样的要求的函数,都必是上述这种形式.故它就是所要求的这个质点运动的一般规律.其中出现了一个任意常数 C,这也是很自然的事情.由于仅仅知道了速度与时间的关系还不能完全确定质点所在位置和时间的关系.若要想知道在时刻 t 质点的确切位置,就必须知道在某一时刻 t_0,质点的所在位置 s_0.实际上,由

$$s_0 = \frac{1}{2}at_0^2 + C$$

就得到

$$C = s_0 - \frac{1}{2}at_0^2$$

代入后就有

$$s(t) = \frac{1}{2}a(t^2 - t_0^2) + s_0$$

于是,在时刻 t 质点的所在位置就完全确定了.确定质点运动规律的这样一个条件称为初始条件,t_0,s_0 分别称为时间 t、路程 s 的初始值.

求质点的运动规律的问题,就是已知一个函数的微商,要返回去求原来的函数(通常称为原函数)的问题,即微商的反问题.恰是从这类反问题引出了原函数与不定积分的概念.

定义 1 设函数 $f(x)$ 在某个区间上有定义.若存在一个函数 $F(x)$,使得对整个区间上都有

$$F'(x) = f(x) \text{ 或 } \mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x$$

则称 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 在这个区间上的一个原函数.

例如,因为$\left(\frac{1}{2}at^2\right)'=at$($a$ 为常数),故$\frac{1}{2}at^2$ 是 at 的一个原函数;

而 $d\sin x=\cos x dx$,故 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数.

若已知 $F(x)$是函数 $f(x)$的原函数,那么函数 $f(x)$的原函数是否唯一呢?

从原函数的定义可以看出,若一个函数存在原函数,则它的原函数不唯一.

实际上,若函数 $F(x)$是函数 $f(x)$的原函数,则对任意的常数 C,函数 $F(x)+C$ 也是 $f(x)$的原函数. 因为

$$(F(x)+C)' = F'(x)+C' = f(x)$$

所以由 C 的任意性可知,一个函数若存在原函数,那么它的原函数必有无限多个.

于是,我们立即会产生如下两个问题:一个是什么样的函数存在原函数?即原函数的存在性问题. 这个问题将在第三节中解决;另一问题是原函数的结构问题. 若 $F(x)$是函数 $f(x)$的一个原函数,则函数 $f(x)$的无限多个原函数是否每个都是 $F(x)+C$ 的形式?下面的定理回答了这个问题.

定理 设 $F(x)$是函数 $f(x)$的一个原函数,则函数 $f(x)$的无限多个原函数仅限于 $F(x)+C$ 的形式,其中 C 为任意常数.

证 已知 $F(x)$是函数 $f(x)$的原函数,即

$$F'(x) = f(x)$$

设 $G(x)$是函数 $f(x)$的任意一个原函数,即

$$G'(x) = f(x)$$

而

$$G'(x) - F'(x) = [G(x) - F(x)]' = f(x) - f(x) = 0,$$

由拉格朗日中值定理的推论知

$$G(x) - F(x) = C$$

或

$$G(x) = F(x) + C$$

其中 C 为任意常数,即函数 $f(x)$ 的任意的一个原函数 G 都是 $F(x)+C$ 的形式.

这个定理指出:一个函数的无限多个原函数彼此仅相差一个常数.因此欲求函数 $f(x)$ 的所有的原函数,只要求出函数 $f(x)$ 的一个原函数,然后再加上任意常数 C 就得到函数 $f(x)$ 的所有的原函数.

求已知函数的原函数的运算,称为积分运算,并可看出积分运算是微分运算的逆运算.

定义 2 函数 $f(x)$ 的所有原函数 $F(x)+C$,称为函数 $f(x)$ 的不定积分,记为

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

其中 C 为任意常数;"$\int$"称为积分符号它是拉丁字母"s"的变形;$f(x)$ 称为被积函数;乘积 $f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式;C 称为积分常数.

由此可见,一个函数的不定积分既不是一个数,也不是一个函数,而是一个函数族.例如

由于 $\left(\frac{1}{2}at^2\right)'=at$,故有 $\int at\mathrm{d}t=\frac{1}{2}at^2+C$;

由于 $\mathrm{d}\sin x=\cos x\mathrm{d}x$,故有 $\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$.

在几何上函数 $f(x)$ 的任意一个原函数 $F(x)$ 的图形称为函数 $f(x)$ 的一条积分曲线,且在该曲线上的点 x 处的切线的斜率恰好等于函数 $f(x)$ 在点 x 处的值.

不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义是一族积分曲线,它们有如下特点:在横坐标相同的点处,这些积分曲线的切线都有相同的斜

率. 因此这些切线必是相互平行的(图 3.1).

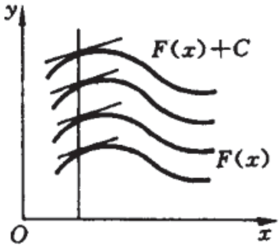


图 3.1

在许多问题中,有时要求 $f(x)$ 的通过点 (x_0, y_0) 的积分曲线. 这时可由表达式

$$y_0 = F(x_0) + C$$

中求得

$$C = y_0 - F(x_0)$$

于是得到所要求的积分曲线

$$y = F(x) + [y_0 - F(x_0)]$$

确定积分常数 C 的条件

$$y\big|_{x=x_0} = y_0 \text{ 或 } y(x_0) = y_0$$

也称为初始条件,带有初始条件的求原函数问题,称为初始值问题. 通常可写成

$$\begin{cases} y'(x) = f(x) \\ y\big|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

例 求一条通过点(2,5)而其切线的斜率为 $2x$ 的曲线.

解 根据题意,所求问题可归结为如下初始值问题:

$$\begin{cases} y'(x) = 2x \\ y\big|_{x=2} = 5 \end{cases}$$

从 $y'=2x$ 可知

$$y = \int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C$$

将初始条件 $y(2)=5$ 代入,得到 $5=2^2+C$,于是 $C=1$,从而初始值问题的解为

$$y = x^2 + 1$$

3.1.2 不定积分的公式表与运算法则

为了有效地计算不定积分,就要像计算微商时一样,必须掌握

基本积分公式表和几个运算法则. 由于积分运算是微分运算的逆运算,因此从每个基本微分公式,就可相应地得出一个积分公式. 故有下面的基本积分公式表.

1. $\int 0 \cdot dx = C$

2. $\int 1 \cdot dx = x + C$

3. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)$

4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, (x \neq 0)$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

7. $\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C$

8. $\int \csc^2 x dx = -\operatorname{ctg} x + C$

9. $\int e^x dx = e^x + C$

10. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0, a \neq 1)$

11. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$

12. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

这些公式都可以由微商公式推出.

例如,考虑公式 4. 当 $x>0$ 时,有

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

故有

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x + C$$

当 $x<0$ 时,有

$$(\ln|x|)' = [\ln(1-x)]' = \frac{1}{x}$$

从而得

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(-x) + C$$

因此不论 $x<0$ 还是 $x>0$,只要 $x\neq 0$,就有一般的公式 4.

另外,根据微商的运算法则,容易推知不定积分也有相应的运算法则.

1. $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)$ $\left(或\ \mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x\right)$

即不定积分的微商(或微分)等于被积函数(或被积表达式).

实际上,设 $F(x)$是 $f(x)$的原函数,即 $F'(x)=f(x)$,则有

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = [F(x)+C]' = f(x)$$

2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$ $\left(或\int \mathrm{d}f(x) = f(x) + C\right)$

即函数 $f(x)$的微商(或微分)的不定积分等于函数族 $f(x)+C$.

事实上,已知 $f(x)$是 $f'(x)$的原函数,则有

$$\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C \ \left(或\int \mathrm{d}f(x) = f(x) + C\right)$$

3. $\displaystyle\int [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$

即两个函数代数和的不定积分等于每个函数不定积分的代数和.

证 设 $F(x)$与 $G(x)$分别是 $f(x)$与 $g(x)$的原函数,故有 $[F(x)\pm G(x)]'=f(x)\pm g(x)$,由不定积分的定义,得

$$\int [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = F(x) \pm G(x) + C$$

另外，$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C_1$ 与 $\int g(x)\mathrm{d}x=G(x)+C_2$，故有

$$\int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x = F(x) \pm G(x) + (C_1 \pm C_2)$$

令 $C=C_1+C_2$，得到

$$\int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x = F(x) \pm G(x) + C$$

因此，$\int [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x$ 与 $\int f(x)\mathrm{d}x\pm \int g(x)\mathrm{d}x$ 都表示同样的一个函数族，故有

$$\int [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$$

这个运算法则可推广到任意的有限个函数的情形，即 n 个函数代数和的不定积分等于 n 个函数不定积分的代数和.

4. $\int af(x)\mathrm{d}x=a\int f(x)\mathrm{d}x$，$a$ 是常数，且 $a\neq 0$. 即被积函数不为零的常数因子可提到积分号之外 .

证 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，即 $F'(x)=f(x)$，故有 $[aF(x)]'=aF'(x)=af(x)$，即 $aF(x)$ 是函数 $af(x)$ 的原函数. 由不定积分的定义，得到

$$\int af(x)\mathrm{d}x = aF(x) + C$$

另外

$$a\int f(x)\mathrm{d}x = a[F(x) + C_1] = aF(x) + aC_1$$

由于 $a\neq 0$，因此 aC_1 仍是任意常数，令 $C=aC_1$，得到

$$a\int f(x)\mathrm{d}x = aF(x) + C$$

这就是说 $\int af(x)\mathrm{d}x$ 与 $a\int f(x)\mathrm{d}x$ 都表示同样一个函数族 $aF(x)+C$，故有

$$\int af(x)\mathrm{d}x = a\int f(x)\mathrm{d}x$$

注意：若 $a=0$，C_1 为任意常数，则 $aC_1=0$，即 aC_1 就不是任意常数. 从而看出，法则 4 中 $a\neq 0$ 是不能缺少的条件.

利用基本积分公式表和运算法则，就可以计算一些简单的不定积分.

例 1 求 $\int\left(3x^2+\dfrac{4}{x}\right)\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int\left(3x^2+\frac{4}{x}\right)\mathrm{d}x&=\int 3x^2\mathrm{d}x+\int\frac{4}{x}\mathrm{d}x\\&=3\int x^2\mathrm{d}x+4\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\&=3\left(\frac{x^3}{3}+C_1\right)+4(\ln|x|+C_2)\\&=x^3+4\ln|x|+C\end{aligned}$$

注意：等式右端的每一个不定积分都有一个任意常数. 因为有限个任意常数的代数和还是一个任意常数，所以上式只写一个任意常数. 下同.

例 2 求 $\int\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x&=\int x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x+\int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}+\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+C\\&=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C\end{aligned}$$

例 3 求 $\int\dfrac{1}{x^4(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^4(1+x^2)}\mathrm{d}x&=\int\left[\frac{1-x^4+x^4}{x^4(1+x^2)}\right]\mathrm{d}x\\&=\int\frac{1-x^2}{x^4}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \int \frac{1}{x^4}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x + \operatorname{arctg}x$$

$$= -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} + \operatorname{arctg}x + C.$$

例 4 求$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}\mathrm{d}x$.

解 $$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= -\operatorname{ctg}x - \operatorname{tg}x + C$$

上述各例,都是通过种种手段,达到把较复杂的被积函数简化的目的.使之成为若干个可查基本积分公式表的不定积分或已知的不定积分的形式.

3.1.3 换元积分法

大家知道,若函数的微商存在.由微商的定义、微商公式与运算法则总能求出函数的微商.可是求函数的不定积分则不然,由基本积分公式表与运算法则只能求出很少一部分较简单的函数的不定积分.而对更广泛的函数的不定积分,就要根据函数不同形式或不同类型选用不同的方法.因此求函数的不定积分有较大的灵活性.本段讲的换元积分法是求不定积分的最基本、最常用的两种重要方法之一.换元积分法是起化繁为简的作用,即它能将一些不定积分的被积函数化简,以便能应用基本积分公式表求出这个不定积分.换元积分法通常有两种形式.

定理 1(凑微分法) 设 $F(x)$是 $f(x)$的原函数,而 $x=\varphi(t)$具有连续微商,则 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$的原函数为 $F[\varphi(t)]$,即有

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = F[\varphi(t)] + C = F(x) + C = \int f(x)\mathrm{d}x$$

且称这个公式为第一换元法或凑微分法.

证 由复合函数的微商法则，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F[\varphi(t)]=\left.\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\varphi(t)}\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\varphi'(t)$$

即 $F[\varphi(t)]$是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$的原函数. 故有

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t=F(x)+C=\int f(x)\mathrm{d}x$$

当求 $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$ 时，从基本积分公式表上查不到这样的不定积分. 若设 $\varphi(t)=x$，把被积表达式 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$ 就凑成微分 $f(x)\mathrm{d}x$，而不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 已可从基本积分公式表上查出.

例 1 求 $\int\frac{1}{ax+b}\mathrm{d}x, a\neq0, a, b$ 为常数.

解 $$\int\frac{1}{ax+b}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{ax+b}\cdot\frac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)$$
$$=\frac{1}{a}\int\frac{1}{(ax+b)}\mathrm{d}(ax+b)$$

令 $u=ax+b$，则有

$$\int\frac{1}{ax+b}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int\frac{1}{u}\mathrm{d}u=\frac{1}{a}\ln|u|+C=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$$

例 2 求 $\int\mathrm{e}^{ax+b}\mathrm{d}x, a\neq0, a, b$ 为常数.

解 $$\int\mathrm{e}^{ax+b}\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^{ax+b}\frac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)=\frac{1}{a}\int\mathrm{e}^{(ax+b)}\mathrm{d}(ax+b)$$

令 $u=ax+b$，则有

$$\int\mathrm{e}^{ax+b}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int\mathrm{e}^{u}\mathrm{d}u=\frac{1}{a}\mathrm{e}^{u}+C=\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax+b}+C$$

待方法熟练后，可省去“设中间变量 u”的步骤，这样书写较简单.

例 3 求 $\int\frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x, a\neq0$.

解 $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}d\left(\frac{x}{a}\right)$

$$= \frac{1}{a}\text{arctg}\,\frac{x}{a}+C$$

例 4 求 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \quad (a>0)$.

解 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}dx$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}d\left(\frac{x}{a}\right) = \arcsin\frac{x}{a}+C$$

例 5 求 $\int \frac{dx}{x^2-2x+2}$.

解 对分母进行配方，有

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+2} = \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2+1} = \text{arctg}(x-1)+C$$

例 6 求 $\int \frac{\ln x}{x}dx(x>0)$.

解 $\int \frac{\ln x}{x}dx = \int (\ln x)d(\ln x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2+C$

例 7 求 $\int \sin^5 x dx$.

解 $\int \sin^5 x dx = \int \sin^4 x \cdot \sin x dx = \int (1-\cos^2 x)^2 d(-\cos x)$

$$= -\int (1-2\cos^2 x+\cos^4 x)d(\cos x)$$

$$= -\int 1\cdot d(\cos x)+2\int (\cos x)^2 d(\cos x) - \int (\cos x)^4 d(\cos x)$$

$$= -\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$$

例 8 求 $\int \frac{1}{\sin x}dx$ 与 $\int \frac{1}{\cos x}dx$.

解一 $$\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{1}{2\sin \frac{x}{2}\cos \frac{x}{2}}dx$$
$$= \int \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}}d\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$= \int \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}d\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C$$

解二 $$\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{\csc x - \operatorname{ctg} x}{\sin x(\csc x - \operatorname{ctg} x)}dx$$
$$= \int \frac{\left(\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\right)}{\csc x - \operatorname{ctg} x}dx$$
$$= \int \frac{1}{(\csc x - \operatorname{ctg} x)}d(\csc x - \operatorname{ctg} x)$$
$$= \ln|\csc x - \operatorname{ctg} x| + C$$

用两种解法所得到的结果虽然形式不同,但并不矛盾.实际上,这两个原函数是一样的.

另外,还可得到

$$\int \frac{1}{\cos x}dx = \int \frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

例 9 求 $\int \sin 2x dx$.

解一 $$\int \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x)d(2x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$$

解二 $$\int \sin 2x dx = \int 2\sin x\cos x dx = 2\int \sin x d(\sin x)$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\sin^2x+C=\sin^2x+C$$

像例 8 一样又得到不同形式的原函数. 但也不矛盾. 实际上这两个原函数只相差一个常数，因有

$$\sin^2x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}$$

在不定积分的计算中，常常会出现与前面介绍的情况相反的情形，即不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 虽不复杂，实际上却较难直接算出. 但若通过试验适当地选取变换 $x=\varphi(t)$，把原来的不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 化成

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(t)]\mathrm{d}\varphi(t)=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

而最右端的不定积分 $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$ 较容易计算. 然后在最后结果中将变量 t 还原成 x，即将 $t=\varphi^{-1}(x)$ 代入最后结果就行了.

定理 2(换元法)　设函数 $x=\varphi(t)$ 具有不为零的微商，存在反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$，且 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的原函数为 $G(t)$，则 $G[\varphi^{-1}(x)]$ 是 $f(x)$ 的原函数，即有

$$\int f(x)\mathrm{d}x=G[\varphi^{-1}(x)]+C=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

证　由复合函数及反函数的微商法则，得到

$$\{G[\varphi^{-1}(x)]\}'=G'(t)[\varphi^{-1}(x)]'=f[\varphi(t)]\varphi'(t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

$$=f[\varphi(t)]\varphi'(t)\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=f[\varphi(t)]=f(x)$$

即 $f(x)$ 的原函数是 $G[\varphi^{-1}(x)]$，故有

$$\int f(x)\mathrm{d}x=G[\varphi^{-1}(x)]+C$$

这个公式称为第二换元法或换元法. 下面将通过一些例子来

说明这个公式的应用.

例 10 求 $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x \quad (a>0)$.

解 为了消去被积函数中的根号,设 $x=a\sin t$,于是有 $t=\arcsin\dfrac{x}{a}$,而 $-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$,因此

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\mid\cos t\mid=a\cos t$$

$$\mathrm{d}x=a\cos t\,\mathrm{d}t$$

从而得到

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\int a\cos t\,a\cos t\,\mathrm{d}t=a^2\int\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C$$

$$=\frac{a^2}{2}(t+\cos t\sin t)+C$$

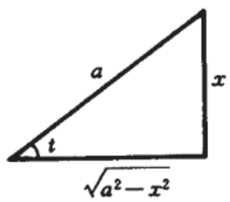


图 3.2

为了把 t 转换成原来变量 x,因为 $\sin t=\dfrac{x}{a}$,故可作一个以 t 为锐角的直角三角形,使它的斜边为 a,对边为 x(图 3.2)故邻边为 $\sqrt{a^2-x^2}$,从而得

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$$

例 11 求 $\int\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x \quad (a>0)$.

解 为了消去根号可令 $x=a\,\mathrm{sh}\,t$,它总是严格增的,由 1.3.4 知其反函数存在,为

$$t=\mathrm{sh}^{-1}\frac{x}{a}=\ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}\right)=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})-\ln a$$

而

$$\sqrt{x^2+a^2}=a\sqrt{\mathrm{sh}^2t+1}=a\mid\mathrm{ch}t\mid=a\mathrm{ch}t,\mathrm{d}x=a\mathrm{ch}t$$

从而得到

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x=\int 1\cdot\mathrm{d}t=t+C_1=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

其中 $C=C_1-\ln a$.

若令 $x=a\mathrm{ch}t(t>0)$,同样可得到积分

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C\ (x>a>0)$$

对于 $x<-a<0$ 的情形,可先作变换 $x=-u$,于是 $u>a>0$,且有

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x&=-\int\frac{1}{\sqrt{u^2-a^2}}\mathrm{d}u\\&=-\ln(u+\sqrt{u^2-a^2})+C_2\\&=-\ln(-x+\sqrt{x^2-a^2})+C_2\\&=\ln(-x-\sqrt{x^2-a^2})+C_2-\ln a^2\\&=\ln(-x-\sqrt{x^2-a^2})+C\ (x<-a<0)\end{aligned}$$

其中 $C=C_2-\ln a^2$,因此对 $|x|>a$,总有

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\ln\mid x+\sqrt{x^2-a^2}\mid+C\ (a>0)$$

例 12 求 $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x\quad(a>0)$.

解 令 $x=a\sec u$,即 $\frac{a}{x}=\cos u$,故 $0<u<\pi$,即 u 在第一,二象限. 于是,$\mathrm{tg}u$ 可正可负,当 $\mathrm{tg}u>0$ 时,有

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x&=\int\frac{a\mathrm{tg}u}{a\sec u}a\sec u\mathrm{tg}u\mathrm{d}u\\&=a\int\mathrm{tg}^2u\mathrm{d}u=a\int(\sec^2u-1)\mathrm{d}u\\&=a(\mathrm{tg}u-u)+C\end{aligned}$$

$$= \sqrt{x^2 - a^2} - a\arccos\frac{a}{x} + C$$

当 $\mathrm{tg}u<0$ 时,有

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x = -a(\mathrm{tg}u - u) + C$$

$$= -a\left(-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} - \arccos\frac{a}{x}\right) + C$$

$$= \sqrt{x^2-a^2} + a\arccos\frac{a}{x} + C$$

故有

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x = \begin{cases} \sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\dfrac{a}{x} + C, & x \geqslant a \\ \sqrt{x^2-a^2} + a\arccos\dfrac{a}{x} + C, & x \leqslant -a \end{cases}$$

例 13 求 $\int \frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x\ (a>0)$.

解 由于被积表达式可化为

$$\frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{x\,|\,x\,|\sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^2+1}}\mathrm{d}x$$

(1)当 $x>0$ 时,令 $x=\frac{1}{t}$,于是

$$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\sqrt{a^2t^2+1}}\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1+(at)^2}}\mathrm{d}(at)$$

$$= -\frac{1}{a}\ln\left[at + \sqrt{1+(at)^2}\right] + C$$

$$= -\frac{1}{a}\ln\left[\frac{a}{x} + \sqrt{1+\left(\frac{a}{x}\right)^2}\right] + C$$

$$= \frac{1}{a}\ln\left(\frac{x}{a + \sqrt{a^2 + x^2}}\right) + C$$

(2)当 $x<0$ 时，先令 $u=-x$，再令 $u=\frac{1}{t}$，有

$$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2 + x^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{-x}{a + \sqrt{a^2 + x^2}}\right) + C$$

因此，总有

$$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2 + x^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a + \sqrt{a^2 + x^2}}\right| + C \quad (a > 0)$$

通过上述例子可以看出，二次式根式去掉根号的方法比较常用的有作三角函数、双曲函数，以及倒函数的变换.

当二次式根式不是标准的平方和或平方差，而是 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 时，可先将 ax^2+bx+c 配方，化为标准形式再进行积分.

例 14 求 $\int \sqrt{2+x-x^2}\mathrm{d}x$.

解 因为 $\sqrt{2+x-x^2}=\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$，令 $x-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\sin t$，有 $t=\arcsin\frac{2x-1}{3}$，而 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，故有

$$\int \sqrt{2 + x - x^2}\mathrm{d}x = \frac{9}{4}\int \cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{9}{8}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C$$

$$= \frac{9}{8}\arcsin\frac{2x-1}{3} + \frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2} + C$$

3.1.4 分部积分法

分部积分法也是一种经常使用的积分方法. 它是与微分法中的乘积法则相对应的.

定理 设 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 都是 x 的可微函数，且 $u'(x)\cdot v(x)$ 与 $u(x)\cdot v'(x)$ 至少有一个有原函数，则有分部积分公式

$$\int uv'\mathrm{d}x = u \cdot v - \int u'v\mathrm{d}x$$

或

$$\int u\mathrm{d}v = u \cdot v - \int v\mathrm{d}u$$

证 为确定起见，不妨设 $u'(x)v(x)$ 有原函数. 根据函数乘积的微商法则，有

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$$

或

$$u(x)v'(x) = [u(x) \cdot v(x)]' - u'(x)v(x)$$

因为 $[u(x) \cdot v(x)]'$ 的原函数为 $u(x) \cdot v(x)$，而又设 $u'(x)v(x)$ 有原函数，所以 $u(x)v'(x)$ 也有原函数. 由不定积分法则与不定积分的定义，有

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \int [u(x) \cdot v(x)]'\mathrm{d}x - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

即

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

分部积分的公式表明：有时求函数 $u(x)v'(x)$ 的不定积分较困难，而函数 $u'(x)v(x)$ 的不定积分容易求出. 这时使用分部积分法就起到化繁为简的作用.

例 1 求 $\int x^3 \ln x\mathrm{d}x$.

解 令 $u(x) = \ln x, \mathrm{d}v = x^3\mathrm{d}x$，则 $\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x, v = \frac{x^4}{4}$，于是有

$$\int x^3 \ln x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int x^3\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{x^4}{16} + C$$

注意：从 $\mathrm{d}v$ 求 v 时，可以不加积分常数，因为加不加积分常数并不影响最后结果.

有时需要连续使用若干次分部积分公式，才能最后算出结果

例 2 求 $\int x^2 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解 令 $u(x)=x^2, \mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$,则 $\mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x, v=\mathrm{e}^x$,于是

$$\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

再令 $u(x)=x, \mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$,则 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x, v=\mathrm{e}^x$,于是

$$\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + \frac{C}{2}$$

代入上式,最后得到

$$\begin{aligned}\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x &= x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + C \\ &= \mathrm{e}^x(x^2-2x+2)+C\end{aligned}$$

对分部积分法熟悉之后,可省去"令"的步骤,使书写简化.

例 3 求 $\int x^2\sin x\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int x^2\sin x\mathrm{d}x &= \int x^2\mathrm{d}(-\cos x) \\ &= -x^2\cos x + \int\cos x\mathrm{d}(x^2) \\ &= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\mathrm{d}x \\ &= -x^2\cos x + 2\int x\mathrm{d}(\sin x) \\ &= -x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int\sin x\mathrm{d}x\right) \\ &= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C\end{aligned}$$

例 4 求 $\int\mathrm{arctg}x\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int\mathrm{arctg}x\mathrm{d}x &= x\mathrm{arctg}x - \int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= x\mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}(1+x^2) \\ &= x\mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C\end{aligned}$$

例 5 求$\int \sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x \quad (a>0)$.

解 $$\int \sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x=x\sqrt{x^2+a^2}-\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int \frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int \sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x+a^2\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int \sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x+a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+2C$$

移项得到

$$2\int \sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x = x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+2C$$

除以 2,有

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

例 6 求$\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x$与$\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x \quad (a\neq 0)$.

解 $$\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x$$

$$\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x.$$

可见这两个积分可以相互表示出来.若用加减消去法,消去被积函数含正弦因子的积分,则可解得另一个 被积函数含余弦因子的积分为

$$\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{(b\sin bx + a\cos bx)}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}+C$$

同样可得

$$\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x = \frac{(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}+C$$

应用分部积分公式,还能得到一些有用的递推公式.

例 7 求 $J_n=\int \frac{1}{(a^2+x^2)^n}\mathrm{d}x \quad (a\neq 0)$.

解 $$J_n=\int \frac{1}{(a^2+x^2)^n}\mathrm{d}x=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x$$

$$-2na^2\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2nJ_n-2na^2J_{n+1}$$

或

$$J_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{(2n-1)}{2n}\cdot\frac{1}{a^2}J_n,\quad n\geqslant 1$$

这个公式称为积分 J_n 的递推公式. 它把积分 J_{n+1} 的计算化为 J_n 的计算，当 $n=1$ 时，有

$$J_1=\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}+C$$

故由递推公式可知

$$J_2=\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)}+\frac{1}{2a^3}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}+C$$

及

$$J_3=\frac{1}{4a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{8a^4}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)}+\frac{3}{8a^5}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}+C$$

例 8 求 $\int (\ln x)^n\mathrm{d}x$.

解 $$I_n=\int (\ln x)^n\mathrm{d}x=x(\ln x)^n-n\int (\ln x)^{n-1}\mathrm{d}x$$

$$=x(\ln x)^n-nI_{n-1}$$

故有

$$I_n=x(\ln x)^n-nI_{n-1}\quad (n\geqslant 2)$$

当 $n=1$ 时,有 $\qquad I_1 = x\ln x - x + C$

由递推公式得到

$$I_2 = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$$

在计算积分中,有时要把分部积分法与换元法结合使用

例 9 求 $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx$.

解 令 $e^x = t > 0, dx = \frac{1}{t}dt$,则有

$$\begin{aligned}
\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx &= \int \arcsin t\, d\left(-\frac{1}{t}\right) \\
&= -\frac{1}{t}\arcsin t + \int \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}}dt \\
&= -\frac{1}{t}\arcsin t + \int \frac{1}{t^2\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 - 1}}dt \\
&= -\frac{1}{t}\arcsin t - \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 - 1}}d\left(\frac{1}{t}\right) \\
&= -\frac{1}{t}\arcsin t - \ln\left[\frac{1}{t} + \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 - 1}\right] + C \\
&= -\frac{1}{t}\arcsin t + \ln t + \ln(1 + \sqrt{1-t^2}) + C \\
&= -e^{-x}\arcsin e^x + x + \ln(1 + \sqrt{1-e^{2x}}) + C
\end{aligned}$$

3.1.5 有理函数的积分

前面我们已经介绍了求不定积分的一些基本方法,给出了基本积分公式表,而且应用它们解决了一些初等函数的积分.但是与求微商不同,求不定积分并无一般的途径可循.甚至有时还不能用初等函数的有限形式把某些初等函数的不定积分表示出来.例如

$$\int e^{-x^2}dx, \qquad \int \frac{1}{\ln x}dx, \qquad \int \sqrt{x^3+1}\,dx$$

$$\int \sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x,\quad \int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,\quad \int \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$$

$$\int \sin(x^2)\,\mathrm{d}x,\quad \int \cos(x^2)\,\mathrm{d}x,\quad \int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\ (0<k<1)$$

等等. 本段将要讨论的有理函数的积分却完全相反,通过把被积函数分解成一些简单分式之和,则总能把这种类型的不定积分求出来,从而获得圆满的解决.

(一)代数的基本定理

有理函数或有理分式的一般形式为

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$$

其中 m,n 为非负整数;$a_0,a_1,\cdots,a_n$;$b_0,b_1,\cdots,b_m$ 为实常数,且 $a_0\neq 0,b_0\neq 0$. 若 $n\geqslant m$ 则称 $R(x)$ 为有理假分式;若 $n<m$ 称 $R(x)$ 为有理真分式.

根据多项式的除法知,任何有理假分式总可以化成一个多项式与一个有理真分式之和. 例如

$$\frac{x^4-3}{x^2+2x+1}=(x^2-2x+3)-\frac{4x+6}{x^2+2x+1}$$

由于多项式的不定积分是容易计算的,因此求有理函数不定积分的关键在于求有理真分式的不定积分. 故只需考虑有理真分式的不定积分就行了. 为此先来说明如何将真分式函数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 分解为一些简单分式之和的问题. 这里假设 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 是两个互质的多项式,即它们之间无公因子. 有如下的代数基本定理:

定理 1 设 $q_m(z)=z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_{m-1}z+b_m$ 是一个 m 次多项式,则它在复平面上必有 m 个根.

证* 当 $|z|\geqslant 1$ 时,则有

$$|q_m(z)|\geqslant |z|^m-(|b_1||z|^{m-1}+\cdots+|b_{m-1}||z|+|b_m|)$$

$$=|z|^{m-1}\left[|z|-\left(|b_1|+\frac{|b_2|}{|z|}+\cdots+\frac{|b_{m-1}|}{|z|^{m-2}}+\frac{|b_m|}{|z|^{m-1}}\right)\right]$$

$$\geqslant |z|-(|b_1|+|b_2|+\cdots+|b_{m-1}|+|b_m|)$$

令 $M=[|b_1|+|b_2|+\cdots+|b_{m-1}|+2|b_m|+1]$，则当 $|z|\geqslant M$ 时有

$$|q_m(z)|\geqslant |b_m|+1>|b_m|=|q_m(0)|$$

因此有

$$\min_{|z|<+\infty}|q_m(z)|=\min_{|z|<M}|q_m(z)|$$

而 $|z|\leqslant M$ 是一个有界闭集，根据第六章知，二元连续函数 $f(x,y)=|q_m(x+\mathrm{i}y)|$，其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 必在圆 $x^2+y^2\leqslant M$ 上的某一个点 (x_0,y_0) 上达到最小值，即

$$f(x_0,y_0)=\min_{|z|\leqslant M}|q_m(z)|=\min_{|z|<+\infty}|q_m(z)|$$

今证明 $f(x_0,y_0)=|q_m(x_0+\mathrm{i}y_0)|=0$. 采用反证法，若在点 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 处，$q_m(z_0)\neq 0$. 因为 $q_m(z)-q_m(z_0)$ 是首项系数为 1 的 m 次多项式，且以 $z=z_0$ 为其根. 设它是 $q_m(z)-q_m(z_0)$ 的 $k\geqslant 1$ 重根，则有表达式

$$q_m(z)-q_m(z_0)=(z-z_0)^m+c_1(z-z_0)^{m-1}+\cdots+c_k(z-z_0)^k$$

即

$$q_m(z)=(z-z_0)^m+c_1(z-z_0)^{m-1}+\cdots+c_k(z-z_0)^k+q_m(z_0)$$

其中 $c_k\neq 0$. 设

$$\frac{c_k}{q_m(z_0)}=c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\quad c\neq 0$$

于是，有

$$\frac{q_m(z)}{q_m(z_0)}=1+c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-z_0)^k+\frac{c_{k+1}}{q_m(z_0)}(z-z_0)^{k+1}+\cdots+\frac{(z-z_0)^m}{q_m(z_0)}$$

若令 $|z-z_0|\leqslant 1$，则有

$$\max_{|z-z_0|\leqslant 1}\left|\frac{c_{k+1}}{q_m(z_0)}+\frac{c_{k+2}}{q_m(z_0)}(z-z_0)+\cdots+\frac{(z-z_0)^{m-(k+1)}}{q_m(z_0)}\right|=M_1$$

故有

$$\left|\frac{q_m(z)}{q_m(z_0)}\right|\leqslant|1+c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-z_0)^k|+M_1|z-z_0|^{k+1}$$

取 $z-z_0=re^{\frac{i(\pi-\theta)}{k}}$，其中 r 为待定的充分小的常数，则有

$$\left|\frac{q_m(z)}{q_m(z_0)}\right|\leqslant 1-cr^k+M_1r^{k+1}=1-r^k(c-M_1r)$$

因此，令 $r<\frac{e}{M_1}$，即 $c-M_1r>0$，就得到

$$\left|\frac{q_m(z)}{q_m(z_0)}\right|<1$$

故存在点 $z=z_0+re^{\frac{i(\pi-\theta)}{k}}$，使

$$|q_m(z)|<|q_m(z_0)|$$

这显然与点 z_0 是在全平面上达到最小值的点矛盾. 从而证明了点 z_0 一定是多项式 $q_m(z)$ 的一个根，即 $q_m(z_0)=0$.

于是用通常的多项式除法，得到

$$q_m(z)=(z-z_0)Q_{m-1}(z)$$

其中 $Q_{m-1}(z)$ 是 z 的 $m-1$ 次多项式. 若 $m-1>0$，同理可证 $Q_{m-1}(z)$ 也有根. 这样继续下去，就能证得 $q_m(z)$ 有 m 个根.

利用定理 1 可得到如下重要的推论

推论 任何一个实系数多项式

$$Q(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m\quad(b_0\neq 0)$$

都可以分解为一次实因式与二次实因式的乘积，其中二次实因式不能再分解为两个一次实因式的乘积，即

$$Q(x)=b_0(x-a)^k\cdots(x-b)^l(x^2+px+q)^\lambda\cdots(x^2+rx+s)^\mu$$

这里的 $a,\cdots,b,p,q,\cdots,r,s$ 都是实数；$k,\cdots,l,\lambda,\cdots,\mu$ 为正整数，即根的重复度，且 $p^2-4q<0,\cdots,r^2-4s<0$.

定理 2 设有真分式

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m},a_0\neq 0,b_0\neq 0$$

若

$$Q(x)=b_0(x-a)^k\cdots(x-b)^l(x^2+px+q)^\lambda\cdots(x^2+rx+s)^\mu$$

则真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 可以唯一地分解成下列简单分式之和

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)}+\cdots$$
$$+\frac{B_1}{(x-b)^l}+\frac{B_2}{(x-b)^{l-1}}+\cdots+\frac{B_l}{(x-a)}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^\lambda}$$
$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}}+\cdots+\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)}+\cdots$$
$$+\frac{U_1x+V_1}{(x^2+rx+s)^\mu}+\frac{U_2x+V_2}{(x^2+rx+s)^{\mu-1}}+\cdots+\frac{U_\mu x+V_\mu}{(x^2+rx+s)}$$

其中 $A_1,\cdots,A_k,B_1,\cdots,B_l,M_1,\cdots,M_\lambda,N_1,\cdots,N_\lambda,U_1,\cdots,U_\mu,V_1,\cdots,V_\mu$ 都是实常数.

证* 先设 a 是多项式 $Q(x)$ 的 k 重根，即有

$$Q(x)=(x-a)^kQ_1(x),Q_1(a)\neq 0$$

则有分解式

$$\frac{P(x)}{(x-a)^kQ_1(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$$

其中 A_1 是常数，且上式右端第二项是真分式.

实际上，对任一常数 A_1，考虑差式

$$\frac{P(x)}{(x-a)^kQ_1(x)}-\frac{A_1}{(x-a)^k}=\frac{P(x)-A_1Q_1(x)}{(x-a)^kQ_1(x)}$$

由于这是两个真分式之差，故也是真分式，今选取常数 A_1，使多项式 $P(x)-A_1Q_1(x)$ 能被 $(x-a)$ 除尽，即 $P(a)-A_1Q_1(a)=0$，且 $Q_1(a)\neq 0$，于是得到

$$A_1=\frac{P(a)}{Q_1(a)}$$

故有

$$P(x)-A_1Q_1(x)=(x-a)P_1(x)$$

其中 $P_1(x)$ 为多项式. 将它代入到上述的差式中消去因子 $(x-a)$，即得所要的分解式. 由此推知，真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 在分出形如 $\frac{A_1}{(x-a)^k}$ 的简单分式之后，分母 $Q(x)$ 中出现 $(x-a)$ 的幂指数至少

减少一次.

若对真分式$\dfrac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$再应用这个结论,可得到

$$\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}=\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\frac{P_2(x)}{(x-a)^{k-2}Q_1(x)}$$

如此继续应用 k 次,就得到分解式

$$\frac{P(x)}{(x-a)^kQ_1(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)}+\frac{P_k(x)}{Q_1(x)}$$

其中 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 都是常数,$P_k(x)$是多项式,$\dfrac{P_k(x)}{Q_1(x)}$是真分式.

其次考察分母 $Q(x)$有复根时,真分式$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$分解为简单分式之和的问题.

设复数 $\alpha+i\beta(\beta\neq0)$是多项式 $Q(x)$的 k 重根,这时共轭复数 $\alpha-i\beta$ 也是 $Q(x)$的 k 重根,即

$$\begin{aligned}Q(x)&=(x-\alpha-i\beta)^k(x-\alpha+i\beta)^kQ_1(x)\\&=(x^2+px+q)^kQ_1(x)\end{aligned}$$

其中 $p=-2\alpha,q=\alpha^2+\beta^2$,且 $p^2-4q<0,Q_1(\alpha+i\beta)\neq0$,则有分解式

$$\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^k}=\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}+\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q(x)}$$

其中 M_1,N_1 是常数,而上式右端的第二项是真分式.实际上,同实根的情形完全类似,对任意的常数 M_1,N_1 考虑差式

$$\begin{aligned}&\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^kQ_1(x)}-\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}\\&=\frac{P(x)-(M_1x+N_1)Q_1(x)}{(x^2+px+q)^kQ_1(x)}\end{aligned}$$

仍是真分子.今选取常数 M_1 与 N_1,使 $P(x)-(M_1x+N_1)Q_1(x)$ 能被 x^2+px+q 除尽,即有

$$P(\alpha+i\beta)-[M_1(\alpha+i\beta)+N_1]Q_1(\alpha+i\beta)=0$$

与

$$P(\alpha-\mathrm{i}\beta)-[M_1(\alpha-\mathrm{i}\beta)+N_1]Q_1(\alpha-\mathrm{i}\beta)=0$$

由此得到

$$M_1(\alpha+\mathrm{i}\beta)+N_1=\frac{P(\alpha+\mathrm{i}\beta)}{Q_1(\alpha+\mathrm{i}\beta)}$$

与

$$M_1(\alpha-\mathrm{i}\beta)+N_1=\frac{P(\alpha-\mathrm{i}\beta)}{Q_1(\alpha-\mathrm{i}\beta)}$$

若令$\frac{P(\alpha+\mathrm{i}\beta)}{Q_1(\alpha+\mathrm{i}\beta)}=c+\mathrm{i}d$,故有$\frac{P(\alpha-\mathrm{i}\beta)}{Q_1(\alpha-\mathrm{i}\beta)}=c-\mathrm{i}d$ 于是,有

$$\begin{cases}(\alpha M_1+N_1)+\mathrm{i}\beta M_1=c+\mathrm{i}d\\(\alpha M_1+N_1)-\mathrm{i}\beta M_1=c-\mathrm{i}d\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}\alpha M_1+N_1=c\\\beta M_1\qquad\quad=d\end{cases}$$

由于 $\beta\neq0$,故有

$$M_1=d/\beta,\quad N_1=c-\frac{\alpha}{\beta}d$$

对于这样选取的 M_1 与 N_1,就有

$$P(x)-(M_1x+N_1)Q_1(x)=(x^2+px+q)P_1(x)$$

其中 $P_1(x)$是多项式,将它代入前面的差式中,消去因子(x^2+px+q),即得所要的分解式. 如此推知,对应于复根的情形,真分式$\frac{P(x)}{Q(x)}$在分出形如$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}$的简单分式后,分母多项式 $Q(x)$中出现的(x^2+px+q)的幂指数至少减少一次.

若对真分式$\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}$再应用这个结论,可得到

$$\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}=\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\frac{P_2(x)}{(x^2+px+q)^{k-2}Q_1(x)}$$

如此继续应用这个结论 k 次,就得到分解式

$$\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^k Q_1(x)}=\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)}+\frac{P_k(x)}{Q_1(x)}$$

其中 $M_1,N_1,\cdots,M_k,N_k$ 都是常数,$P_k(x)$是多项式,$\dfrac{P_k(x)}{Q_1(x)}$是真分式.

综合上述结果,就得到有理分式分解为“部分分式”的重要结论的证明.

(二) 有理函数的不定积分

由定理 2 可知,任何有理真分式的不定积分都可归结为下列四种类型的不定积分:

$1°\ \displaystyle\int \frac{A}{(x-a)}\mathrm{d}x$

$2°\ \displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}\mathrm{d}x$

$3°\ \displaystyle\int \frac{mx+n}{x^2+px+q}\mathrm{d}x \quad (p^2-4q<0)$

$4°\ \displaystyle\int \frac{mx+n}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x \quad (p^2-4q<0,k=2,3,\cdots)$

因此只要指出这些类型的不定积分都是初等函数就行了.由于

$1°\ \displaystyle\int \frac{A}{(x-a)}\mathrm{d}x=A\ln|x-a|+C$

$2°\ \displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}\mathrm{d}x=\frac{A}{(1-k)}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C \qquad (k\neq 1)$

$3°\ \displaystyle\int \frac{mx+n}{(x^2+px+q)}\mathrm{d}x=\int \frac{m\left(x+\frac{p}{2}\right)+n-\frac{1}{2}mp}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}\mathrm{d}x$

$$= m\int \frac{x+\frac{p}{2}}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}\mathrm{d}x$$

$$+\left(n-\frac{1}{2}mp\right)\int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{m}{2}\ln|x^2+px+q|+\frac{2n-mp}{\sqrt{4q-p^2}}\mathrm{arctg}\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$$

4° 令 $t=x+\frac{p}{2}$,于是有

$$\int \frac{mx+n}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x=\frac{m}{2}\int \frac{2t}{(t^2+a^2)^k}\mathrm{d}t$$
$$+\left(n-\frac{mp}{2}\right)\int \frac{1}{(t^2+a^2)^k}\mathrm{d}t$$

其中 $a^2=q-\frac{p^2}{4}$,上式右端的第一个不定积分可直接算得

$$\int \frac{2t}{(t^2+a^2)^k}\mathrm{d}t=\frac{1}{(1-k)}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{k-1}}+C$$
$$=\frac{1}{(1-k)}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}}+C$$

而第二个积分就是在 3.1.4 中所考察过的例 7. 由那里得到的递推公式可知,它是一个初等函数. 这样一来,就完全证明了有理函数的原函数是初等函数的结论.

下面通过几个实例来说明如何求有理函数的不定积分

例 1 求 $\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x\ (a\neq 0)$.

解 先将被积函数的分母分解因子,即有 $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$. 再设

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a}$$

其中 A,B 是待定常数,通分有

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{A(x+a)+B(x-a)}{(x-a)(x+a)}$$

消去分母，得到

$$1=A(x+a)+B(x-a)=(A+B)x+(A-B)a$$

比较上式两端 x 的同次幂的系数，得

$$\begin{cases}A+B=0\\ a(A-B)=1\end{cases}$$

由此可解得

$$A=\frac{1}{2a},\ B=-\frac{1}{2a}$$

从而，有部分分式

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$$

因此

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2a}\int\frac{1}{x-a}\mathrm{d}x-\frac{1}{2a}\int\frac{1}{x+a}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2a}(\ln|x-a|-\ln|x+a|)+C\\&=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C\end{aligned}$$

例 2 求 $\int\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}\mathrm{d}x$.

解 设

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}$$

去分母，得到

$$\begin{aligned}x&=(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1)\\&=(A+C)x^2+(B-A)x+(C-B)\end{aligned}$$

比较上式两端 x 的同次幂的系数，得

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ -A + B = 1 \\ -B + C = 0 \end{cases}$$

求解得到 $A=-\dfrac{1}{2}, B=\dfrac{1}{2}, C=\dfrac{1}{2}$，于是

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)}\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{4}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C_1 \\ &= \frac{1}{4}\ln\frac{(1-x)^2}{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + C_1 \end{aligned}$$

例 3 求 $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}\mathrm{d}x$.

解 先将被积函数的分母分解因子，得到

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = x(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = x(x-1)^3$$

可设

$$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)}$$

消去分母，得到

$$\begin{aligned} x^3 + 1 &= A(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + Bx + C(x^2 - x) \\ &\quad + D(x^3 - 2x^2 + x) \\ &= (A+D)x^3 + (-3A + C - 2D)x^2 \\ &\quad + (3A + B - C + D)x - A \end{aligned}$$

比较上式两端 x 的同次幂的系数，有

$$\begin{cases} A + D = 1 \\ -3A + C - 2D = 0 \\ 3A + B - C + D = 0 \\ -A = 1 \end{cases}$$

求解可得 $A=-1, B=2, C=1, D=2$. 故有

$$\int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}\mathrm{d}x$$

$$=-\int \frac{1}{x}dx+2\int \frac{1}{(x-1)^3}dx+\int \frac{1}{(x-1)^2}dx+2\int \frac{1}{(x-1)}dx$$

$$=-\ln|x|-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)}+2\ln|x-1|+C_1$$

$$=-\frac{x}{(x-1)^2}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C_1$$

例 4 求$\int \frac{1}{x^3+1}dx$.

解 先将被积函数的分母因子分解为

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$$

设

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

通分后,令两端的分子相等,有恒等式

$$1=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)$$

令 $x=-1$,有 $1=3A$,即 $A=\frac{1}{3}$. 将前面的恒等式两端对 x 微商一次,再令 $x=-1$,有 $0=-3A+C-B$. 将恒等式两端对 x 微商两次,即得

$$B=-A,\quad 故\quad B=-\frac{1}{3}$$

最后,把 $A=\frac{1}{3}$,$B=-\frac{1}{3}$代入上述方程式,可解出 $C=\frac{2}{3}$. 则有

$$\int \frac{1}{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}dx-\frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\int \frac{x-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{x^2-x+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{|x^2-x+1|}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C_1$$

例 1 求 $\int\frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$.

解 设

$$\frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}=\frac{Ax+B}{(x^2+2x+2)^2}+\frac{Mx+D}{(x^2+2x+2)}$$

由此通分并消去分母得

$$\begin{aligned}3x+5=&Mx^3+(2M+D)x^2\\&+(A+2M+2D)x+(B+2D)\end{aligned}$$

比较 x 的同次幂系数得 $A=3,B=5,M=0,D=0$,于是

$$\begin{aligned}\int\frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x&=\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}\\&\quad+2\int\frac{\mathrm{d}(x+1)}{[(x+1)^2+1]^2}\\&=\frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)}+\operatorname{arctg}(x+1)+C\end{aligned}$$

这里利用了 3.1.4 的例 7.

3.1.6 含有简单根式的积分

今用符号 $R(X,Y)$ 表示由 X,Y 及常数经有限次四则运算构成的有理函数.

考虑形如 $R\left(x,\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)$ 的无理函数的不定积分,其中 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 都是常数,且 $\alpha\delta-\beta\gamma\neq0$,即分子与分母不成比例. 自然数 $m\geqslant2$.

令

$$t=\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$$

则可解得

$$x=\frac{\delta t^m-\beta}{\alpha-\gamma t^m}=\varphi(t),\ \mathrm{d}x=\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

于是有

$$\int R\left(x,\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)\mathrm{d}x=\int R[\varphi(t),t]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

因为 $\varphi(t)$是有理函数,而有理函数的微商 $\varphi'(t)$还是有理函数,所以上式右端的被积函数是关于 t 的有理函数. 从而这类无理函数的积分可化为有理函数的积分.

例 1 求$\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$.

解 被积函数是 $R\left(x,\sqrt{\frac{x+1}{1}}\right)$的类型,且$(x+1)$的各幂指数的分母的最小公倍数为 2,故应令 $t=\sqrt{x+1}$,则 $x=t^2-1$,$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$,于是得到

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x&=\int\left(\frac{2}{t-1}-\frac{2t+2}{t^2+t+1}\right)\mathrm{d}t\\&=\ln\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{x+\sqrt{x+1}+2}\\&\quad-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}}+C\end{aligned}$$

例 2 求$\int\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}}\mathrm{d}x$

解 因为

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}}=\sqrt[3]{\frac{(x+1)}{(x-1)}}\cdot\frac{1}{(x+1)}$$

故可令

$$t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$$

得到

$$x=\frac{t^3+1}{t^3-1},\ \mathrm{d}x=\frac{6t^2}{(t^3-1)^2}\mathrm{d}t$$

代入积分后给出

$$\int\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{-1}{t-1}+\frac{t+2}{t^2+t+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}{(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1})^2}$$

$$+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x-1}}+C$$

例 3 求 $\int\frac{\sqrt[7]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[7]{x^8}+\sqrt[14]{x^{15}}}\mathrm{d}x$.

解 因为 x 的各个幂指数的分母的最小公倍数为 14,故令 $t=\sqrt[14]{x}$,则有 $x=t^{14}$,$\mathrm{d}x=14t^{13}\mathrm{d}t$,则有

$$\int\frac{\sqrt[7]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[7]{x^8}+\sqrt[14]{x^{15}}}\mathrm{d}x=14\int\frac{t^5+1}{t+1}\mathrm{d}t$$

$$=14\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t\right)+C$$

其中 $t=\sqrt[14]{x}$.

3.1.7 $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$ 型函数的不定积分

考察积分

$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$, 其中 a,b,c 都是常数,$a\neq 0$,$b^2-4ac\neq 0$,即 ax^2+bx+c 无重根. 利用欧拉(Euler)代换,它可化为有理函数的积分.

1° 当 $a>0$ 的情形,可应用欧拉第一代换

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm\sqrt{a}x$$

其中"±"表示既可取"+"也可取"-". 则有

$$x=\frac{t^2-c}{b\mp 2\sqrt{a}t},$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\mp\sqrt{a}t^2+bt\mp c\sqrt{a}}{b\mp 2\sqrt{a}t}$$

而

$$\mathrm{d}x=\frac{2(\mp\sqrt{a}t^2+bt\mp c\sqrt{a})}{(b\mp 2\sqrt{a}t)^2}\mathrm{d}t$$

从而所述积分就化成了有理函数的积分.

2° 当 $c>0$ 的情形,应用欧拉第二代换

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$$

则有

$$x=\frac{\pm 2\sqrt{c}t-b}{a-t^2},$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\pm\sqrt{c}t^2-bt\pm a\sqrt{c}}{(a-t^2)}$$

而

$$\mathrm{d}x=\frac{2(\pm\sqrt{c}t^2-bt\pm a\sqrt{c})}{(a-t^2)^2}\mathrm{d}t$$

于是,所述积分也可化成有理函数的积分.

3° 若二次三项式有不同的实根 λ 与 μ,即

$$ax^2+bx+c=a(x-\lambda)(x-\mu)$$

应用欧拉第三代换

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\lambda)$$

于是得到

$$x=\frac{-a\mu+\lambda t^2}{t^2-a},\ \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(\lambda-\mu)t}{t^2-a}$$

而

$$\mathrm{d}x=\frac{2a(\mu-\lambda)t}{(t^2-a)^2}\mathrm{d}t$$

于是,所述积分也可化成有理函数的积分.

注意1　3°已包括$a<0$的情形.因若无实根,必有$a>0$,否则$ax^2+bx+c<0$,而根式$\sqrt{ax^2+bx+c}$就是虚数了.

注意2　第一与第二代换实际上是要求$b^2-4ac<0$,即$ax^2+bx+c=0$无实根.此时a与c必定同为正号.因若$c<0$,当$x=0$时,根式$\sqrt{ax^2+bx+c}$又是虚数.于是若作倒数代换$x=\frac{1}{z}$,可将其中一种代换变成另一种代换.因而总可避免使用欧拉第二代换.

注意3　由于所用的代换不同,可能得到不同形式的积分.但不难用求微商的方法去验证,它们都是被积函数的原函数.

例1　求$\int\frac{1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}\mathrm{d}x$.

解　因为$a=1>0$,应用欧拉第一代换,令

$$\sqrt{x^2-x+1}=t-x$$

则有

$$x=\frac{t^2-1}{2t-1},\sqrt{x^2-x+1}=\frac{t^2-t+1}{2t-1},\mathrm{d}x=\frac{2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}\mathrm{d}t.$$

代入积分后,给出

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}\mathrm{d}x&=2\int\frac{t^2-t+1}{t(2t-1)^2}\mathrm{d}t\\&=2\ln|t|-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(2t-1)}-\frac{3}{2}\ln|2t-1|+C\\&=2\ln|x+\sqrt{x^2-x+1}|-\frac{3}{2(2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1)}\\&\quad-\frac{3}{2}\ln|2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1|+C\end{aligned}$$

由于$c=1>0$,故还可作欧拉第二代换,但原函数的形式会不同.

例2　求$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+x+1}}$

解一 因$-x^2+x+1=-(x-\lambda)(x-\mu)$,其中$\lambda=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$,$\mu=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$,故被积函数的定义域为$\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$,应用欧拉第三代换,令$\sqrt{-x^2+x+1}=t(x-\lambda)$则有

$$x=\frac{\mu+\lambda t^2}{1+t^2},\sqrt{-x^2+x+1}=\frac{\sqrt{5}t}{1+t^2},$$

$$\mathrm{d}x=\frac{-2\sqrt{5}t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$$

于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+x+1}}=-2\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=-2\mathrm{arctg}t+C$$

$$=-2\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{-x^2+x+1}}{x-\lambda}\right)+C\ ,\lambda<x<\mu$$

解二 因$c=1>0$,作欧拉第二代换,令$\sqrt{-x^2+x+1}=tx-1$,则有

$$x=\frac{1+2t}{1+t^2},\ \sqrt{-x^2+x+1}=\frac{t^2+t-1}{1+t^2},$$

$$\mathrm{d}x=\frac{2(1-t-t^2)}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$$

于是 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+x+1}}=-2\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=-2\mathrm{arctg}t+C_1$$

$$=-2\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{-x^2+x+1}+1}{x}+C_1$$

然后,由解一知这个不定积分的定义域为(λ,μ),故应将$x=0$补充进去.

当$x>0$时,$\lim\limits_{x\to0^+}-2\mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{-x^2+x+1}+1}{x}=-\pi$

故可取它的一个原函数为$-2\mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{-x^2+x+1}+1}{x}+\pi$;

当 $x<0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0^-} -2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{-x^2+x+1}+1}{x}=\pi$

可取它的一个原函数为 $-2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{-x^2+x+1}+1}{x}-\pi$

若令

$$F(x)=\begin{cases}-2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{-x^2+x+1}+1}{x}+\pi, & x>0,\\ 0 & x=0,\\ -2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{-x^2+x+1}+1}{x}-\pi, & x<0\end{cases}$$

故有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+x+1}}=F(x)+C_1,\qquad \lambda<x<\mu$$

解三 当 $x>0$ 时，若令 $x=\dfrac{1}{z}>0$，$\mathrm{d}x=-\dfrac{\mathrm{d}z}{z^2}$，则有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+x+1}}=-\int\frac{\mathrm{d}z}{z\sqrt{z^2+z-1}}$$

这时，有 $a=1>0$，应用欧拉第一代换，再令 $\sqrt{z^2+z-1}=t-z$，得到

$$\begin{aligned}-\int\frac{\mathrm{d}z}{z\sqrt{z^2+z-1}}&=-2\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\\&=-2\operatorname{arctg}(z+\sqrt{z^2+z-1})+C_1\\&=-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-x^2+x+1}+1}{x}+C_1\end{aligned}$$

当 $x<0$ 时，可先令 $u=-x$，再令 $u=\dfrac{1}{z}>0$ 即可. 于是，总可避免用第二代换.

另外，可以得到

$$-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-x^2+x+1}+1}{x}-\left(-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-x^2+x+1}}{x-\lambda}\right)$$

$$= \operatorname{arctg}(1-\sqrt{5})$$

即采用第二与第三代换之后，所得的结果仅差常数因子 arctg(1 $-\sqrt{5}$).

解四 应用配方法，有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+x+1}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$= \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C_2$$

3.1.8 三角函数有理式的积分

由三角函数与常数经有限次的四则运算所构成的式子叫做三角函数有理式. 因为任何三角函数都可以用正弦函数与余弦函数来表示，所以三角函数有理式可记为 $R(\sin x, \cos x)$.

(一) 万能代换

考虑积分 $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$，若应用代换 $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$，$(-\pi < x < \pi)$. 总可把积分化为有理函数的积分. 事实上，这时有

$$x = 2\operatorname{arctg} t,\ \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

于是，有

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

可见上述论断成立.

因此,常把代换 $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ 叫做这类积分的万能代换.

例 1 求 $\int\frac{(1+\sin x)}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$.

解 应用万能代换 $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$,则有

$$1+\sin x=\frac{1+2t+t^2}{1+t^2},\ \sin x(1+\cos x)=\frac{4t}{(1+t^2)^2}$$

代入积分得到

$$\begin{aligned}\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int\frac{(1+2t+t^2)}{t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}+2t+\ln|t|\right)+C\\&=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C\end{aligned}$$

例 2 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{5+4\sin x}$.

解 令

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},5+4\sin x=\frac{5t^2+8t+5}{t^2+1}$$

代入积分中给出

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{5+4\sin x}&=2\int\frac{\mathrm{d}t}{5t^2+8t+5}=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5t+4}{3}+C\\&=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}+C\end{aligned}$$

（二）一些特殊的代换

万能代换尽管在理论上很重要,但在应用上由于计算量较大,且有些积分经过这样的代换后,被积函数是比较复杂的有理函数,积分较困难. 因此要根据具体情形选择适当的代换. 例如,若 $R(\sin x,\cos x)$关于 $\sin x$, $\cos x$ 具有某些特性,可应用一些特殊的

代换.

1° 若 $R(\sin x,\ \cos x)$ 是 $\sin x$ 的奇函数,即

$$R(-\sin x,\ \cos x)=-R(\sin x,\cos x),$$

这时,令 $t=\cos x$,就可把这个三角函数的积分化为有理函数的积分,实际上,由所设条件可知,用 $-\sin x$ 代替 $\sin x$ 时函数

$$\frac{R(\sin x,\ \cos x)}{\sin x}$$

不变,故它只含 $\sin x$ 的偶次幂,则有

$$R(\sin x,\ \cos x)=R_1(\sin^2 x,\cos x)\sin x$$

其中 $R_1(X,Y)$ 是变量 X 与 Y 的有理函数. 令 $t=\cos x$,可得

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\mathrm{d}x=-\int R_1(1-t^2,t)\mathrm{d}t$$

这就证明了所述的结论.

例 3 求 $\int\frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x$.

解 因为在被积函数中,以 $-\sin x$ 代替 $\sin x$ 时变号. 故应作代换 $t=\cos x$,故有

$$\int\frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x=-\int\frac{(1-t^2)^2}{t^4}\mathrm{d}t$$

$$=-\cos x-\frac{2}{\cos x}+\frac{1}{3\cos^3 x}+C$$

2° 若 $R(\sin x,\ \cos x)$ 是 $\cos x$ 的奇函数,即

$$R(\sin x,\ -\cos x)=-R(\sin x,\ \cos x)$$

同理不难证明,这时只要作 $t=\sin x$,就可使所述的三角函数的积分化为有理函数的积分.

例 4 求 $\int\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x$.

解 若在被积函数中,以 $-\cos x$ 代替 $\cos x$ 时变号,故应作代换 $t=\sin x$,则有

$$\int\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C$$

$$= \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + C = \ln|\sec x + \mathrm{tg} x| + C$$

同样可得积分(3.1.3)例 8

$$\int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \mathrm{ctg} x| + C$$

且容易看出,所得的结果与那里是完全一致的.

3° 若$R(\sin x, \cos x)=R(-\sin x, -\cos x)$,则作代换 $t=\mathrm{tg}x$,就可使这样的三角函数的积分化为有理函数的积分. 实际上

$$R(\sin x, \cos x) = R\left(\cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}, \cos x\right)$$

$$= R_1(\cos^2 x, \mathrm{tg} x) = R_1\left(\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}, \mathrm{tg} x\right)$$

若令 $t=\mathrm{tg}x$,则有

$$\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int R_1\left(\frac{1}{1+t^2}, t\right)\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

这就得到了有理函数的积分.

例 5 求$\int \frac{1}{\sin^4 x\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

解 当以$-\sin x$ 与$-\cos x$ 代替 $\sin x$ 与 $\cos x$ 时,积分的被积函数不变,故作代换 $t=\mathrm{tg}x$,有

$$\int \frac{1}{\sin^4 x\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4}\mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{tg}x - 2\mathrm{ctg}x - \frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3 x + C.$$

例 6 求$\int \frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x$.

解 因为改变 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的符号时被积函数不变,故作代换 $t=\mathrm{tg}x$,代入积分后给出

$$\int \frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{t^2}{(1+t)(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}}\right| - \frac{1}{4}\cdot\frac{1+t}{1+t^2} + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln|\sin x + \cos x|$$
$$- \frac{1}{4}\cos x(\sin x + \cos x) + C$$

复习思考题

1. 叙述原函数的定义.是否任何函数都一定有原函数?

2. 若 $f(x)$有原函数,这原函数是不是唯一的?

3. 函数$\frac{1}{2}e^{2x}$,$e^x \mathrm{sh}x$,$e^x \mathrm{ch}x$,是不是同一函数的原函数?

4. 若 $F(x)$和 $H(x)$都是 $f(x)$的原函数,那么 $F(x)$和 $H(x)$有什么关系?

5. 叙述不定积分的定义.它与原函数有什么关系?

6. 设函数 $F(x)$在一区间 I 上可微,函数 $f(x)$在 I 上连续,回答下列问题:

(1) $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = ?$　　(2) $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = ?$

(3) $\int F'(x)\mathrm{d}x = ?$　　(4) $\int \mathrm{d}F(x) = ?$

习题 3.1

1. 利用基本积分公式及运算法则求下列不定积分

(1) $\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\mathrm{d}x$　　(2) $\int \frac{1}{\sqrt{2gh}}\mathrm{d}h$

(3) $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}\mathrm{d}x$　　(4) $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

(5) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\mathrm{d}x$　　(6) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$

(7) $\int(2^x+3^x)^2\mathrm{d}x$　　(8) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$

(9) $\int \mathrm{tg}^2 x\mathrm{d}x$　　(10) $\int 2\sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$

(11) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$ (12) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx$

2. 计算下列不定积分

(1) $\int |x| dx$ (2) $\int e^{-|x|} dx$

(3) $\int \max(1, x^2) dx$ (4) $\int (1+|x|)^2 dx$

3. 求下列$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$型的不定积分

(1) $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ (2) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+8} dx$

(3) $\int \mathrm{tg} x dx$ (4) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$

(5) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx$ (6) $\int \frac{\cos x - \sin x}{3+\sin x+\cos x} dx$

4. 利用第一换元法求下列积分

(1) $\int (2x-3)^{100} dx$ (2) $\int \sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi_0\right) dt$

(3) $\int \cos \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} dx$ (4) $\int e^{\sin x} \cos x dx$

(5) $\int \frac{1}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)} dx$ (6) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

(7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ (8) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$

(9) $\int \frac{\mathrm{arctg} x}{1+x^2} dx$ (10) $\int x \sqrt{1-x^2} dx$

(11) $\int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx$ (12) $\int \frac{1}{\cos^2\varphi \sqrt{1+3\mathrm{tg}\varphi}} d\varphi$

(13) $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} dx$

5. 用第二换元法求下列积分

(1) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (2) $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx$

(3) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^8-4}} dx$ (4) $\int \frac{6x-5}{2\sqrt{3x^2-5x+6}} dx$

(5) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{2-\sin^4 x}}\mathrm{d}x$　　(6) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\mathrm{d}x$

(7) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$　　(8) $\int \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$

(9) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\mathrm{d}x$　　(10) $\int \frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$

(11) $\int \operatorname{ctg}\frac{x}{a-b}\mathrm{d}x$　　(12) $\int \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x+x}\mathrm{d}x$

(13) $\int \mathrm{e}^{2x^2+\ln x}\mathrm{d}x$　　(14) $\int (\mathrm{e}^x+1)^3\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

(15) $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{1+x^2}}\mathrm{d}x$　　(16) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$

(17) $\int \frac{1}{(a^2-x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$　　(18) $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$

(19) $\int x^5 \sqrt[3]{(1+x^3)^2}\mathrm{d}x$　　(20) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+9}}\mathrm{d}x$

(21) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x$　　(22) $\int \frac{1}{\sqrt{5+x-x^2}}\mathrm{d}x$

6. 先将被积函数分项，然后求积分

(1) $\int \operatorname{ctg}^2 x\mathrm{d}x$　　(2) $\int \sin^3 x\mathrm{d}x$

(3) $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x$　　(4) $\int \sin^2 x\mathrm{d}x$

(5) $\int \sin mx \sin nx\,\mathrm{d}x, m \neq n$　　(6) $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\mathrm{d}x$

(7) $\int \cos x\cos^2 3x\mathrm{d}x$　　(8) $\int \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$

(9) $\int \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}x$　　(10) $\int \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}}\mathrm{d}x$

(11) $\int \left(\frac{\sec x}{1+\operatorname{tg} x}\right)^2\mathrm{d}x$

7. 用分部积分法求下列不定积分

(1) $\int x\sin 2x\,\mathrm{d}x$　　(2) $\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

(3) $\int x^2\cos 5x\,dx$

(6) $\int x^2 a^x\,dx$

(5) $\int x\,\mathrm{sh}x\,dx$

(6) $\int x\,\mathrm{arctg}x\,dx$

(7) $\int x^2\ln(1+x)dx$

(8) $\int \mathrm{arctg}\sqrt{x}\,dx$

(9) $\int x\arcsin x\,dx$

(10) $\int x^n\ln x\,dx(n\neq -1)$

(11) $\int \sin(\ln x)dx$

(12) $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$

(13) $\int \frac{x}{\sqrt{1+2x}}dx$

(14) $\int x\sin x\cos x\,dx$

(15) $\int \sin x\ln(\mathrm{tg}x)dx$

(16) $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$

(17) $\int \mathrm{sh}ax\sin bx\,dx$

(18) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$

(19) $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$

(20) $\int (\arcsin x)^2 dx$

(21) $\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2}dx$

(22) $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$

(23) $\int \frac{\mathrm{arctg}e^x}{e^x}dx$

8. 求下列有理函数的积分

(1) $\int \frac{1}{x^2+x-2}dx$

(2) $\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}dx$

(3) $\int \frac{x^5}{x+1}dx$

(4) $\int \frac{x}{x^4+3x^2+2}dx$

(5) $\int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}dx$

(6) $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}dx$

(7) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$

(8) $\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+x)}dx$

(9) $\int \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$

(10) $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx$

(11) $\int \frac{1}{(x^2+4x+6)^2}$

(12) $\int \frac{x^6+x^4-4x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}dx$

9. 求下列无理函数的积分

(1) $\int \frac{1}{1+\sqrt{1+x}}dx$

(2) $\int \frac{x}{\sqrt{2+4x}}dx$

(3) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$

(4) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$

(5) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$

(6) $\int \frac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}dx$

(7) $\int \frac{(x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$

(8) $\int \frac{4x+5}{\sqrt{4x^2+2x-3}}dx$

(9) $\int \sqrt{3+4x-4x^2}\,dx$

(10) $\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}dx$

10. 用以下各种代换求$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

(1) 设 $x=\sec t$

(2) 设 $x=\csc t$

(3) 设 $y=\frac{1}{x}$

(4) 设 $\sqrt{x^2-1}=u$

11. 求下列三角函数的积分

(1) $\int \frac{1}{\sin x+\cos x}dx$

(2) $\int \frac{1}{a\sin x+b\cos x}dx$

(3) $\int \frac{1}{1+\sin x}dx$

(4) $\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$

(5) $\int \frac{1}{2\sin x-\cos x+5}dx$

(6) $\int \frac{1}{\cos^3 x}dx$

(7) $\int \frac{1}{3+\sin^2 x}dx$

(8) $\int \frac{1}{\sin x+\mathrm{tg}x}dx$

(9) $\int \frac{1}{\sin 2x-2\sin x}dx$

12. 用最简单的方法计算下列不定积分

(1) $\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}dx$

(2) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx$

(3) $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx$

(4) $\int \frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$

(5) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

(6) $\int \frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x}dx$

13. 计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

(2) $\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int \frac{1}{\cos^4 x}\mathrm{d}x$

(4) $\int \frac{1-\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}x}\mathrm{d}x$

(5) $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\mathrm{d}x$

(6) $\int |\sin x|\,\mathrm{d}x$

(7) $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}\mathrm{d}x$

(8) $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}\mathrm{d}x$

(9) $\int \sqrt{x^3+x^4}\,\mathrm{d}x$

(10) $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}}\mathrm{d}x$

(11) $\int \frac{x}{x-\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$

(12) $\int \sqrt{x}\ln^2 x\mathrm{d}x$

(13) $\int \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$

(14) $\int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\mathrm{d}x$

(15) $\int \cos x\cos 2x\cos 3x\mathrm{d}x$

(16) $\int x^5 e^{x^3}\,\mathrm{d}x$

(17) $\int \cos^4 x\mathrm{d}x$

(18) $\int (\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{tg}^4 x)\mathrm{d}x$

(19) $\int \frac{1}{(\mathrm{tg}x+1)\sin^2 x}\mathrm{d}x$

(20) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\sec^2 x+4\mathrm{tg}x}}\mathrm{d}x$

(21) $\int \frac{\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}^2 x+\mathrm{sh}^2 x}\mathrm{d}x$

(22) $\int \mathrm{sh}^3 x\mathrm{d}x$

(23) $\int \frac{x}{\mathrm{sh}^2 x}\mathrm{d}x$

(24) $\int \mathrm{ch}^4 x\mathrm{d}x$

(25) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\mathrm{d}x$

(26) $\int \frac{2^x}{1-4^x}\mathrm{d}x$

(27) $\int \frac{1}{1-x^4}\mathrm{d}x$

(28) $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$

(29) $\int \ln(1+x^2)\mathrm{d}x$

(30) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

(31) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$

(32) $\int \frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x$

(33) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$

(34) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}\mathrm{d}x$

(35) $\int \frac{ax^2+b}{x^2+1}\mathrm{arctg}x\mathrm{d}x$

(36) $\int \frac{x^2\mathrm{arctg}x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

(37) $\int \frac{\mathrm{arctg}x}{x^2}\mathrm{d}x$　　(38) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x$

(39) $\int \frac{1-x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$　　(40) $\int \frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$

(41) $\int \frac{1}{x(x^6+4)}\mathrm{d}x\left(提示:\frac{1}{x(x^6+4)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(x^6+4)-x^6}{x(x^6+4)}\right)$

(42) $\int \frac{1}{x(x^{10}+1)^2}\mathrm{d}x$　　(43) $\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\mathrm{d}x$

(44) $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\mathrm{d}x$

3.2 定积分的概念与可积函数

历史上,定积分是为了计算平面上封闭曲线围成的图形的面积而产生的.计算这类图形的面积,最后归结为计算具有特定结构的和式极限.后来人们在实践中逐步认识到,这种特定结构的和式极限,不仅是计算平面图形面积的数学形式,而且也是计算许多实际问题,诸如求变速直线运动的路程、求变力所作功、求水的侧压力、求立体的体积等等的数学形式.因此无论在理论上还是在实际应用中,这种特定结构的和式极限,即定积分具有普遍的意义,且成为高等数学的重要组成部分之一.

3.2.1 定积分概念的引入

(一) 曲边梯形的面积

在初等几何里,我们只会计算由直线段和圆弧所围成的平面图形的面积.矩形的面积等于它相邻边长的乘积,由此可确定三角形、多边形等简单图形的面积,比多边形稍复杂一些的图形,如圆的面积早在我国的三国时代,就由刘徽利用对圆的内接正多边形面积求极限的方法得到了.

计算由闭曲线所围成的平面图形的面积,这是一个一般的几何问题.当然这个问题只有用极限的方法才能比较完满的解决.

一条封闭曲线围成的平面图形，往往可用互相垂直的两组平行直线将它分成若干部分如图 3.3. 有的是矩形、有的是由两条直边及一条曲边围成的图形，称为曲边三角形，有的是由三条直边及一条曲边围成的图形，称为曲边梯形. 由于曲边三角形是曲边梯形的特殊情形，而矩形的面积早已会计算，因此下面仅讨论曲边梯形的面积的计算问题. 因为曲边梯形有一条边界是曲线，我们目前不仅不会计算它的面积，甚至根本不知道什么叫做曲边梯形的面积. 故应首先给出曲边梯形面积的定义及其数学表达式.

图 3.3

曲边梯形的面积并不是一个孤立的概念. 曲边图形与直边图形联系着. 正如圆周与它的内接正多边形联系着一样. 于是我们借助于已知的直边图形(这里是矩形)的面积来定义曲边梯形的面积.

设曲边梯形是由非负的连续曲线 $y=f(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$，x 轴，以及直线 $x=a$ 与 $x=b$ 所围成的. 求其面积的具体作法如下：

首先将它化整为零，即分割. 在区间$[a,b]$内任意插进 $n-1$ 个分点：$x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$，为了书写方便，令 $a=x_0$，$b=x_n$，使

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

称为区间$[a,b]$的一个分法，记为 T. 于是分法 T 将区间$[a,b]$分成 n 个小区间

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,$$
$$[x_{i-1},x_i],\cdots,[x_{n-1},x_n]$$

把第 i 个小区间$[x_{i-1},x_i]$的长度记为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$i=1,2,\cdots,n$. 并过每个分点 x_i，$i=1,2,\cdots,n-1$，作 x 轴的垂线. 这些垂线与曲线 $y=f(x)$相交，又将曲边梯形分成 n 个小的曲边梯形(图 3.4).

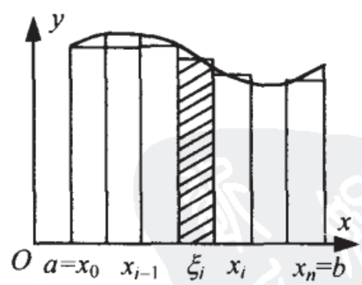


图 3.4

其次以直线代替曲线，即近似. 在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点ξ_i，且$x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i$，$i=1,2,\cdots,n$，算出$f(\xi_i)$，以纵坐标$f(\xi_i)$为高，小区间$[x_{i-1},x_i]$的长度$x_i-x_{i-1}$为底作矩形，这个小矩形的面积为$f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$，它就是第$i$个小曲边梯形面积$\Delta A_i$的近似值，故有

$$\Delta A_i\approx f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),\quad i=1,2,\cdots,n.$$

显然，(x_i-x_{i-1})越小，其近似程度也越好；

然后积零为整，即求和. 将n个小矩形的面积加起来，其和应该是“曲边梯形面积”的近似值，即有

$$A(\text{曲面梯形的面积})=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}).$$

当把区间$[a,b]$分得越细，即插进的分点越多，同时使每小区间的长度越小时，且不论ξ_i如何选择. 这些小矩形的面积之和就应该越接近于要求的曲边梯形的面积. 易见，任何有限过程，即n个小矩形面积之和总是它的近似值，只有无限过程，即应用极限的方法才能从近似值，过渡到精确值A；

最后取极限. 若以$\lambda(T)$表示分法T将区间$[a,b]$分割成的各个小区间的最大长度，则有$\lambda(T)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_{i-1})$. 于是得到

$$A=\lim_{\lambda(T)\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

由此可见，求曲边梯形面积A的问题就归结为计算一个特定结构的和式的极限. 这种类型的极限不仅存在于几何之中，且也在其他领域中出现. 例如下面来计算作变速直线运动的质点所走过的路程这一物理学的问题.

（二）质点运动的路程

设质点作非匀速直线运动，其速度为$v=f(t)$. 则在时间间隔$[\alpha,\beta]$内应如何求出该质点所走过的路程呢？讨论这个问题所遇到的困难是非匀速运动，这时的v不是常数而是t的函数. 若质点作匀速直线运动，即$v=k$（常数），故质点从时刻α到时刻β的运动

路程 s 为

$$s = k(\beta - \alpha)$$

但是，非匀速直线运动的路程也不是一个孤立的概念，它与匀速直线运动联系着. 具体作法如下：

在时间间隔$[\alpha,\beta]$内任意插进 $n-1$ 个分点 $t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}$，令 $\alpha = t_0, \beta = t_n$，使

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta$$

这种分法记为 T. 它把$[\alpha,\beta]$分成任意 n 个小区间：

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \cdots, [t_{i-1}, t_i], \cdots, [t_{n-1}, t_n]$$

当把区间$[\alpha,\beta]$分得很细时，由于$[t_{i-1}, t_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$很小，质点的速度 $v=f(t)$ 在这个小的时间间隔内来不及发生很大的变化，因此在$[t_{i-1}, t_i]$上可近似认为质点的运动速度是匀速的，故可把此小区间内的任一时刻 $t=\xi_i$ 的速度 $v=f(\xi_i)$ 认为是这个不变的速度，而在时间间隔$[t_{i-1}, t_i]$内质点所走过的路程近似地等于

$$s_i \approx f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

而在整个时间间隔$[\alpha,\beta]$内所走过的路程 s 就近似地等于

$$s = \sum_{i=1}^{n} s_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$$

易见，当区间$[\alpha,\beta]$被分得越细时，这种近似就越精确，若把区间$[\alpha,\beta]$无限细分，且令 $\lambda(T) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(t_i - t_{i-1})$，则当 $\lambda(T) \to 0$ 时，上述和式的极限 s 就是所求的路程，故有

$$s = \lim_{\lambda(T) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$$

因此，已知质点运动的速度求它所走过的路程也归结为计算这类特定结构和式的极限.

3.2.2 定积分的定义

从上面两个不同知识领域的问题来看. 虽然问题的属性截然不同，但解决它们的方法却完全一样. 都归结为计算一个特定结构

的和式的极限 $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$. 故讨论计算这类极限的一般方法就具有现实意义. 而本章的主要目的就在于解决这个问题，下面先引入定积分的概念.

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，在区间 $[a,b]$ 内任意插进 $n-1$ 个分点：$x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$，令 $a=x_0$，$b=x_n$，使

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

并把区间 $[a,b]$ 的这种分法记为 T. 分法 T 将区间 $[a,b]$ 任意分成 n 个小区间

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{i-1},x_i],\cdots,[x_{n-1},x_n]$$

第 i 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的长度为 x_i-x_{i-1}，且在 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i，$x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i$. 以 $f(\xi_i)$ 代替 $[x_{i-1},x_i]$ 上每一点 x 的函数值 $f(x)$，作和式

$$\sigma(T)=f(\xi_1)(x_1-x_0)+\cdots+f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})+\cdots$$
$$+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

这个和 $\sigma(T)$ 称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的积分和或黎曼 (Reimann) 和. 它与分法 T 有关，也与点 ξ_i 的取法有关. 令 $\lambda(T)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_{i-1})$. 若当 $\lambda(T)\to 0$ 时，积分和 $\sigma(T)$ 的极限存在，且不依赖于 $[a,b]$ 的分法 T 及点 ξ_i 的取法，则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，或称此极限为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分，记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=I$$

若当 $\lambda(T)\to 0$ 时，积分和 $\sigma(T)$ 不存在极限，就称函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上不可积.

这个定义是十九世纪德国数学家黎曼给出的，所以又称这种积分为黎曼积分.

符号 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 已从莱布尼兹时期一直沿用到现在，它相应

于积分和而书写的，$f(x)\mathrm{d}x$ 相应于 $f(\xi_i)\Delta x_i$，($\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$)称为**被积表达式**，$f(x)$称为**被积函数**，$x$ 称为**积分变量**，a 与 b 分别称为**积分下限与上限**.

从上述定义中可看出，若黎曼和的极限存在，则这个极限只与被积函数 $f(x)$及积分区间$[a,b]$有关，而与积分变量的书写无关，即有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \cdots$$

另外，定义中黎曼和的极限存在可以用"ε-δ"语言来叙述：设有定数 I，若对任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，对任意的分法 T，只要 $\lambda(T)<\delta$，对任取的 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，$i=1,2,\cdots,n$，都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I\right| < \varepsilon$$

成立.

这时，显然有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right| \leqslant |\, I \,| + \varepsilon$$

因此，对任意给定的分法 T，无论 ξ_i 怎样选取，黎曼和总是有界的.

根据定积分的定义，并联系前一段所讨论的实际问题，容易得出定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义是由曲线 $y=f(x)$，x 轴及直线 $x=a$，$x=b$所围成的曲边梯形的面积. 而力学意义是以速度 $v=f(t)$运动的质点在时间间隔$[\alpha,\beta]$内所走过的路程，即分别有

$$A = \lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

与

$$s = \lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) = \int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t$$

虽然，定积分的定义是构造性的，但要立即就利用它来计算定

积分却是十分困难的.因为在定义中有两个"不依赖"的要求,所以目前我们根本无法利用定义来求定积分,甚至由定义来判断这个定积分是否存在也是十分困难的.因此,关于定积分还存在这样一个基本问题,这就是函数 $f(x)$在什么条件下才可积.

定理(可积的必要条件)　若函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上可积,则函数 $f(x)$在$[a,b]$上必有界.

证　若函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上无界,则对任意的一个分法 T,至少有一个小区间$[x_{i-1},x_i]$存在,函数 $f(x)$在其上是无界的.因此可在这个小区间内适当取一点 ξ_k,使得$|f(\xi_k)|$大于预先给定的任意大的正数.于是适当选取 ξ_k 可使积分和 $\sigma(T)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ 的绝对值也就变得任意大.故积分和不存在极限.因此函数 $f(x)$在$[a,b]$上不可积.

从而就证明了若函数 $f(x)$在$[a,b]$上可积,则必有界.

然而,函数 $f(x)$在$[a,b]$上有界,仅是 $f(x)$在$[a,b]$上可积的必要条件,但不是充分条件.即存在有界函数,它是不可积的,例如设有狄里克利(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, x \text{ 是有理数}\\0, x \text{ 是无理数}\end{cases}$$

易见,它在区间$[0,1]$上是有界的,但是在$[0,1]$上却不可积.

事实上,因为无论把区间$[0,1]$分得怎么细,在每个小区间上既存在有理数,也存在无理数.若每个 ξ_i 都取为无理数,则积分和

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=0$$

若每个 ξ_i 都取为有理数,则积分和

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=1$$

于是,当 $\lambda(T)\to 0$ 时,积分和将有不同极限,这就是说积分和不存在极限,故函数 $D(x)$在$[0,1]$上不可积.

那么,怎样的有界函数才是黎曼可积的呢?为了给出这一问题的回答,让我们引入一个在积分学的理论中十分重要的达布(Darboux)上和与达布下和的概念,并导出判断定积分存在的准则.

3.2.3 达布上和与达布下和

(一) 达布和的性质

由于积分和 $\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ 这个变量的变化较复杂,它不仅与分法 T 有关,还与点 ξ_i 的取法有关. 这自然给我们讨论积分和的变化趋势带来一定的困难. 为此,首先讨论对掌握积分和的变化非常有用的达布上和与达布下和的概念及其性质.

设函数 $f(x)$是区间$[a,b]$上的有界函数,在这区间上它的上确界与下确界分别记为 M 与 m,即

$$M=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\},m=\inf_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}$$

T 表示区间$[a,b]$的一个由分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

所确定的分法. 在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点 ξ_i,并构成黎曼和

$$\sigma(T)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$,又设函数 $f(x)$在小区间$[x_{i-1},x_i]$上的上确界与下确界分别为 M_i 与 m_i,即

$$M_i=\sup_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i}\{f(x)\},m_i=\inf_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i}\{f(x)\}$$

因此又可以引出下面两个和数:

$$S(T)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i,s(T)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i$$

它们分别称为对应于分法 T 的达布上和与达布下和,并简称为上和与下和,总称达布和. 由于当分法 T 给定之后,函数 $f(x)$在每个小区间上的上确界与下确界是唯一的. 因此上和 $S(T)$与下和 $s(T)$也就随分法 T 而确定,即它们都只与分法 T 有关,而积分和

不仅与分法 T 有关，还与 ξ_i 的选取有关. 这是上和 $S(T)$ 及下和 $s(T)$ 与积分和 $\sigma(T)$ 的主要区别. 下面来讨论这三个和之间的关系.

性质 1 对于区间 $[a,b]$ 的一个确定的分法 T，任意的积分和都介于相应的下和与上和之间；对于区间 $[a,b]$ 的所有可能的分法，由一切上和与下和分别组成的数集是有界的.

证 对于区间 $[a,b]$ 的一个确定的分法 T，得到小区间 $[x_{i-1},x_i]$，对任意的 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，总有

$$m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i, \quad i=1,2,\cdots,n.$$

由于 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}>0$，对上述不等式乘以小区间的长度 Δx_i 之后，再对 i 求和，得到

$$s(T)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\sigma(T)\leqslant \sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i=S(T).$$

其次，若 $M=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}$，$m=\inf\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}$.

于是，对 $[a,b]$ 所有可能的分法 T，总有

$$m\leqslant m_i\leqslant f(\xi_i)\leqslant M_i\leqslant M$$

或

$$\begin{aligned}m(b-a)&=m\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\leqslant s(T)\leqslant\sigma(T)\leqslant S(T)\leqslant M\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\\&=M(b-a)\end{aligned}$$

即

$$m(b-a)\leqslant s(T)\leqslant\sigma(T)\leqslant S(T)\leqslant M(b-a)$$

故数集 $\{S(T)\}$ 与 $\{s(T)\}$ 是有界的.

性质 2 设 T 是区间 $[a,b]$ 的一个分法，则其上和是对应于这个分法的全部积分和的上确界；同样下和是对应于这个分法的全部积分和的下确界，即

$$S(T)=\sup_{\xi_i}\{\sigma(T)\},\ s(T)=\inf_{\xi_i}\{\sigma(T)\}$$

证 由下确界的定义，对任意的正数 ε，在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上存在一点 ξ_i，使

$$m_i \leqslant f(\xi_i) < m_i + \varepsilon, i = 1,2,\cdots,n$$

因而

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$$

即

$$s(T) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i < s(T) + \varepsilon(b-a)$$

从而得到

$$s(T) = \inf_{\xi_i} \{\sigma(T)\}$$

同样,由上确界的定义,对任给的 $\varepsilon>0$,在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上必存在一点 ξ_i,使得

$$M_i - \varepsilon < f(\xi_i) \leqslant M_i,\ i = 1,2,\cdots,n$$

因而有

$$S(T) - \varepsilon(b-a) < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = \sigma(T)$$

再由性质 1 知,对任意的积分和 $\sigma(T)$,有

$$\sigma(T) \leqslant S(T)$$

故有

$$S(T) = \sup_{\xi_i} \{\sigma(T)\}$$

性质 3 设在分法 T 中加入新的分点后,所对应的分法为 T',则

$$s(T) \leqslant s(T') \leqslant S(T') \leqslant S(T).$$

这就是说当添加新分点时,上和不增加,下和不减少.

证 不失一般性,只须讨论在分法 T 的基础上仅增加一个新分点 x'的情形. 设新增加的一个分点 x'位于分法 T 的第 i 个小区间$[x_{i-1},x_i]$内,即 $x_{i-1}<x'<x_i$,并用 T'表示这个分法. 在两个下和 $s(T)$与 $s(T')$中,不相同的项仅可能在$[x_{i-1},x_i]$上出现,下和 $s(T)$在$[x_{i-1},x_i]$上的项是 $m_i(x_i-x_{i-1})$;下和 $s(T')$在$[x_{i-1},x_i]$上的项是 $m_i'(x'-x_{i-1})+m_i''(x_i-x')$,其中 m_i'与 m_i''分别是函

数 $f(x)$在$[x_{i-1},x']$与$[x',x_i]$上的下确界. 因为

$$m_i \leqslant m_i' \text{ 与 } m_i \leqslant m_i''$$

所以

$$\begin{aligned} m_i(x_i - x_{i-1}) &= m_i(x_i - x') + m_i(x' - x_{i-1}) \\ &\leqslant m_i''(x_i - x') + m_i'(x' - x_{i-1}) \end{aligned}$$

再对 i 求和,即有

$$s(T) \leqslant s(T')$$

同样,也有

$$S(T') \leqslant S(T)$$

但

$$s(T') \leqslant S(T')$$

故有

$$s(T) \leqslant s(T') \leqslant S(T') \leqslant S(T)$$

性质 4 设 T 与 T'是区间$[a,b]$的任意两个分法,则总有

$$s(T') \leqslant S(T) \text{ 与 } s(T) \leqslant S(T')$$

这就是任一下和不大于任一上和.

证 今将区间$[a,b]$上的两个分法 T 与 T'的分点放在一起构成$[a,b]$的一个新的分法,用 T''表示. 于是,分法 T''的分点是在分法 T(或 T')的分点的基础上增加分法 T'(或 T)的分点所构成的. 由性质 3 知,有

$$s(T) \leqslant s(T'') \text{ 与 } S(T'') \leqslant S(T')$$

再由性质 1 知,对分法 T'',则有

$$s(T'') \leqslant S(T'')$$

故有

$$s(T) \leqslant s(T'') \leqslant S(T'') \leqslant S(T')$$

即

$$s(T) \leqslant S(T')$$

同样可得

$$s(T') \leqslant S(T)$$

性质 5 对区间$[a,b]$的各种可能的分法 T,下和的上确界不超过上和的下确界,即

$$l=\sup_T\{s(T)\}\leqslant\inf_T\{S(T)\}=L.$$

证 由性质 1 与 4 知,对区间$[a,b]$的各种可能的分法 T 的下和集合$\{s(T)\}$有上界,即任意一个上和都是它的上界. 再由确界定理知,下和集合$\{s(T)\}$必有上确界,记为 l.

已知对任意的上和,总有 $l\leqslant S(T)$,即 l 是上和集合$\{S(T)\}$的下界. 于是,上和集合$\{S(T)\}$必有下确界,记为 L,即有

$$l=\sup_T\{s(T)\}\leqslant\inf_T\{S(T)\}=L.$$

(二) 定积分存在的准则

现在利用(一)中叙述的上和与下和的性质,证明判别函数可积性的一个重要准则.

定理 设函数 $f(x)$是定义在区间$[a,b]$上的有界函数,则 $f(x)$在区间$[a,b]$上可积的充分必要条件是

$$\lim_{\lambda(T)\to0}[S(T)-s(T)]=0$$

证 必要性. 设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上是可积的,今以 I 表示它的定积分,即有

$$\lim_{\lambda(T)\to0}\sigma(T)=I$$

于是,对任给的正数ε,总存在正数δ,对任意的分法 T,当$\lambda(T)<\delta$时,对任意 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$,$i=1,2,\cdots,n$,有

$$|\sigma(T)-I|<\varepsilon$$

或

$$I-\varepsilon<\sigma(T)<I+\varepsilon$$

成立. 根据性质 2,下和 $s(T)$与上和 $S(T)$分别是积分和$\sigma(T)$的下确界与上确界,故当$\lambda(T)<\delta$时,有

$$I-\varepsilon\leqslant s(T)\leqslant S(T)\leqslant I+\varepsilon$$

因此,当$\lambda(T)<\delta$时,有

$$0\leqslant S(T)-s(T)\leqslant2\varepsilon$$

从而得到

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}[S(T)-s(T)]=0$$

充分性. 若 $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}[S(T)-s(T)]=0$,即对任给的正数 ε,总存在正数 δ,对任意的分法 T,当 $\lambda(T)<\delta$ 时,有

$$S(T)-s(T)<\varepsilon$$

由性质 5 知,当 $\lambda(T)<\delta$ 时,有

$$s(T)\leqslant l\leqslant L\leqslant S(T)$$

或

$$0\leqslant L-l\leqslant S(T)-s(T)<\varepsilon$$

令 $\lambda(T)\to 0$,由于差 $S(T)-s(T)\to 0$,所以

$$l=L=I$$

于是对任意的分法 T,都有

$$s(T)\leqslant I\leqslant S(T)$$

而由性质 1 知,又有

$$s(T)\leqslant \sigma(T)\leqslant S(T)$$

其中 $\sigma(T)$是对应于分法 T 的任意一个积分和. 从这两个不等式就得到

$$|\sigma(T)-I|\leqslant S(T)-s(T)<\varepsilon$$

故有

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sigma(T)=I$$

从而证明了函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上是可积的,且定积分为

$$I=L=l$$

定义 若函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上有定义且有界,记 $M=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}$,$m=\inf\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}$,则称 $\omega=M-m$ 是函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的振幅.

对于区间$[a,b]$上的一个确定的分法 T,则 $\omega_i=M_i-m_i$ 是函数 $f(x)$在小区间$[x_{i-1},x_i]$上的振幅,其中 $m_i=\inf\limits_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i}\{f(x)\}$,$M_i=\sup\limits_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i}\{f(x)\}$,$i=1,2,\cdots,n$.

推论 设函数 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的有界函数,则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积的充分必要条件是

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = 0$$

其中 ω_i 是函数 $f(x)$ 在小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅,$i=1,2,\cdots,n$.

3.2.4 可积函数类

应用上一段的可积准则,可以证明经常遇到的三类有界函数是黎曼可积的.

定理 1 设 $f(x)$ 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积.

证 根据假设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,故它在这个区间上一致连续. 于是对任给的正数 ε,总存在正数 δ,使在 $[a,b]$ 上的任意两点 x' 及 x'',只要 $|x'-x''|<\delta$,就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

用分法 T 将 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$,$i=1,2,\cdots,n$. 并使 $\lambda(T)<\delta$. 由于函数 $f(x)$ 是连续,故它在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上必取到最大值 $f(\xi_i')$ 与最小值 $f(\xi_i'')$,而且有 $M_i=f(\xi_i')$,$m_i=f(\xi_i'')$,其中 $\xi_i',\xi_i''\in[x_{i-1},x_i]$. 因为 $\lambda(T)<\delta$,所以 $[\xi_i'-\xi_i'']\leqslant x_i-x_{i-1}<\delta$,故有

$$\omega_i=M_i-m_i=f(\xi_i')-f(\xi_i'')<\varepsilon,\quad i=1,2,\cdots,n$$

从而得到

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\varepsilon(b-a)$$

根据可积准则的充分性,就证明了连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积.

定理 1 的几何意义是十分明显的. 它表明由连续曲线与 x 轴及直线 $x=a$,$x=b$ 所围成的曲边梯形的面积是一定存在的. 不过,如此明显的事实,要用数学分析的语言严格加以论证,还是不

那么容易的.

除连续函数之外,某些不连续函数的定积分也是存在的.

定理 2 若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上有定义,且有界,设在这区间上只有有限个间断点,则函数 $f(x)$在$[a,b]$上是黎曼可积的.

证 为了叙述简便与易于掌握,又不失一般性,可设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上只有一个间断点 c. 对任给的正数 ε,以点 c 为中心作长度为 2ε 的区间$[a_1,b_1]$,即 $a_1=c-\varepsilon, b_1=c+\varepsilon$. 在区间$[a,a_1]$及$[b_1,b]$上函数 $f(x)$都连续. 因此在$[a,a_1]$及$[b_1,b]$上都一致连续. 这时总存在正数 δ,对属于$[a,a_1]$及$[b_1,b]$的任意小区间,只要它的长度小于 δ,则函数 $f(x)$在其上的振幅就小于 ε.

设 T 是区间$[a,b]$的任意一个使 $\lambda(T)<\delta$ 的分法. 这时可把由这个分法分成的小区间$[x_{i-1},x_i]$分成两类. 一类是整个属于区间$[a,a_1]$或$[b_1,b]$的小区间,另一类是与区间$[a_1,b_1]$有公共点的小区间. 于是和数

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\Sigma'\omega_i\Delta x_i+\Sigma''\omega_i\Delta x_i$$

其中 Σ' 是全部包含在$[a,a_1]$及$[b_1,b]$内的小区间作出的和,Σ''是与$[a_1,b_1]$有公共点的小区间作出的和. 由于 $\lambda(T)<\delta$,因此对任何包含在$[a,a_1]$及$[b_1,b]$的小区间$[x_{i-1},x_i]$都有 $\omega_i<\varepsilon$,即

$$\Sigma'\omega_i\Delta x_i\leqslant\varepsilon\Sigma'\Delta x_i\leqslant\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\varepsilon(b-a)$$

因为与$[a_1,b_1]$有公共点的小区间全部位于区间$[a_1-\delta,b_1+\delta]$上,其长度为 $b_1+\delta-(a_1-\delta)=b_1-a_1+2\delta=2\varepsilon+2\delta$. 若取 $\delta<\varepsilon$,故总长度小于 4ε,又因为有界函数 $f(x)$在任何小区间$[x_{i-1},x_i]$上的振幅都不超过它在整区间$[a,b]$上的振幅,即 $\omega_i=M_i-m_i\leqslant M-m$,故有

$$\Sigma''\omega_i\Delta x_i\leqslant(M-m)\Sigma''\Delta x_i\leqslant4(M-m)\varepsilon$$

于是有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i \Delta x_i < \varepsilon[b-a+4(M-m)]$$

由可积性定理的推论知，函数 $f(x)$在$[a,b]$上是黎曼可积的.

定理 3 设 $f(x)$是定义在区间$[a,b]$上的单调有界函数，则 $f(x)$在区间$[a,b]$上是黎曼可积的.

证 为确定起见，不妨设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上是单调不减的，则对于区间$[a,b]$的任意分法 T，单调不减函数 $f(x)$在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上的上确界与下确界显然分别为

$$M_i = f(x_i) \text{ 与 } m_i = f(x_{i-1}), \quad i=1,2,\cdots,n$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]\Delta x_i$$

若对任给的正数 ε，取正数 $\delta=\varepsilon$，对$[a,b]$的任意分法 T，当 $\lambda(T)<\delta$ 时，有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\omega_i \Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]\Delta x_i < \delta\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})] \\ &= \delta[f(x_n)-f(x_0)] = \varepsilon[f(b)-f(a)]\end{aligned}$$

根据可积准则的充分性得到，任何单调有界函数 $f(x)$在$[a,b]$上是黎曼可积的.

注意：在区间$[a,b]$上的单调有界函数，可以存在无穷多个间断点.

例如阶梯函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0 \\ \dfrac{1}{n}, & \dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n}\end{cases}$$

显然它在区间$[0,1]$上是单调不减的有界函数，并以

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots$$

为间断点. 但是由定理 3 知，这个函数在区间$[0,1]$上是黎曼可积的.

(一) 例

例 1 设有一条抛物线 $y=x^2$，试计算由这条抛物线，x 轴与直线 $x=1$ 及 $x=2$ 所围成的曲边梯形的面积.

解 根据定积分的定义，这个曲边梯形的面积为

$$A=\int_1^2 x^2\mathrm{d}x$$

因为被积函数 $f(x)=x^2$ 在积分区间$[1,2]$上连续，由定理 1 知，这个定积分存在，所以积分值 A 与区间$[1,2]$的分法及 ξ_i 的取法无关. 为了便于计算，不妨将区间$[1,2]$分成 n 等分，故分点为

$$x_i=1+\frac{i}{n},\quad i=0,1,2,\cdots,n$$

于是，每个小区间的长度 $\Delta x_i=\dfrac{1}{n}$，并取 $\xi_i=x_i$，则积分和为

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i&=\sum_{i=0}^{n-1}\left(1+\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}\\&=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1}1+\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}i+\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}i^2\right)\\&=\frac{1}{n}\left[n+\frac{2}{n}\cdot\frac{(n-1)n}{2}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right]\\&=\frac{(2n-1)(7n-1)}{6n^2}\end{aligned}$$

这是曲边梯形面积 A 的近似值，其中 $\lambda(T)=\dfrac{1}{n}$，故当 $\lambda(T)\to0$，相当于 $n\to\infty$. 则有

$$A=\int_1^2 x^2\mathrm{d}x=\lim_{\lambda(T)\to0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)(7n-1)}{6n^2}=\frac{7}{3}$$

例 2 将下列和式的极限表成定积分

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$$

解 先将被求极限的和式作恒等变形为

$$\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}$$

$$=\frac{1}{n\sqrt{4-\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{n\sqrt{4-\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt{4-\left(\frac{n}{n}\right)^2}}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{i}{n}\right)^2}}\cdot\frac{1}{n}$$

剩下就是设法找一个可积函数，使上式恰是这个函数的黎曼和就行了. 为此，考虑函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$，它在区间$[0,1]$上连续，故黎曼可积. 于是对区间$[0,1]$的任意分法及 ξ_i 的任意取法，所得的积分和的极限都是定积分 $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$. 现将区间$[0,1]$ n 等分，分点为

$$x_i=\frac{i}{n},\quad i=0,1,2,\cdots,n$$

每个小区间的长度都相等

$$\Delta x_i=\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}=\frac{1}{n},\quad i=1,2,\cdots,n$$

并取 $\xi_i=\frac{i}{n}$，$i=1,2,\cdots,n$，则积分和为

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4-\xi_i^2}}\cdot\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{i}{n}\right)^2}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}$$

令 $\lambda(T)=\frac{1}{n}\to 0$，即 $n\to\infty$. 得到

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$$
$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$$

从例 1 与例 2 看出，应该找一个有效的、简单的方法来计算定积分. 这正是下一节要讨论的问题.

（二）定积分的几何意义及两个规定

在定积分的定义中，并没有规定函数 $f(x)$ 必须是非负的. 实际上在应用问题中 x 与 $f(x)$ 可表示不同意义的量，因而定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的意义也各不相同. 易见，若在区间 $[a,b]$ 上只要 $f(x)\geqslant 0$，$a<b$，定积分的数值就是正的，且总等于由曲线 $y=f(x)$，x 轴及直线 $x=a$，$x=b$ 所围成的曲边梯形的面积.

若在 $[a,b]$ 上，$f(x)<0$，$a<b$，由于总有 $f(\xi_i)<0$，$\Delta x_i>0$，因此定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<0$，这时曲边梯形的曲边在 x 轴的下方，因此曲边梯形的面积与定积分值的绝对值相同. 若我们对面积赋以正负号，规定在 x 轴上方的面积为正，在 x 轴下方的面积为负，则定积分的几何意义为曲线 $y=f(x)$，x 轴及直线 $x=a$，$x=b$ 所围成的曲边梯形的面积.

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可正可负，则定积分的几何意义是在 $[a,b]$ 上各个曲边梯形面积的代数和.

此外，在定积分的定义中，要求 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上，故 $a\neq b$，且 $a<b$，这时符号 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的意义明确，而符号 $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$ 却无意义；同样也未给出函数 $f(x)$ 在一点 $a(a=b)$ 上的定积分的定义，即符号 $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x$ 无意义. 为了使定积分的运算与定积分的符号和谐一致，今作如下两点规定.

1. 当 $a>b$ 时，规定 $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 有了这个规定，以后对定积分的上、下限就不作任何限制了. 按这个规定，若交换积分上，下限，则定积分变号；

2. 当 $a=b$ 时，规定 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$. 这个规定说明，当积分上、

下限相同时定积分为零.

复习思考题

1. 叙述定积分的定义,黎曼和是怎样构成的?

2. 在定积分的定义中,是否可以把 $\lambda(T)\to 0$ 的极限过程换成 $n\to\infty$(即分点无限增多)?

3. 定积分有什么几何意义与物理意义?

4. 定积分的存在及其数值应取决于哪些因素?为什么有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(\theta)\mathrm{d}\theta?$$

5. 定积分存在的必要条件是什么?什么样的函数一定黎曼可积?

6. 下列函数在指定的区间上是否黎曼可积?

(1) $f(x)=\begin{cases} x+\sin x, & x\leqslant 0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$

在任何有限区间上;

(2) $f(x)=\begin{cases} 0, & x=0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & 0<x\leqslant 1 \end{cases}$

在区间[0,1]上;

(3) $f(x)=[x]$,其中$[x]$表示不大于 x 的最大整数,在任何有限区间上;

(4) $f(x)=\max[\varphi(x),\psi(x)]$,$a\leqslant x\leqslant b$,其中 $\varphi(x)$,$\psi(x)$都是$[a,b]$上的连续函数.

习题 3.2

1. 放射性物体的分解速度 V 是时间 t 的函数 $V=V(t)$,试表示放射性物体由时间 T_0 到 T_1 所分解的质量 m:a)用积分和表示其近似值,b)用定积分表示其准确值.

2. 一个图形是由横轴与直线 $y=2x$,$x=4$,$x=6$ 所围成,将区间[4,6]分成 n 等分,作 n 阶台阶形.试求内接和外接 n 阶台阶形的面积,验证两个面积

当 n 无限增大时趋于同一个极限,即图形的面积. 再求出用这两个 n 阶台阶形的面积代替图形的面积时的绝对误差.

3. 证明函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 是有理数},\\ -1, & \text{当 } x \text{ 是无理数}\end{cases}$$

在区间$[0,1]$上不可积. 而$|f(x)|$在区间$[0,1]$上可积.

4. (达布定理)证明若函数 $f(x)$在$[a,b]$上有界,则

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} S(T)=\inf_T\{S(T)\}=L;$$

与

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} s(T)=\sup_T\{s(T)\}=l$$

5. 证明若函数 $f(x)$在$[0,1]$上黎曼可积,且

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x>0$$

则存在某个闭区间$[a,b]\subset[0,1]$,对任意 $x\in[a,b]$,有 $f(x)>0$.

6. 由定义计算下列定积分:

(1) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ (2) $\int_0^1 x\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$ (4) $\int_1^5 x^3\mathrm{d}x$

(5) $\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ (6) $\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x$

(提示:在(5)与(6)中,使分点的坐标成几何级数 $2^{\frac{i}{n}}$,$i=1,2,\cdots,n$.)

7. 先将下列各式写成黎曼和极限的形式,再表成定积分:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$, $p>0$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}\right]$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right]$

3.3 定积分的性质及其计算

为了寻找一个一般的而又非常简便的计算定积分的方法，必须先对定积分的性质作一个基本的了解. 不过，定积分的性质较多，它们的证明几乎都是利用定积分的定义直接进行证明. 有的可以结合其几何意义加以记忆，通过证明可以帮助我们加深理解和巩固定积分的概念. 自然也可以检查我们掌握定积分概念的程度.

在这许多的性质中，积分中值定理在理论上有重要的价值，应给予足够的重视. 为了书写简便将直接写出函数的积分和.

3.3.1 定积分的基本性质

（一）定积分的线性性

1. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，而 c 是任意常数，则函数 $cf(x)$ 在 $[a,b]$ 也可积，且

$$\int_a^b cf(x)\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

证 函数 $cf(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分和为

$$\sum_{i=1}^{n} cf(\xi_i)\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

因为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，所以 $\lambda(T)\to 0$ 时，上式右端收敛，故左端的积分和也存在极限，即函数 $cf(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且有

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} cf(\xi_i)\Delta x_i = c\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

或

$$\int_a^b cf(x)\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

这个性质表明：可积函数的常数因子可以提到积分号之外.

例 1 求定积分 $\int_1^2 3x^2\mathrm{d}x$.

解 $\int_1^2 3x^2\mathrm{d}x = 3\int_1^2 x^2\mathrm{d}x = 3\cdot\frac{7}{3} = 7$

2. 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积,则函数 $f(x)\pm g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积,且

$$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

这就是说函数代数和的定积分等于它们各自的定积分的代数和.

证 因为函数 $f(x)\pm g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分和为

$$\sum_{i=1}^n[f(\xi_i)\pm g(\xi_i)]\Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \pm \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i$$

而 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,所以当 $\lambda(T)\to 0$ 时,上式右端关于 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分和都存在极限. 故左端的函数 $f(x)\pm g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分和也存在极限,即函数 $f(x)\pm g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,且有

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^n[f(\xi_i)\pm g(\xi_i)]\Delta x_i$$

$$= \lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i$$

或

$$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

3. 若在区间 $[a,b]$ 上,函数 $f(x)=c$(常数),则 $f(x)=c$ 在 $[a,b]$ 上可积,且

$$\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a)$$

证 因为 $f(x)=c$(常数)在 $[a,b]$ 上连续,故可积,它在 $[a,b]$ 上的积分和为

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = c\sum_{i=1}^n \Delta x_i = c(b-a)$$

则有

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = c(b-a)$$

即有

$$\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a)$$

特别,若 $c=1$,则有 $\int_a^b 1\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x=(b-a)$. 就是说 1 的定积分等于积分区间的长度.

(二) 积分区间的可加性

4. 若函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上可积,且 $a\leqslant a'<b'\leqslant b$,则它在区间$[a',b']$上也是可积的.

证 因 $f(x)$在区间$[a,b]$上可积,故对任给的正数 ε,总存在正数 δ,对$[a,b]$的任意分法 T,当 $\lambda(T)<\delta$ 时,有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{[a,b]}\omega_i\Delta x_i=\sum_{T}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$$

对于区间$[a',b']$的部分,可作为任意分法 T_1,且 $\lambda(T_1)<\delta$. 同时将$[a,a']$与$[b',b]$的部分分别作为任意的分法 T_2 与 T_3,且 $\lambda(T_2)<\delta$ 与 $\lambda(T_3)<\delta$. 于是,把它们的分点放在一起就构成$[a,b]$的一个分法 T,则 $\lambda(T)<\delta$,且有

$$\begin{aligned}&\Big(\sum_{[a,a']}\omega_i\Delta x_i+\sum_{[a',b']}\omega_i\Delta x_i+\sum_{[b',b]}\omega_i\Delta x_i\Big)\\&=\sum_{[a,b]}\omega_i\Delta x_i=\sum_{T}\omega_i\Delta x_i\end{aligned}$$

但是

$$\sum_{[a,a']}\omega_i\Delta x_i\geqslant 0,\quad \sum_{[b',b]}\omega_i\Delta x_i\geqslant 0$$

故有

$$\sum_{[a',b']}\omega_i\Delta x_i=\sum_{T_1}\omega_i\Delta x_i\leqslant\sum_{T}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$$

因此,由可积准则的充分性知,函数 $f(x)$在$[a',b']$上可积.

这就是说在整个区间上可积，必在部分区间上可积.

5. 设 $a<c<b$，若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 上可积，则它在整个区间 $[a,b]$ 上也是可积的，并且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

证 先证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 用任意的分法 T，分割区间 $[a,b]$. 若 c 不是分法 T 的分点，将 c 作为分点加入分法 T 中，得到新的分法 T_1，于是对 T 与 T_1 分别对应的振幅和为

$$\sum_{[a,b]}\omega_i\Delta x_i \text{ 与} \sum_{[a,b]}{}'\omega_i\Delta x_i=\sum_{[a,c]}\omega_i\Delta x+\sum_{[c,b]}\omega_i\Delta x_i$$

但在分法 T 中，包含点 c 的只有一个小区间，故在和数 $\sum\limits_{[a,b]}\omega_i\Delta x_i$ 中，只有一项包含 c，记为 $\omega_k\Delta x_k$；而在分法 T_1 中包含 c 的有两个小区间，故在和数 $\sum\limits_{[a,b]}{}'\omega_i\Delta x_i$ 中有两项含有 c，分别记为 $\omega_j\Delta x_j$ 与 $\omega_{j+1}\Delta x_{j+1}$. 除此之外 $\sum\limits_{[a,b]}\omega_i\Delta x_i$ 与 $\sum\limits_{[a,b]}{}'\omega_i\Delta x_i$ 的项完全相同，故有

$$\sum_{[a,b]}\omega_i\Delta x_i-\sum_{[a,b]}{}'\omega_i\Delta x_i=\omega_k\Delta x_k-(\omega_j\Delta x_j+\omega_{j+1}\Delta x_{j+1})$$

或

$$\sum_{[a,b]}\omega_i\Delta x_i\leqslant\sum_{[a,b]}{}'\omega_i\Delta x_i+\omega_k\Delta x_k+(\omega_j\Delta x_j+\omega_{j+1}\Delta x_{j+1})$$

今设 ω 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的振幅，则 $\omega_i\leqslant\omega$. 已知 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 上可积，故对任给的正数 ε，总存在正数 δ，对 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 的任意分法 T，当 $\lambda(T)<\delta\leqslant\varepsilon$ 时，有

$$\sum_{[a,b]}{}'\omega_i\Delta x_i=\sum_{[a,c]}\omega_i\Delta x_i+\sum_{[c,b]}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$$

代入前面的不等式，有

$$\sum_{[a,b]}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon+3\omega\delta\leqslant(1+3\omega)\varepsilon$$

即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

其次，证明定积分的等式成立. 因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，考虑以 c 为一个分点的所有 $[a,b]$ 上的分法 T，故有

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i$$

令 $\lambda(T)$ 趋于零，由假设知，上述等式右端的极限为

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

故左端也必以此为极限，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

推论 1　若函数 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积，且 a,b,c 是 $[\alpha,\beta]$ 上的任意三点，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

证　若 $a<c<b$，就是性质 5.

若 $a<b<c$，由性质 4 知，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 与 $[b,c]$ 及 $[a,c]$ 上都可积，再由性质 5，有

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

或

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

推论 2　若函数 $f(x)$ 在 $[c_0,c_n]$ 及 $[c_{i-1},c_i]$，$i=1,2,\cdots,n$ 上都可积，则有

$$\int_{c_0}^{c_n} f(x)\mathrm{d}x = \int_{c_0}^{c_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)\mathrm{d}x$$

证　不断应用性质 5.

应用推论 2，就可以理解为什么 3.2.4 中定理 2 的证明不失一般性的原因了.

（三）定积分的单调性

6. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是定义在区间 $[a,b]$ 上的可积函数，且在区间 $[a,b]$ 上，$f(x)\leqslant g(x)$，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

证 对区间$[a,b]$的任意分法 T，及 ξ_i 的同一种任意取法，总有

$$\sum_{n=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

由极限的保号性知，当 $\lambda(T)\to 0$ 时，有

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

推论 3 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续. 若 $f(x)\geqslant 0$，且 $f(x)\neq 0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$.

证 由 $f(x)\neq 0$ 的假设知，必存在一点 $x_0\in[a,b]$，使 $f(x_0)>0$，再由 $f(x)$在点 x_0 的连续可知，对于 $\varepsilon=\dfrac{f(x_0)}{2}>0$，存在正数 δ，当 $x\in(x_0,x_0+\delta)\subset[a,b]$（当 $x_0=b$ 时，取$(x_0-\delta,x_0)$）时，有

$$f(x) > f(x_0)-\varepsilon > \frac{f(x_0)}{2} > 0,$$

根据性质 5，得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^{x_0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_0}^{x_0+\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)\mathrm{d}x \\ &\geqslant \int_{x_0}^{x_0+\delta} f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{x_0}^{x_0+\delta}\frac{f(x_0)}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f(x_0)\delta > 0\end{aligned}$$

推论 4 设 $f(x)$与 $g(x)$都在$[a,b]$上连续，若 $f(x)\geqslant g(x)$，但 $f(x)\neq g(x)$，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

例 2 不计算，试比较积分$\int_1^2 x^2\mathrm{d}x$ 与$\int_1^2 x^3\mathrm{d}x$ 的大小.

解 函数 x^2 与 x^3 在$[1,2]$上连续，且 $x^2\leqslant x^3$，但 $x^2\neq x^3$. 由

推论 4 知，有

$$\int_1^2 x^2 \mathrm{d}x < \int_1^2 x^3 \mathrm{d}x$$

推论 5 若函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上可积，且

$$m \leqslant f(x) \leqslant M,\ x \in [a,b]$$

则有

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

例 3 证明

$$\frac{2}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}} \leqslant \int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x \leqslant 2\mathrm{e}^2$$

证 由于被积函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2-x}$在$[0,2]$上的最小值与最大值分别为 $1/\sqrt[4]{\mathrm{e}}$与 e^2，即有

$$\frac{1}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^2,\ x \in [0,2]$$

应用推论 5，得

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^2 \mathrm{e}^2\mathrm{d}x$$

或

$$\frac{2}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}} \leqslant \int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x \leqslant 2\mathrm{e}^2$$

7. 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上可积. 则有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

证 先证明函数$|f(x)|$在$[a,b]$上也可积. 对区间$[a,b]$的任意分法 T，设函数 $f(x)$与$|f(x)|$在小区间$[x_{i-1},x_i]$上的振幅分别为 ω_i 与 ω_i^*，即有

$$\omega_i = M_i(f) - m_i(f);\ \omega_i^* = M_i(|f|) - m_i(|f|)$$

由于对任意的 $s,t\in[x_{i-1},x_i]$都有

$$|f(s)| - |f(t)| \leqslant |f(s) - f(t)|$$

因此

$$M_i(|f|)-m_i(|f|)\leqslant M_i(f)-m_i(f)$$

故总有

$$\omega_i^*\leqslant\omega_i,\ i=1,2,\cdots,n$$

从而得到

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i^*\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i$$

但已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，即对任给的正数 ε，存在正数 δ，对 $[a,b]$ 的分法 T，当 $\lambda(T)<\delta$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$$

更有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i^*\Delta x_i<\varepsilon$$

故函数 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上也可积.

其次，对任意的 $x\in[a,b]$，总有

$$-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant|f(x)|$$

根据性质 6 及性质 1，则有

$$-\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$$

或

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$$

推论 6 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，且 $|f(x)|\leqslant k$（常数），则有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant k(b-a)$$

8. 设函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则乘积 $f(x)\cdot\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积.

证 因为 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，所以 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上都有界，不妨设对任意的 $x\in[a,b]$，有 $|f(x)|\leqslant M$ 与

$|\varphi(x)|\leqslant M$. 对区间$[a,b]$的任意分法 T,用 ω_i',ω_i''及 ω_i 分别表示 $f(x)$,$\varphi(x)$及 $f(x)\cdot\varphi(x)$在小区间$[x_{i-1},x_i]$上的振幅,对任意的 $x_k,x_k'\in[x_{i-1},x_i]$,由于

$$\begin{aligned}|f(x_k)\varphi(x_k)-f(x_k')\varphi(x_k')|&\leqslant|f(x_k)||\varphi(x_k)-\varphi(x_k')|\\&\quad+|\varphi(x_k')||f(x_k)-f(x_k')|\leqslant M\omega_i''+M\omega_i'\end{aligned}$$

因此,有

$$\omega_i\leqslant M\omega_i'+M\omega_i'',\quad i=1,2,\cdots,n$$

故得到

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\leqslant M\left(\sum_{i=1}^{n}\omega_i'\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\omega_i''\Delta x_i\right)$$

但已知 $f(x)$与 $\varphi(x)$在$[a,b]$上可积,即对任给的正数 ε,存在正数 δ,对$[a,b]$的任意分法 T,当 $\lambda(T)<\delta$ 时,有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i'\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2M},\sum_{i=1}^{n}\omega_i''\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2M}$$

即有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i^*\Delta x_i<\varepsilon$$

故函数 $f(x)\cdot\varphi(x)$在$[a,b]$上可积.

(四) 积分中值定理

9. 设在闭区间$[a,b]$上函数 $f(x)$连续,而函数 $\varphi(x)$可积. 且不变号,则在开区间(a,b)内至少存在一点 ξ,使

$$\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x,\ a<\xi<b$$

证 为确定起见,不妨设 $\varphi(x)$是非负的.

首先若函数 $f(x)$在$[a,b]$上是常值函数,于是在开区间(a,b)内的每一点都可作为性质 9 中的 ξ,故结论成立;

其次,若函数 $f(x)$在$[a,b]$上不是常值函数,并用 m 与 M 分别表示 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上的最小值与最大值. 令 $g(x)=M-f(x)$,这时 $g(x)$在$[a,b]$上连续,且 $g(x)\geqslant0$. 由性质 8 知,$g(x)\cdot\varphi(x)$在$[a,b]$上可积,再由性质 6 得到

$$0 \leqslant \int_a^b g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_a^b [M - f(x)]\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$= M\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

或有

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$$

类似地可证明

$$m\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

从而得到

$$m\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$$

因已设 $\varphi(x) \geqslant 0$ 时,由性质 6 知,$\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

若 $\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x = 0$ 时,按上述不等式,有 $\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$,故任取 $\xi \in (a,b)$ 都行. 当 $\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x > 0$ 时,有

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x) \cdot \varphi(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x} \leqslant M$$

令

$$\mu = \int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \Big/ \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$$

若 $m < \mu < M$,则由在闭区间上连续的函数的介值定理知,在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使 $f(\xi) = \mu$. 故性质 9 成立.

若 $\mu = m$,则性质 9 也成立. 实际上,若不然,假定对一切的 $x \in (a,b)$,都有 $f(x) > \mu$. 由于 $\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x > 0$,根据极限的保号性,存在正整数 n_0,使

$$\int_{a+\frac{1}{n_0}}^{b-\frac{1}{n_0}} \varphi(x)\mathrm{d}x > 0$$

另外,连续函数 $f(x)-\mu$ 在闭区间$\left[a+\dfrac{1}{n_0},b-\dfrac{1}{n_0}\right]$上具有最小值 $l_0>0$. 故有

$$0=\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x-\mu\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x=\int_a^b [f(x)-\mu]\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$\geqslant \int_{a+\frac{1}{n_0}}^{b-\frac{1}{n_0}} [f(x)-\mu]\varphi(x)\mathrm{d}x \geqslant l_0\int_{a+\frac{1}{n_0}}^{b-\frac{1}{n_0}} \varphi(x) > 0$$

这是矛盾的. 从而证明了性质 9 对 $\mu=m$ 成立.

同理可证 $\mu=M$ 时性质 9 也成立.

最后,得到

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x,\quad a<\xi<b$$

特别,若 $\varphi(x)=1$,就得到著名的**积分中值定理**.

若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则在开区间(a,b)内至少存在一点 ξ,使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a),\ a<\xi<b$$

这个公式又称积分中值公式. 它有明显的几何意义. 对于以区间$[a,b]$为底边的曲边梯形. 它的面积等于同一底边,而高为曲边上某一点的纵坐标的矩形面积(图 3.5)

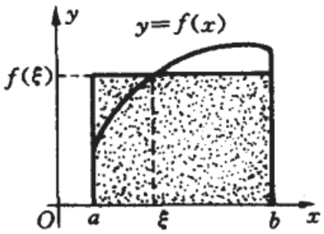


图 3.5

例 5 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n \sin x\mathrm{d}x$$

解 设 $f(x)=\sin x,\varphi(x)=x^n$. 在区间$[0,1]$上满足积分中值公式的条件,故有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sin x\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sin\xi_n\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sin\xi_n\cdot\frac{1}{n+1}=0$$

例 6 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x$.

解 此例不能像例 5 那样直接利用积分中值公式. 因为 $n\to\infty$时,无法说明 ξ 不趋于$\frac{\pi}{2}$,即不能排除为 1^∞ 型未定式的问题. 为此应在 $x=\frac{\pi}{2}$附近作特殊处理:将原来的定积分拆开为两个积分,一个积分在点$\frac{\pi}{2}$附近,使积分区间很小;另一个积分用中值公式可以断定,当 n 趋于无穷大时,ξ 不趋于$\frac{\pi}{2}$. 这是一种具有普遍意义的解题方法.

对任给的正数 ε,使

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\sin^n x\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x$$

$$=\sin^n\xi\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)+\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x,\ 0<\xi<\frac{\pi}{2}-\varepsilon$$

于是

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\sin^n\xi\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right|+\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}|\sin^n x|\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\frac{\pi}{2}\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right|^n+\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{2}\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right|^n+\varepsilon$$

但是$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right|^n=0$,故对任给的正数 ε,存在自然数 N,当 $n>N$ 时,有

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right|^n<\varepsilon\cdot\frac{2}{\pi}$$

即当 $n>N$ 时,有

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x\right|<2\varepsilon$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x = 0$$

3.3.2 微积分的基本定理

第二章介绍的微分学,及本章讲的积分学是微积分的主要两个组成部分. 历史上,微分学的中心问题是切线问题,而积分学的中心问题是求积问题. 开始它们是平行发展的、互不相干的两个概念. 直到十七世纪后期,牛顿和莱布尼兹才几乎在同时彼此独立地发现了微积分基本定理. 在写作年代上牛顿先于莱布尼兹约 10 年,而在发表的时间上莱布尼兹又早于牛顿 3 年,因此为了纪念他们的卓越贡献,人们又称这个定理为牛顿-莱布尼兹公式. 这个定理建立之后,才在微分与积分之间架起了一座桥梁.

首先这个定理把表达形式十分相象,而意义却不同的定积分与不定积分联系起来,并揭示了微分与积分是两种互逆运算的内在联系. 其次,这个定理不仅提供了计算定积分的简便方法,而且在理论上标志着微积分体系的形成.

为了建立定积分与不定积分的联系,先引入一个新的函数,这就是积分上限的函数.

大家知道,函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是一个数值,它只与被积函数 $f(x)$及积分区间$[a,b]$有关,而与积分变量用什么符号无关. 若函数 $f(x)$在$[a,b]$上可积,由 3.3.1 的性质 4 知,对$[a,b]$上的任意一点 x,函数 $f(t)$在$[a,b]$上可积,则有

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\ a\leqslant x\leqslant b$$

于是,对$[a,b]$上的任意一点 x,都对应唯一的一个定积分 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,按照函数的定义,定积分 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 就是定义在区间$[a,b]$上的函数,记为 $\Phi(x)$,即有

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\ a\leqslant x\leqslant b$$

由于它的自变量 x 恰是积分上限，因此称它为积分上限函数，例如

$$\int_0^x t^2\mathrm{d}t,\ 0\leqslant x\leqslant 1$$

就是定义在区间[0,1]上的一个积分上限函数.

积分上限函数 $\Phi(x)$ 的几何意义是：若函数 $f(x)\geqslant 0$，对 $[a,b]$ 上任意的 x 都对应唯一的一个曲边梯形的面积 $\Phi(x)$.

关于这个函数的可微性有下面的定理.

定理 1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则积分上限函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\ a\leqslant x\leqslant b$$

在区间 $[a,b]$ 上可微，且 $\Phi'(x)=f(x)$，即积分上限函数 $\Phi(x)$ 是被积函数 $f(x)$ 的原函数.

证 设自变量 x 有增量 h，使 $x+h\in[a,b]$，根据微商的定义，只须证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\Phi'(x)$$

因为

$$\Phi(x+h)=\int_a^{x+h}f(t)\mathrm{d}t=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_x^{x+h}f(t)\mathrm{d}t$$

而

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

所以

$$\Phi(x+h)-\Phi(x)=\int_x^{x+h}f(t)\mathrm{d}t$$

应用积分中值公式，得

$$\int_x^{x+h}f(t)\mathrm{d}t=f(\xi)h$$

其中 ξ 是 x 与 $x+h$ 之间的某一点. 从而得到

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=f(\xi)$$

当 $h\to0$ 时,应有 $\xi\to x$. 根据函数 $f(t)$ 的连续性, $f(\xi)$ 就趋于 $f(x)$. 故有

$$\Phi'(x)=\lim_{h\to0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\lim_{h\to0}f(\xi)=f(x)$$

易见,定理 1 确实架起了微分与积分之间的一座桥梁. 在讨论不定积分时,曾提出什么样的函数才存在原函数的问题. 实际上,定理 1 已回答了这个问题,即有

定理 2 任意一个连续函数必有原函数.

例 1 设 $\Phi(x)=\int_0^x\frac{1-t+t^2}{1+t+t^2}\mathrm{d}t$, 求 $\Phi'(x)$.

解 因为 $\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$ 是连续函数,故由定理 1 知

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x\frac{1-t+t^2}{1+t+t^2}\mathrm{d}t=\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$$

例 2 设 $g(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t$, 求 $g'(x)$.

解 先将 $g(x)$ 改写为

$$\begin{aligned}g(x)&=\int_{\sin x}^{0}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t+\int_0^{\cos x}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\cos x}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t-\int_0^{\sin x}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

由于上式右端两个积分的上限分别为 $\cos x$ 与 $\sin x$ 都是 x 的函数,根据复合函数求微商的法则,有

$$\begin{aligned}g'(x)&=\cos(\pi\cos^2x)(-\sin x)-\cos(\pi\sin^2x)(\cos x)\\&=-\sin x[\cos(\pi-\pi\sin^2x)]-\cos x\cos(\pi\sin^2x)\\&=(\sin x-\cos x)\cos(\pi\sin^2x)\end{aligned}$$

例 3 设

$$\begin{cases} x = \int_1^t u\ln u\mathrm{d}u \\ y = \int_t^1 u^2\ln u\mathrm{d}u \end{cases} \quad (t > 0), 求\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

解 因为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_1^t u\ln u\mathrm{d}u\right) = t\ln t$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_t^1 u^2\ln u\mathrm{d}u\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\int_1^t u^2\ln u\mathrm{d}t\right) = -t^2\ln t$$

而

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{-t^2\ln t}{t\ln t} = -t$$

例 4 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\mathrm{tg}t}\,\mathrm{d}t}{\int_0^{\mathrm{tg}x}\sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}t}$.

解 这是$\frac{0}{0}$型的未定式,应用洛比达法则,有

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\mathrm{tg}t}\,\mathrm{d}t}{\int_0^{\mathrm{tg}x}\sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}t} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\mathrm{tg}(\sin x)}\cdot\cos x}{\sqrt{\sin(\mathrm{tg}x)}\cdot\sec^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\cos^3 x\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\mathrm{tg}(\sin x)}{\sin(\mathrm{tg}x)}\right]^{\frac{1}{2}} = 1$$

定理 1 还有明显的物理意义.设已知质点的运动速度为$f(t)$,从时刻 a 开始作直线运动,则在时刻 t,质点所走的路程为

$$s(t) = \int_a^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

易见,$s(t)$是积分上限 t 的函数.由定理 1 知,当 $f(t)$连续时,有

$$s'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_a^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right) = f(t)$$

故路程函数的微商正是速度函数.

另外,在应用中若已知质点运动速度为 $f(t)$,常常要求从时

刻 a 到时刻 b 所走过的路程,这就是要计算定积分 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

若已知它的运动规律 $s=s(t)$,则从 a 到 b 质点所走过的路程是 $s(t)$在$[a,b]$上的改变量 $s(b)-s(a)$,则有

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = s(b)-s(a)$$

当 $f(t)$连续时,$s(t)$就是 $f(t)$的一个原函数. 因此得到了一个计算定积分的简便法则. 就是定积分的值等于被积函数的原函数在上限的值减去它在下限的值.

今来证明定积分与原函数的这种关系是普遍成立的,即有如下定理.

定理 3(牛顿-莱布尼兹公式) 若函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续,而 $F(x)$是 $f(x)$在$[a,b]$上的任意一个原函数,则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$$

证 已知 $F(x)$是 $f(x)$在$[a,b]$上的任意一个原函数,即对任意的 $x\in[a,b]$,有

$$F'(x) = f(x)$$

由定理 1 知,变上限定积分给出的函数 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 也是 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上的一个原函数,即也有

$$\Phi'(x) = f(x)$$

根据拉格朗日中值定理的推论知,有

$$\Phi(x) - F(x) = C$$

其中 C 为常数. 为了确定常数,令 $x=\alpha$,有

$$\Phi(\alpha) - F(\alpha) = C$$

但 $\Phi(\alpha)=0$,故 $C=-F(\alpha)$. 于是,有

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x)+C = F(x)-F(\alpha)$$

最后,令 $x=b,\alpha=a$,得到

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

牛顿-莱布尼兹公式揭示了定积分与不定积分之间的关系:定积分的值等于被积函数的任一原函数在上限与下限的值之差. 正因为这种关系,才把带有任意常数的原函数的全体称为不定积分. 从而在本章一开始所讨论的不定积分的计算方法才具有实际意义.

上述公式也称为积分学的基本公式,经常写作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b$$

其中记号 $F(x)\Big|_a^b$ 就表示 $F(b)-F(a)$.

例 5 计算 $\int_1^2 x^2\mathrm{d}x$.

解 因为函数 $f(x)=x^2$ 在区间$[1,2]$上连续,而 $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ 是 $f(x)=x^2$ 的一个原函数,应用牛顿-莱布尼兹公式得到

$$\int_1^2 x^3\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\Big|_1^2 = \frac{7}{3}$$

这个结果与 3.2.1 的例 1 一致.

例 6 计算定积分 $\int_0^1 a^x\mathrm{d}x\ (a>0, a\neq 1)$.

解 因为

$$\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

故有

$$\int_0^1 a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a}\Big|_0^1 = \frac{1}{\ln a}(a-1)\ (a>0, a\neq 1).$$

例 7 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x$.

解 因为

$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$$

故有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x = (-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

例 8 利用定积分求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$$

解 由 3.2.1 的例 2 已得到它的定积分表达式

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1 = \arcsin\frac{1}{2}$$

但是,在应用牛顿-莱布尼兹公式时,一定要注意是否满足所需条件,即被积函数在积分区间上是否连续.若不连续就不能应用.

例如,$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$,由于$\frac{1}{x}$在积分区间$[-1,1]$上是无界函数,定积分存在的必要条件受到破坏,定积分当然不存在.若不小心就会犯这样的错误

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x|\Big|_{-1}^1 = 0$$

其原因是 $\ln|x|$ 在含点 $x=0$ 的积分区间$[-1,1]$上不是$\frac{1}{x}$的原函数.

又如$\int_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$,当 $|x|\leqslant 1$ 时,有 $1+x^2\geqslant 1+x^4$,即$\frac{1+x^2}{1+x^4}\geqslant 1$.由定积分的单调性知

$$\int_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x \geqslant \int_{-1}^1 \mathrm{d}x = 2$$

另外,若计算不定积分,有

$$\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{2+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)\Big/\sqrt{2}\right]+C$$

若不小心误用定积分的基本公式,有

$$\int_{-1}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{1} = 0$$

这个结果与前面作的估计值矛盾.而估计值是不会错的.毛病出在什么地方呢?实际上函数 $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{x}\right)$不是被积函数 $f(x)=(1+x^2)/(1+x^4)$在$[-1,1]$上的原函数.因为$F(x)$在点 $x=0$ 处是不连续的,即

$$F(0-0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{x}\right)= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$F(0+0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{x}\right)=-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

从而 $F(x)$在点 $x=0$ 处不可微.

实际上,$f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}$的一个原函数为

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\operatorname{arctg}\sqrt{2}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

故有

$$\int_{-1}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x = \Phi(x)\Big|_{-1}^{1} = \sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2} > 2$$

例 9 计算定积分$\int_1^3 |x-2|\,\mathrm{d}x$.

解 因为在$[1,2]$中,$|x-2|=-(x-2)$,而$[2,3]$中,$|x-2|=(x-2)$.故由定积分的性质,可分段计算,即有

$$\int_1^3 |x-2|\,\mathrm{d}x = \int_1^2 [-(x-2)]\mathrm{d}x + \int_2^3 (x-2)\mathrm{d}x = 1$$

3.3.3 定积分的换元法与分部积分法

应用牛顿-莱布尼兹公式计算定积分时，总把问题归结为先求被积函数的一个原函数 $F(x)$，然后再按 $F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$ 进行计算. 一般来说，把这两个步骤截然分开是比较麻烦的，有时甚至不大可能. 这是因为在某些情形中，原函数不能表示为初等函数. 为了简化计算及进一步解决定积分的计算问题，也为了以后理论上的需要. 下面介绍定积分的换元法和分部积分法.

（一）定积分的换元法

定理 1（定积分的换元法则） 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，而函数 $x=\varphi(t)$ 满足下列条件：

1. 当 t 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上变化时，有连续的微商 $\varphi'(t)$；

2. 代换 $x=\varphi(t)$ 所确定的值 x 全部含于区间 $[a,b]$ 内，且 $\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$. 则有定积分的换元公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

证 设 $\alpha<\beta$，因为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，故定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的原函数，由牛顿-莱布尼兹公式得到

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$$

另外，根据假设条件知，函数 $\varphi'(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续. 因此函数 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上也连续. 故在 $[\alpha,\beta]$ 上也有原函数. 由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F[\varphi(t)] = F'(x)\varphi'(t) = f(x)\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t)$$

因此，$F[\varphi(t)]$ 是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数. 由牛顿-莱布尼兹公

式,则有

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = F[\varphi(t)]\Big|_{\alpha}^{\beta} = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)]$$

$$= F(b) - F(a)$$

从而推出

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

对 $\alpha > \beta$ 的情形可同样证明.

不难看出,定积分的换元法实质上是把不定积分的换元法推广到定积分中,它与不定积分换元法的不同之处,就是在对 t 求出原函数后,不必再回到原来的变量 x,只要对新的变量应用牛顿-莱布尼兹公式就行了.

例 1 求定积分 $\int_{0}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x \ (a > 0)$.

解 令 $x = a\sin t$, $\mathrm{d}x = a\cos t\mathrm{d}t$, 且当 $x = 0$ 时, $t = 0$; 当 $x = a$ 时, $t = \frac{\pi}{2}$, 而

$$\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = |a\cos t| = a\cos t$$

于是,由换元公式,有

$$\int_{0}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\pi a^2$$

例 2 计算定积分 $\int_{0}^{a} \frac{1}{(a^2 + x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x \ (a > 0)$.

解 令 $x = a\mathrm{tg}t$, 当 $x = 0$ 时, $t = 0$; 当 $x = a$ 时, $t = \frac{\pi}{4}$, $\mathrm{d}x = a\sec^2 t\mathrm{d}t$ 而

$$(a^2 + x^2)^{3/2} = (a^2 + a^2\mathrm{tg}^2 x)^{3/2} = |a\sec t|^3 = a^3\sec^3 t,$$

由换元公式,有

$$\int_0^a \frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a^2}\cos t\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{a^2}$$

例 3 计算定积分 $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解 令 $x=\mathrm{tg}\varphi$,当 $x=0$ 时,$\varphi=0$;当 $x=1$ 时,$\varphi=\frac{\pi}{4}$,而 $\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$,

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \ln\left(\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)\\ &= \ln\left[\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\right)\right]-\ln\cos\varphi\\ &= \ln\sqrt{2}+\ln\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)-\ln\cos\varphi\end{aligned}$$

由换元公式,得到

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\ln\sqrt{2}+\ln\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)-\ln\cos\varphi\right]\mathrm{d}\varphi\\ &= \frac{\pi}{8}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\end{aligned}$$

若对上式右端第二项的定积分作代换 $\varphi=\frac{\pi}{4}-\psi$,则有

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\varphi &= -\int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln\sin\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)\mathrm{d}\psi\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos\psi\mathrm{d}\psi = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\end{aligned}$$

最后得到

$$I = \frac{\pi}{8}\ln 2$$

例 4 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\,\mathrm{d}x$,其中 m 为正整数.

证 要把等式左端的被积函数中的 $\sin x$ 与余弦函数联系起

来，自然想到作代换 $x=\frac{\pi}{2}-t$. 于是，当 $x=0$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$；$x=\frac{\pi}{2}$时，$t=0$，而 $\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t$，$\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$，故有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\cos^m t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\,\mathrm{d}x$$

例 5 设函数 $f(x)$在区间$[-l,l]$上定义且连续，

(1) 当 $f(x)$是奇函数时，则$\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x=0$；

(2) 当 $f(x)$ 是偶函数时，则$\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^l f(x)\mathrm{d}x$.

证 因为

$$\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-l}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_0^l f(x)\mathrm{d}x$$

令 $x=-t$，则有

$$\int_{-l}^{0}f(x)\mathrm{d}x=-\int_{l}^{0}f(-t)\mathrm{d}t=\int_0^l f(-t)\mathrm{d}t=\int_0^l f(-x)\mathrm{d}x$$

所以

$$\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^l[f(-x)+f(x)]\mathrm{d}x$$

(1) 若 $f(x)$是奇函数，即 $f(-x)=-f(x)$，而 $f(-x)+f(x)=0$，故有

$$\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x=0$$

(2) 若 $f(x)$是偶函数，即 $f(-x)=f(x)$，而 $f(-x)+f(x)=2f(x)$，故有

$$\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^l f(x)\mathrm{d}x$$

这个结论从几何上来看是十分明显的. 因为奇函数的图形关于原点对称，故它在区间$[-l,0]$与$[0,l]$上的两个曲边梯形位于 x 轴的两侧且面积相等. 因此这两个面积的代数和为零，而偶函数的图形关于 y 轴对称，所以它在$[-l,l]$上曲边梯形的面积自然应是

$[0,l]$上面积的两倍.

必须指出,在应用换元公式计算定积分时,若所作代换 $\omega(x)=t$ 的反函数 $x=\varphi(t)$ 是多值函数,就要注意恰当地选择多值函数的单值分支. 否则就会发生错误.

例如要计算定积分 $\int_{-1}^{1} x^2 \mathrm{d}x$,直接由定积分的基本公式算得它的正确值为$\frac{2}{3}$. 但若作代换 $t=x^2$,则当 $x=\pm 1$ 时,都有 $t=1$,所以有

$$\int_{-1}^{1} x^2 \mathrm{d}x = \int_{1}^{1} t \mathrm{d}\sqrt{t} = 0$$

这显然是错误的. 错误的原因在于未注意当 x 在区间$[-1,1]$上变化时,函数 $t=x^2$ 的反函数为 $x=\pm\sqrt{t}$是多值函数. 因此不能直接使用换元公式. 这时可作如下处理.

由 $x^2=t$,可得单值分支:

当 $x\in[0,1]$时,令 $x=\sqrt{t}$,有

$$t \in [0,1], x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{t}\mathrm{d}t;$$

当 $x\in[-1,0]$时,令 $x=-\sqrt{t}$,有

$$t \in [1,0], x^2 \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sqrt{t}\mathrm{d}t.$$

于是,有

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^2 \mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0} x^2 \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x^2 \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_{1}^{0}\sqrt{t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{0}^{1}\sqrt{t}\mathrm{d}t \\ &= \int_{0}^{1}\sqrt{t}\mathrm{d}t = \frac{2}{3}t^{3/2}\Big|_{0}^{1} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

或者采用另外的单值分支,例如

当 $x\in[0,1]$时,令 $x=\sqrt{t}$,有

$$t \in [0,1], x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{t}\mathrm{d}t;$$

当 $x\in[-1,0]$时，令 $x=-\sqrt{-t}$，有

$$t\in[-1,0], x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{-t}\mathrm{d}t.$$

于是，有

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x&=\int_{-1}^{0}x^2\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\sqrt{-t}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\sqrt{t}\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

（二）定积分的分部积分法

由计算不定积分的分部积分公式与牛顿-莱布尼兹公式，可得计算定积分的分部积分公式.

定理 2 设函数 $u(x)$与 $v(x)$在区间$[a,b]$上具有连续的一阶微商 $u'(x)$与 $v'(x)$，则有分部积分公式

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x$$

或者

$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)\mathrm{d}u(x)$$

证 因为$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$，根据假设条件可知，上式右端是$[a,b]$上的连续函数，所以左端的微商$[u(x)v(x)]'$也是连续函数. 由牛顿-莱布尼兹公式，则有

$$\begin{aligned}\int_a^b[u(x)v(x)]'\mathrm{d}x&=[u(x)v(x)]\Big|_a^b\\&=\int_a^b[u'(x)v(x)+u(x)v'(x)]\mathrm{d}x\\&=\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x+\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

移项后，得到所要证明的公式

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x=[u(x)v(x)]\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x$$

或写成

$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}v(x) = [u(x)v(x)]\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\mathrm{d}u(x)$$

注意:这个公式的每一项都带有积分限.不过,当具体使用分部积分法时,原函数中已求出的部分可立即用积分上、下限代入,以便使计算简化.

例 6 计算定积分 $\int_0^{\sqrt{3}} x\mathrm{arctg}x\mathrm{d}x$.

解 设 $u(x)=\mathrm{arctg}x, \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x$,代入公式,得到

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\mathrm{arctg}x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x\Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

例 7 设 m 为正整数,计算定积分

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,\mathrm{d}x$$

解 因为

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

今考虑 $m\geqslant 2$ 的情形,由分部积分法得到

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x\mathrm{d}(-\cos x)$$

$$= -\sin^{m-1} x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x\cos^2 x\mathrm{d}x$$

$$= (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}x$$

$$= (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x\mathrm{d}x - (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,\mathrm{d}x$$

或者有

$$I_m = (m-1)I_{m-2} - (m-1)I_m$$

于是得到计算 I_m 的递推公式

$$I_m=\frac{m-1}{m}I_{m-2}$$

易见，每用一次递推公式被积函数中 $\sin x$ 的幂次降低 2 次.

(1) 当 m 为偶数，即 $m=2n$ 时，应用递推公式得到

$$\begin{aligned}I_{2n}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,\mathrm{d}x=\frac{(2n-1)}{2n}\cdot\frac{(2n-3)}{(2n-2)}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\\&=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

(2) 当 m 为奇数，即 $m=2n+1$ 时，应用递推公式得到

$$\begin{aligned}I_{2n+1}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\,\mathrm{d}x=\frac{2n}{(2n+1)}\cdot\frac{(2n-2)}{(2n-1)}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1\\&=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\end{aligned}$$

其中 $(m)!!$ 表示不超过 m 且与 m 有相同奇偶性的所有自然数的乘积.

另外，根据例 4 可知，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\,\mathrm{d}x$$

因此，定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\,\mathrm{d}x$ 也有相同的结果. 故可统一地写成

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{(m-1)!!}{m!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } m \text{ 为偶数时}\\[2ex]\dfrac{(m-1)!!}{m!!}, & \text{当 } m \text{ 为奇数时}\end{cases}$$

这个公式在计算其他定积分时可以直接引用.

例 8 设 k 大于零，m 为正整数，计算定积分

$$H_m=\int_0^1 x^k\ln^m x\,\mathrm{d}x$$

解 因为

$$H_0=\int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x=\frac{1}{k+1}$$

今考虑 $m\geqslant 1$ 的情形. 根据分部积分法得到

$$\begin{aligned}H_m &= \frac{1}{k+1}\int_0^1 \ln^m x\,\mathrm{d}(x^{k+1})\\&= \frac{1}{k+1}x^{k+1}\ln^m x\Big|_0^1 - \frac{m}{k+1}\int_0^1 x^k\ln^{m-1}x\,\mathrm{d}x\\&= -\frac{m}{k+1}\int_0^1 x^k\ln^{m-1}x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

即

$$H_m = (-1)^1\,\frac{m}{k+1}H_{m-1}$$

这就是计算 $\int_0^1 x^k\ln^m x\,\mathrm{d}x$ 的递推公式，每用一次递推公式被积函数中的 $\ln x$ 的幂次降低一次. 于是，最后得到

$$H_m = (-1)^m\,\frac{m!}{(k+1)^m}H_0 = (-1)^m\,\frac{m!}{(k+1)^{m+1}}$$

复习思考题

1. 定积分有哪些基本性质?

2. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，函数 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积，问函数 $f(x)\pm g(x)$ 在 $[a,b]$ 上是否可积?

3. 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上都不可积，问 $f(x)+g(x)$ 和 $f(x)\cdot g(x)$ 在 $[a,b]$ 上是否不可积? 试举例说明.

4. 定积分与原函数有什么关系?

5. 既然一个以 x 为变上限的定积分是被积函数的原函数，那么能否说定积分与原函数的概念是相同的?

6. 哪一类函数有原函数，为什么?

7. 使用牛顿-莱布尼兹公式时，需要具备什么条件?

8. 下列定积分是否可利用牛顿-莱布尼兹公式? 错在哪里?

(1) $\int_0^\pi \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}x\Big|_0^\pi = 0$

(2) $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \left(-\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^1 = -\frac{\pi}{2}$

9. 使用定积分换元公式需要注意什么？如下例，定积分计算对吗？其错误原因是什么？

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+0.5\cos x}\mathrm{d}x \xlongequal[\text{令 }\operatorname{tg}\frac{x}{2}=y]{} \int_0^0\frac{2\mathrm{d}y}{(1+y^2)\left(1+0.5\cdot\dfrac{1-y^2}{1+y^2}\right)}=0$$

习题 3.3

1. 不计算，试比较下列积分的大小

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}x$

(2) $\int_1^2\ln x\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^2(\ln x)^2\mathrm{d}x$

(3) $\int_3^4\ln x\mathrm{d}x$ 与 $\int_3^4(\ln x)^2\mathrm{d}x$

(4) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 x\mathrm{d}x$

2. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加，证明

$$(b-a)f(a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant(b-a)f(b)$$

3. 证明下列各不等式

(1) $\int_0^{10}\frac{x}{x^3+16}\mathrm{d}x\leqslant\frac{5}{6}$

(2) $\int_0^{2\pi}|a\sin x+b\cos x|\mathrm{d}x\leqslant 2\pi\sqrt{a^2+b^2}$

(3) $\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x\leqslant\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}\quad(m>0,n>0)$

4. 估计下列积分值的范围

(1) $\int_0^2\frac{x^2+5}{x^2+2}\mathrm{d}x$ (2) $\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}x\operatorname{arctg}x\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+0.5\cos x}\mathrm{d}x$ (4) $\int_0^{100}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+100}\mathrm{d}x$

5. 证明：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)\geqslant 0\ (a\leqslant x\leqslant b)$，则

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$ 的充分必要条件是 $f(x)=0(a\leqslant x\leqslant b)$.

6. 证明:若函数 $f(x)$是区间$[a,b]$上的连续正值函数,则

$$e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\mathrm{d}x} \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

7. 计算下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b e^{-nx^2}\mathrm{d}x \quad 0<a<b$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x, \quad p>0$

8. 计算下列微商

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \sin(t^2)\mathrm{d}t$

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sqrt{\ln x}}^{x} e^{-t^2}\mathrm{d}t$

(4) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

9. 对下列函数的参数方程,求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

(1) $\begin{cases} x=\int_0^t \sin t\mathrm{d}t \\ y=\int_0^t \cos t\mathrm{d}t \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=\int_1^{t^2} t\ln t\mathrm{d}t \\ y=\int_{t^2}^1 t^2\ln t\mathrm{d}t \end{cases}$

10. 试求函数 $y=\int_0^x (x-1)(x-2)^2\mathrm{d}x$ 图形的极值点和扭转点.

11. 设 $f(x)$是连续正值函数,证明当 $x\geqslant 0$ 时,函数

$$\varphi(x)=\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\bigg/\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

严格增.

12. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos^2 t\mathrm{d}t}{x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin(t^3)\mathrm{d}t}{x^4}$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x (\mathrm{arctg}t)^2\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\mathrm{d}t}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\int_0^{\sin x}\dfrac{\operatorname{arctg}(u^2)}{u}\mathrm{d}u$　　(6) $\lim\limits_{a\to 1}\dfrac{\int_{2a-1}^{a^2}e^{x^2}\mathrm{d}x}{(a-1)^2}$

13. 用牛顿-莱布尼兹公式计算下列定积分

(1) $\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$　　(2) $\int_0^1 e^x\mathrm{d}x$

(3) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$　　(4) $\int_2^3\dfrac{1}{2x^2+3x-2}\mathrm{d}x$

(5) $\int_{\mathrm{sh}1}^{\mathrm{sh}2}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$　　(6) $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\mathrm{d}x$

(7) $\int_0^2|x-1|\mathrm{d}x$　　(8) $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x$

(9) $\int_0^x\operatorname{sgn}x\mathrm{d}x$　　(10) $\int_e^{e^3}\dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x$

(11) $\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$,其中 $f(x)=\begin{cases}1, 当\ |x|\leqslant L\\ 0, 当\ |x|>L\end{cases}$

14. 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & -1\leqslant x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$　求 $F(x)=\int_{-1}^x f(x)\mathrm{d}x$,并求 $\dfrac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$.

15. 若 m,n 为正整数,证明

(1) $\int_0^{2\pi}\sin mx\cos nx\mathrm{d}x=0$

(2) $\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\sin mx\sin nx\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & 当\ m\neq n\\ \pi, & 当\ m=n\end{cases}$

16. 确定下列积分的符号

(1) $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2\ln x\mathrm{d}x$　　(2) $\int_{-2}^3 x^3 2^x\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^{2\pi}x\sin x\mathrm{d}x$　　(4) $\int_0^{2\pi}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

17. 设 n 为正整数,证明

(1) $\int_0^{\pi}\sin^n x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$

(2) $\int_0^{\pi}\cos^{2n}x\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}x\,\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^{\pi}\cos^{2n+1}x\,\mathrm{d}x = 0$

(4) $\int_0^{2\pi}\sin^{2n+1}x\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\cos^{2n+1}x\,\mathrm{d}x = 0$

(5) $\int_0^{2\pi}\sin^{2n}x\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\cos^{2n}x\,\mathrm{d}x = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,\mathrm{d}x$

18. 计算下列积分

(1) $\int_0^{\ln 2} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$　　(2) $\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x$　　(4) $\int_0^1 \frac{\sqrt{\mathrm{e}^x}}{\sqrt{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}}\,\mathrm{d}x$

(5) $\int_a^x \ln(t+\sqrt{t^2+a^2})\,\mathrm{d}t\,(a>0)$

(6) $\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x$　　(7) $\int_1^{\mathrm{e}} \ln^3 x\,\mathrm{d}x$

(8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+2\cos t}\,\mathrm{d}t$

19. 利用 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x$ 的递推公式计算下列定积分

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,\mathrm{d}x$　　(2) $\int_0^{\pi}\cos^8 x\,\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^{11} x\,\mathrm{d}x$　　(4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^7 2x\,\mathrm{d}x$

(5) $\int_0^{\pi}\sin^6 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$　　(6) $\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}\,\mathrm{d}x$

(7) $\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x$　　(8) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$

20. 用分部积分法证明下列积分的递推公式

(1) $I_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,\mathrm{d}x$

$$= \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } m,n \text{ 全为偶数} \\ \dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}, & \text{当 } m,n \text{ 不全为偶数} \end{cases}$$

(2) $I_n=\int_{-1}^{0}x^n e^x \mathrm{d}x=(-1)^n n!\left(1-\mathrm{e}^{-1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$

21. 证明

$$\int_x^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t\ (x>0)$$

22. 证明

$$\int_0^a x^3 f(x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{a^2}xf(x)\mathrm{d}x\ (a>0)$$

23. 设 $f(x)$为具有周期 T 的连续函数,证明

$$\int_0^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x,$$

并说明这个等式的几何意义.

24. 利用函数的奇偶性计算下列定积分

(1) $\int_{-5}^{5}\frac{x^3\sin^2 x}{(x^4+2x^2+1)}\mathrm{d}x$　　(2) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}x^4\sin x\mathrm{d}x$　　(4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos^4\theta\mathrm{d}\theta$

(5) $\int_{-1}^{1}x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$

25. 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续,证明

$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x$$

并且用所得结果计算积分 $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$

26. 设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^n x\mathrm{d}x$,证明

(1) $I_n+I_{n-2}=\frac{1}{n-1}$

(2) $\frac{1}{2n+2}<I_n<\frac{1}{2n-2}$

27. 计算下列定积分

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|ab|}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x\quad(ab\neq 0)$

(2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$　　(3) $\int_0^a\frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x\ (a>0)$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \sin 3x \mathrm{d}x$ (5) $\int_0^{\ln 2} \mathrm{sh}^4 x \mathrm{d}x$

(6) $\int_0^{\pi} (x\sin x)^2 \mathrm{d}x$ (7) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\mathrm{tg} x}\mathrm{d}x$

(8) $\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}\mathrm{d}\theta$ (n 是正整数)

(9) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x$ (10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\mathrm{tg} x)^{100}}\mathrm{d}x$

(11) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\cos^2\theta+\sin^3\theta)^2}\mathrm{d}\theta$ (12) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\cos x}\mathrm{d}x$

28. 试证积分$\int_0^{\pi} \frac{\sec^2 x}{2+\mathrm{tg}^2 x}\mathrm{d}x$ 介于$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$之间,并求其值.

29. 证明若 $f(x)$ 是在有界闭区间$[a,b]$上的正值连续函数,且在这区间上的最大值为 M,则有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x} = M$$

30. 若 $f(x)$在$[0,1]$上有连续的导函数,证明

$$\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x+\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x \geqslant |f(0)|$$

31. 设 $0<a<b$, 且 $a_i=\left(1-\frac{i}{n}\right)a+\frac{i}{n}b, i=1,2,\cdots,n$,试求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$

3.4 定积分的近似计算

牛顿-莱布尼兹公式在定积分计算中发挥了巨大作用.但是应用它来计算定积分时必须具备两个条件:(1) 被积函数在积分区间上连续;(2) 事先要知道被积函数的原函数,然而绝大多数的被积函数都不会同时具备这两个条件.有的仅可积,特别是在许多实际问题中被积函数常常用曲线或表格给出,根本写不出它的解析

表达式；有的虽然连续，而原函数又不能用初等函数来表示，或者能用初等函数表示又十分复杂.在这些情况下都不能应用牛顿-莱布尼兹公式.因此需要考虑按实际问题给出的精度要求，对定积分作近似计算.

实际上，定积分的定义已给我们提供了进行近似计算的方法，一般来说，直接按定积分的定义作近似计算，即所谓矩形法，误差较大，计算量也大.为此根据定积分是积分和的极限的思想，改进积分和的结构，达到不仅减少计算量，而且要能提高精度，还要容易掌握误差的上界.

3.4.1 梯　形　法

我们知道，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示由曲线 $y=f(x)$，x 轴及直线 $x=a$，$x=b$ 所围成的曲边梯形的面积，若能近似地算出这个面积，那就是说已近似地算出了积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.用分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$ 把区间 $[a,b]$ 分成 n 等分，而 $x_i-x_{i-1}=\dfrac{b-a}{n}$，$i=1,2,\cdots,n$.过各分点作平行于 y 轴的直线与曲线交于点 M_0，M_1，$\cdots$，M_{i-1}，M_i，$\cdots$，M_n.这些交点的纵坐标记为

$$y_i=f(x_i),\ i=0,1,2,\cdots,n$$

而原来的曲边梯形也被分成了 n 个小曲边梯形.考虑第 i 个小曲边梯形，它的曲边是曲线 $y=f(x)$ 的弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$.若把区间分得足够细，这个小弧段就可近似地看成是弦 $M_{i-1}M_i$.于是第 i 个曲边梯形可以近似地用直边梯形 $M_{i-1}x_{i-1}x_iM_i$ 来代替(图 3.6).因此，所谓梯形法是

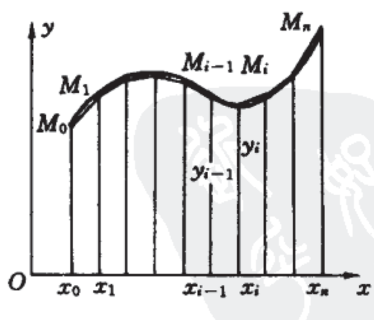


图 3.6

用曲线上两点的弦近似代替小弧段来计算定积分的方法，或者说在所给的小区间$[x_{i-1},x_i]$上，直线上有两点的函数值与曲线上的函数值相同. 连接曲线上相邻两点$M_{i-1}(x_{i-1},y_{i-1})$与$M_i(x_i,y_i)$，$i=1,2,\cdots,n$的直线方程为

$$\bar{y}-y_{i-1}=\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}(x-x_{i-1})$$

今用直线$\bar{y}=y_{i-1}+\dfrac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}(x-x_{i-1})$来代替曲线弧$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$时，第$i$个小曲边梯形的面积近似地为

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\mathrm{d}x\approx\int_{x_{i-1}}^{x_i}\bar{y}\mathrm{d}x=\frac{y_i+y_{i-1}}{2}\cdot\frac{b-a}{n},i=1,2,\cdots,n$$

从而n个直边小梯形的面积之和为

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i)-1}}^{x_i}\bar{y}\mathrm{d}x&=\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i+y_{i)-1}}{2}\cdot\frac{b-a}{n}\\&=\frac{b-a}{2n}\sum_{i=1}^{n}(y_i+y_{i-1})\\&=\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}y_i+\frac{y_n}{2}\right)\end{aligned}$$

故有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}y_i+\frac{y_n}{2}\right)$$

或

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{i=0}^{n}A_iy_i=\sum_{i=0}^{n}A_if(x_i)$$

其中$A_0=\dfrac{b-a}{2n},A_i=\dfrac{b-a}{n},i=1,2,\cdots,n-1,A_n=\dfrac{b-a}{2n}$，这就是近似计算定积分的梯形公式.

可以证明：若函数$f(x)$在$[a,b]$上存在连续的二阶微商，且对任意的$x\in[a,b]$有$|f''(x)|\leqslant M_2$，则梯形公式的误差不超过

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2$$

其中 M_2 是 $f''(x)$在$[a,b]$上的最大值. 由此可见,分点取得越多. 即 n 越大,误差就越小. 它是与$\frac{1}{n^2}$同阶的无穷小量. 因此若给误差限度是正数 ε,要使

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2 < \varepsilon$$

只要等分$[a,b]$的小区间的个数 $n > \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12\varepsilon}M_2}$ 就行了.

例 1 设有 20 米宽的河,从河的一岸到对岸每隔 2 米测得河深为 0.2,0.5,0.9,1.1,1.3,1.7,2.1,1.5,1.1,0.6,0.2 米. 试求河流横截面的面积 A 的近似值.

解 把河流横截面的底边看成曲线 $y=f(x)$,则所求面积为

$$A=\int_0^{20} f(x)\mathrm{d}x.$$

由题设可得下列数据:

x(宽)/米	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
y(深)/米	0.2	0.5	0.9	1.1	1.3	1.7	2.1	1.5	1.1	0.6	0.2

利用梯形公式,由于 $n=10$,$\frac{b-a}{n}=2$,因此

$$A=\int_0^{20} f(x)\mathrm{d}x \approx 2\Big(\frac{0.2+0.2}{2}+0.5+0.9+1.1+1.3$$

$$+1.7+2.1+1.5+1.1+0.6\Big)=22(\text{米}^2)$$

3.4.2 抛物线法

前面已指出,梯形法是在所分成的小区间$[x_{i-1},x_i]$上用直线,即 x 的一次多项式$\bar{y}$去近似代替函数 $y=f(x)$. 当然一般来说这种代替是比较粗糙的,因为这时通过曲线 $f(x)$只有两点. 我们

自然会想到，若在小区间上用通过曲线 $f(x)$ 上三个点的抛物线来近似代替函数 $y=f(x)$. 应该可以得到具有更好精确性的近似公式. 这就是抛物线法的基本想法. 设抛物线的一般形式为

$$L_2(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$$

其中 α,β,γ 是常数. 已知通过平面上的三点可唯一确定一条抛物线，即过已知三点可得到三个二次方程，由它们可唯一确定三个系数 α,β,γ. 但要直接这样求解 α,β,γ 较繁. 为此下面介绍一种简便方法.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，把区间 $[a,b]$ 分成 $2n$ 等分，分点是

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{2n-1}<x_{2n}=b$$

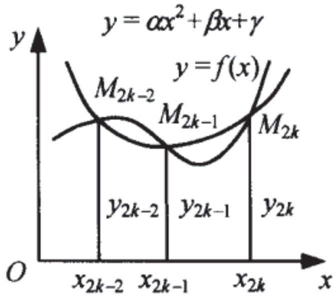


图 3.7

其中 $x_i-x_{i-1}=\dfrac{b-a}{2n}, i=1,2,\cdots,2n$，各个分点的纵坐标为 $y_i=f(x_i)$，$i=0,1,2,\cdots,2n$. 从 $2n$ 个小区间中取出一对相邻的小区间 $[x_{2i-2},x_{2i-1}]$ 与 $[x_{2i-1},x_{2i}]$，在它们连接起来的整个区间 $[x_{2i-1},x_{2i}]$ 上，用通过给定曲线上的三点 $M_{2i-2}(x_{2i-2},y_{2i-2})$，$M_{2i-1}(x_{2i-1},y_{2i-1})$ 及 $M_{2i}(x_{2i},y_{2i})$ 的抛物线：

$$L_2(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$$

来近似代替在区间 $[x_{2i-2},x_{2i}]$ 上的曲线 $y=f(x)$(图 3.7). 于是抛物线下的面积为

$$\begin{aligned}\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\mathrm{d}x &\approx \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}}(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\mathrm{d}x\\ &=\frac{\alpha}{3}(x_{2i}^3-x_{2i-2}^3)+\frac{\beta}{2}(x_{2i}^2-x_{2i-2}^2)\\ &\quad+\gamma(x_{2i}-x_{2i-2})\\ &=\frac{(x_{2i}-x_{2i-2})}{6}[2\alpha(x_{2i}^2+x_{2i}x_{2i-2}+x_{2i-2}^2)\end{aligned}$$

$$+3\beta(x_{2i}+x_{2i-2})+6\gamma]$$

$$=\frac{(x_{2i}-x_{2i-2})}{6}[(\alpha x_{2i}^2+\beta x_{2i}+\gamma)$$

$$+(\alpha x_{2i-2}^2+\beta x_{2i-2}+\gamma)+\alpha(x_{2i}+x_{2i-2})^2$$

$$+2\beta(x_{2i}+x_{2i-2})+4\gamma]$$

但是

$$x_{2i-2}+x_{2i}=2x_{2i-1}$$

以及

$$\alpha x_{2i}^2+\beta x_{2i}+\gamma=y_{2i}$$
$$\alpha x_{2i-1}^2+\beta x_{2i-1}+\gamma=y_{2i-1}$$
$$\alpha x_{2i-2}^2+\beta x_{2i-2}+\gamma=y_{2i-2}$$

代入上面的等式,得到

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}}(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\mathrm{d}x=\frac{(x_{2i}-x_{2i-2})}{6}(y_{2i-2}+4y_{2i-1}+y_{2i})$$
$$=\frac{(b-a)}{6n}(y_{2i-2}+4y_{2i-1}+y_{2i})$$

将 i 从 1 到 n 相加,得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}}f(x)\mathrm{d}x$$
$$\approx\frac{(b-a)}{6n}\sum_{i=1}^{n}(y_{2i-2}+4y_{2i-1}+y_{2i})$$
$$=\frac{(b-a)}{6n}\left(y_0+4\sum_{i=1}^{n}y_{2i-1}+2\sum_{n=1}^{n-1}y_{2i}+y_{2n}\right)$$

或者

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}}L_2(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{2n}A_k y_k$$

其中

$$A_0=\frac{(b-a)}{6n},\ A_{2k-1}=\frac{2(b-a)}{3n},\ k=1,2,\cdots,n$$

$$A_{2k}=\frac{(b-a)}{3n},\ k=1,2,\cdots,n-1,\ A_{2n}=\frac{(b-a)}{6n}$$

这就是近似计算定积分的抛物线公式或辛普生(Simpson)公式.

可以证明:若函数 $f(x)$在$[a,b]$上存在连续的四阶微商,且对任意的 $x\in[a,b]$,有$|f^{(4)}(x)|\leqslant M_4$,则抛物线公式的误差不超过

$$\frac{(b-a)^5}{2880n^4}M_4$$

其中 M_4 是函数$|f^{(4)}(x)|$在区间$[a,b]$上的最大值.当分点无限增多时,这个误差是与$\frac{1}{n^4}$同级的无穷小量.由此可见,用抛物线法来作积分的近似计算一般说来要比用梯形法精确得多.

例 2 应用抛物线公式,计算积分 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$, 使精确到0.0001.

解 首先估计 M_4,求出函数 e^{-x^2} 的四阶微商后可知

$$|f^{(4)}(x)|=|(e^{-x^2})^{(4)}|=|16x^4-48x^2+12|e^{-x^2}$$

当 $x\in[0,1]$时,$|e^{-x^2}|\leqslant 1$,故有

$$|f^{(4)}(x)|\leqslant 4|4x^4-12x^2+3|$$

令 $g(x)=4x^4-12x^2+3$,则有

$$g'(x)=16x^3-24x=8x(2x^2-3)\leqslant 0, x\in[0,1]$$

故 $g(x)$在区间$[0,1]$上单调不增,当 $x\in[0,1]$时,有

$$|g(x)|\leqslant \max\{|g(0)|,|g(1)|\}=\max(3,5)=5$$

从而推出

$$|f^{(4)}(x)|\leqslant 4|g(x)|\leqslant 20,\ x\in[0,1]$$

因此用抛物线公式计算所给的积分时,其误差不超过

$$\frac{1}{2880n^4}\cdot 20<0.0001$$

即

$$2n\geqslant\sqrt[4]{\frac{10000}{9}}=\frac{10}{3}\sqrt[4]{9}$$

只须取 $n=5$.把区间$[0,1]$分成十等分,各分点及相应的函数值可列成下表:

i	0	1	2	3	4	5
x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y	1.00000	0.99005	0.96079	0.91393	0.85214	0.77880

6	7	8	9	10
0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.69768	0.61263	0.52729	0.44486	0.36788

于是由抛物线公式,得

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x^2}\,dx &\approx \frac{1}{30}[y_0+y_{10})+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)\\&\quad+2(y_2+y_4+y_6+y_8)]\\&=\frac{1}{30}(1.36788+4\times 3.74027+2\times 3.03790)\\&=0.746825\end{aligned}$$

关于定积分 $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ 的值已经编制成表.查表可得

$$\int_0^x e^{-x^2}\,dx = 0.746823$$

如果要求精确仍到 0.0001,并采用梯形法来作近似计算.直接算出函数 e^{-x^2} 的二阶微商后可知它的绝对值不超过 2,因此用梯形公式计算所给积分时,其误差不超过$\frac{2}{12n^2}$.若要

$$\frac{2}{12n^2}<0.0001$$

要取 $n=41$ 才行.可见计算量比用抛物线法至少大 4 倍.

3.4.3 机械求积公式

通过前面介绍的梯形法与抛物线法的公式可以看出,定积分的近似计算就是把积分区间$[a,b]$分成若干个相等的小区间,在每个小区间内都用近似函数去代替原来的被积函数 $f(x)$,并在若干

个分点上使近似函数的函数值与 $f(x)$ 在这些分点的值一致. 所导出的近似计算公式,通常总是以各个分点的函数值 $f(x_i)=y_i$ 乘以一定的系数,并取总和构成一个线性表达式,即一般的求积公式总可归结为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i y_i = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

其中 $A_i(i=0,1,\cdots,n)$ 称为求积系数.

由于求积系数 A_i 仅与分点 x_i 的选取有关,且不依赖于被积函数 $f(x)$ 的具体形式,例如对于梯形公式的求积系数为 $A_0=(b-a)/2n, A_i=(b-a)/n, i=1,2,\cdots,n-1, A_n=(b-a)/2n$;对于抛物线公式有求积系数 $A_0=(b-a)/6n, A_{2i-1}=2(b-a)/3n, i=1,2,\cdots,n, A_{2i}=(b-a)/3n, i=1,2,\cdots,n-1, A_{2n}=(b-a)/6n$. 因此这样的求定积分的计算公式具有一般性. 通常称这类求积方法为机械求积法. 其特点是直接利用某些分点上的函数值计算积分值,而将求积分值的问题机械地归结为函数值的计算问题,从而回避了牛顿-莱布尼兹公式需要寻求原函数的困难.

在梯形法中,把 $[a,b]$ n 等分,并将被积函数 $f(x)$ 在每个小区间内用线性函数 a_0x+a_1 代替,即小区间上有两个不同分点的线性函数值与被积函数 $f(x)$ 在这两个分点的值相同;在抛物线法中,把 $[a,b]$ $2n$ 等分,并在每两个相邻的小区间内用二次函数 $a_0x^2+a_1x+a_2$ 来近似代替 $f(x)$,即在两个相邻的小区间上有三个不同分点的二次函数值与被积函数 $f(x)$ 的值一致.

一般来说,是否存在 n 次多项式函数

$$L(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

使它在小区间上有 $n+1$ 个不同分点的函数值与已知的被积函数的函数值相同呢? 这种 n 次多项式函数是存在的,并且可以构造出来.

为了简单起见,我们就在区间 $[a,b]$ 上来构造这种函数. 设已给出函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上互不相同的点 x_i,及其函数值

$f(x_i), i=0,1,2,\cdots,n$,今要作一个 n 次多项式 $L(x)$,使得

$$L(x_i) = f(x_i), i = 0,1,2,\cdots,n$$

且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \int_a^b L(x)\mathrm{d}x$$

试问 $L(x)$如何构造?

为此,先来考虑$(n+1)$个 n 次多项式 $l_k(x), k=0,1,2,\cdots,n$,通常称它们为插值基函数. 它们满足条件:

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}$$

这就是说,除点 x_k 之外,一切分点都是插值基函数 $l_k(x)$的实根,故应有形式

$$\begin{aligned} l_k(x) &= c(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n) \\ &= c\prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n}(x-x_i) \end{aligned}$$

其中 c 是待定常数,$\prod$ 表示连乘符号.

由于 $l_k(x_k)=1$,故有

$$1 = c\prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n}(x_k-x_i)$$

即

$$c = \left[\prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n}(x_k-x_i)\right]^{-1}$$

从而得到

$$l_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}, k = 0,1,2,\cdots,n$$

这就是在区间$[a,b]$上的 n 次插值基函数. 利用它再乘以相应的系数 $f(x_k)$,并对 k 求和,就得到所求的 n 次多项式

$$L(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)l_k(x)$$

且有

$$L(x_i)=\sum_{k=0}^{n}f(x_k)l_k(x_i)=f(x_i)l_i(x_i)=f(x_i),i=0,1,2,\cdots,n$$

故 $L(x)$ 正是满足条件的 n 次多项式,并称它为拉格朗日插值多项式,而条件 $L(x_i)=f(x_i),i=0,1,2,\cdots,n$,称为插值条件.

由于多项式 $L(x)$ 的定积分是容易求得的,因此可用 $\int_a^b L(x)\mathrm{d}x$ 作为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的近似值,则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\int_a^b L(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n}f(x_k)\int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x$$

令求积系数

$$A_k=\int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x$$

就得到了我们要求的机械求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)=\sum_{k=0}^{n}A_ky_k$$

易见,对于给定的被积函数 $f(x)$,由于分点 x_k 可以有各种不同的取法,这个求积公式就存在很多的形式.因此如何选取这些分点 x_k 以使机械求积后达到预先指定的精确度.就是非常值得研究的问题.这里就不再继续讨论了.

复习思考题

1. 定积分近似计算法的基本思想是什么?
2. 何谓机械求积公式?

习题 3.4

1. 已知 $\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$,试用抛物线法计算 π 的近似值,精确到 10^{-4}.

2. 根据辛普生公式,用下表所列的函数值,计算定积分 $\int_{1.05}^{1.35}f(x)\mathrm{d}x$ 的近

似值.

x	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35
$f(x)$	2.36	2.50	2.74	3.04	3.46	3.98	4.60

3. 计算 $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$,精确到 0.001.

4. 利用辛普生公式计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx$, $(n = 10)$.

3.5 定积分的应用

前面我们把求曲边梯形的面积与变速运动的路程等问题,都归结为计算黎曼和的极限,并由此建立了定积分的理论. 本节要介绍它在几何、物理及力学等方面的一些应用,并用定积分解决实际问题. 学习本节,读者固然需要记住一些公式以便应用,但更重要的是学会用定积分去解决这些问题的思想方法. 即除了会如何把它们化成一个黎曼和的极限之外,还要掌握如何找微元,从而通过积分的计算加以解决.

3.5.1 微元分析法

根据建立定积分概念时所讨论过的曲边梯形的求积问题,以及求作变速运动的物体走过的路程问题的分析可以看出. 利用定积分解决实际问题的方法是将欲求的几何量或物理量经过分割、近似、求和与取极限四个步骤,归结为黎曼和的极限. 但是,一旦掌握了定积分应用的这些基本原则之后,在处理具体问题时就可按照比较简单的方式来进行,而无须每次重复这种过程. 进一步分析发现由定积分所表达的量有两个共同特点:第一所求的未知量或整体量 Q 依赖于某个区间 $[a,b]$ 上的变量 x;第二未知量 Q 在区间 $[a,b]$ 上具有可加性,即若将区间 $[a,b]$ 分成若干个小区间后,所求的未知量 Q 是对应的各个小区间上局部量 ΔQ_i 的和. 于是可用

下述方法求得未知量 Q.

对于一个具体的实际问题,关键在于如何把它化为数学问题.为此必须在有关的物理概念清楚的条件下,先选定积分变量,并确定积分区间,即弄清积分变量的变化范围.然后在积分区间上取有代表性的任一小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$.考虑未知量 Q 相应的改变量或局部量 ΔQ,并将它近似地表达成

$$\Delta Q \approx f(x)\mathrm{d}x$$

以使 $f(x)\mathrm{d}x$ 与 ΔQ 之差是一个比 $\mathrm{d}x$ 高级的无穷小量,并称 $f(x)\mathrm{d}x$为未知量 Q 的微元(微小元素),也就是从局部量 ΔQ 中分离出它的主要部分来,故有

$$\mathrm{d}Q = f(x)\mathrm{d}x$$

再求这些微元在$[a,b]$上的"无限叠加",即求 $\mathrm{d}Q$ 从 a 到 b 的定积分,便可得到未知量 Q,则有

$$Q = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

于是解决问题的关键是在微小的局部上进行分析,寻找正确的微元表达式 $\mathrm{d}Q=f(x)\mathrm{d}x$.这种分析问题的方法叫做微元分析法,简称为微元法.

3.5.2 平面图形的面积

一般来说,平面上一个由封闭曲线所围成的图形总可以分解成几个曲边梯形,而每个曲边梯形的面积都可以归结成定积分的计算,再把这些面积相加就得到所求平面图形的面积.但在实用上,常分成以下几种情形进行讨论.

(一) 在直角坐标系中的计算法

设曲线 $y=f(x)\geqslant 0$.由曲线 $y=f(x)$,x 轴及直线 $x=a$,$x=b$所围成的曲边梯形的面积已知为

$$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b y\mathrm{d}x$$

若在区间$[a,b]$上曲线 $y=f(x)\leqslant 0$,即曲线 $y=f(x)$在 x 轴

下方. 那么定积分的值也将小于或等于零,而相应的曲边梯形的面积就等于这个定积分的绝对值,即

$$A=\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$$

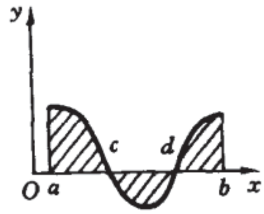


图 3.8

若在区间$[a,b]$上,曲线 $y=f(x)$变号. 就可把这个区间分成一些小区间,使 $f(x)$ 在每个小区间上符号不变. 例如(图 3.8)的情形,在区间$[a,c]$与$[d,b]$上 $f(x)\geqslant 0$,而在区间$[c,d]$上 $f(x)\leqslant 0$. 所以图形的面积应为

$$A=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x-\int_c^d f(x)\mathrm{d}x+\int_d^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

若图形由曲线 $y=f_1(x)$与 $y=f_2(x)$及直线 $x=a,x=b$ 所围成(图 3.9),则它的面积为

$$A=\int_a^b |f_1(x)-f_2(x)|\mathrm{d}x$$

实际上,在 x 的变化区间$[a,b]$内,任取一个小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$,对应的小曲边梯形可以近似地看成小矩形,其高 h 为

$$h=|f_1(x)-f_2(x)|,\ a\leqslant x\leqslant b$$

故面积 A 的微元为

$$\mathrm{d}A=|f_1(x)-f_2(x)|\mathrm{d}x$$

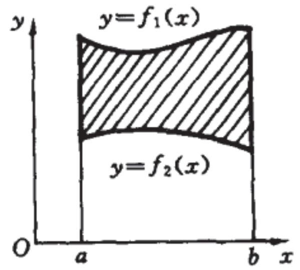


图 3.9

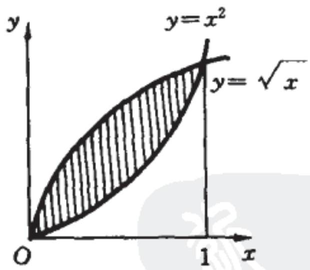


图 3.10

在$[a,b]$上进行积分,得到

$$A=\int_a^b |f_1(x)-f_2(x)|\mathrm{d}x$$

类似地，由曲线 $x=\psi_1(y)$ 与 $x=\psi_2(y)$ 及直线 $y=c, y=d$ 围成的图形的面积 A 为

$$A=\int_c^d |\psi_1(y)-\psi_2(y)|\mathrm{d}y$$

例 1 求由曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 $y=x^2$ 所围成的图形的面积.

解 作出 $y=\sqrt{x}$ 与 $y=x^2$ 的图形(图 3.10)，并从方程 $\sqrt{x}=x^2$ 求出两条曲线交点的横坐标为 $x_1=0, x_2=1$. 利用前面的公式，得到

$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

例 2 求由曲线 $y=x^2$ 与 $y=\frac{1}{4}x^2$，$y=1$ 围成的平面图形的面积.

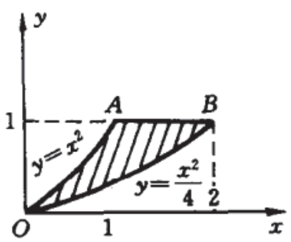


图 3.11

解 作出图形如图 3.11. 从对称性可知，面积 S 为第一象限内图形面积 A_1 的二倍.

易见，取 y 为积分变量计算较方便，且两条曲线交点的纵坐标为 $y_1=0, y_2=1$，由前面的公式，得

$$S=2\int_0^1(2\sqrt{y}-\sqrt{y})\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^1\sqrt{y}\mathrm{d}y=\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{4}{3}$$

若取 x 为积分变量. 这时图形的上面边界线由方程不同的两部分曲线组成. 因此应把图形也分成两部分来计算. 在图 3.11 中，曲线 $\overset{\frown}{OA}$ 的方程为 $y=x^2$，而线段 AB 的方程为 $y=1$，且点 $A(1,1)$，点 $B(2,1)$. 故有

$$S=2\left[\int_0^1\left(x^2-\frac{1}{4}x^2\right)\mathrm{d}x+\int_1^2\left(1-\frac{1}{4}x^2\right)\mathrm{d}x\right]$$

$$=2\left(\frac{1}{4}x^3\Big|_0^1+1-\frac{1}{12}x^3\Big|_1^2\right)=\frac{4}{3}$$

因此，在处理一个积分问题时，若能选取不同的积分变量，则应选择较为简便的那个积分变量.

（二）在极坐标系中的计算法

由于有些平面图形的边界曲线用极坐标方程表示较简便，因此应讨论这种计算法.

设曲线是由极坐标方程

$$r = f(\theta), \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$$

给出，其中 $f(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续，要求出这条曲线与射线 $\theta=\alpha, \theta=\beta$ 所围成的曲边扇形的面积(图 3.12).

在区间 $[\alpha, \beta]$ 内任取一个小区间 $[\theta, \theta+\mathrm{d}\theta]$，在这小区间上，用小圆弧 $r=f(\theta)$ 代替小曲线弧. 从几何学知道，半径为 r，中心角为 $\mathrm{d}\theta$ 的圆扇形的面积，即面积微元为

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2} r^2 \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}[f(\theta)]^2 \mathrm{d}\theta$$

今将 $\mathrm{d}A$ 从 α 到 β 积分，有

$$A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2 \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f(\theta)]^2 \mathrm{d}\theta$$

这就是界于极坐标方程 $r=f(\theta)$ 所对应的曲线及射线 $\theta=\alpha, \theta=\beta$ 之间的面积的计算公式.

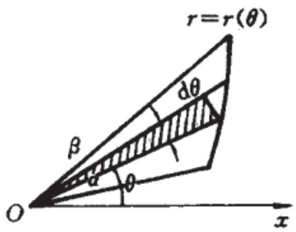


图 3.12

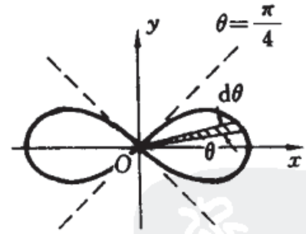


图 3.13

例 3 计算双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta$，$(a>0)$ 所围成的图形的面积(图 3.13).

解 由对称性可知，若设所求图形的面积为 A，则

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}r^2 \mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\theta \mathrm{d}\theta = a^2 \sin 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2$$

从极坐标系下的面积公式可得参数方程下的面积公式. 设平面图形由闭曲线 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$ 围成, 其中 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 有连续的一阶微商, 且 $\varphi(t_0)=\varphi(T)$, $\psi(t_0)=\psi(T)$. 因为

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & (x,y)\text{ 在一、三象限} \\ \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}, \dfrac{3\pi}{2} - \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}, & (x,y)\text{ 在二、四象限} \end{cases}$$

当 $r>0$ 时, 由复合函数的微商法则, 总有

$$\theta'_t = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{y'_t x - x'_t y}{x^2 + y^2}$$

故得

$$\frac{1}{2}r^2 \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}(y'_t x - x'_t y)\mathrm{d}t$$

因 $r=0$, 有 $x=0$, $y=0$. 从而导出, 上式对 $r \geqslant 0$ 成立. 于是, 平面图形的面积公式为

$$A = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} [\psi'(t)\varphi(t) - \varphi'(t)\psi(t)]\mathrm{d}t$$

注意　采用上述面积公式时, 要求极角 θ 按反时针方向自 α 到 β, 而在所给闭曲线上的点 $(x,y)=(\varphi(t),\psi(t))$, 在参数 t 由 t_0 变到 T 时绕此闭曲线按反时针方向移动, 否则将相差个负号.

例 4　求椭圆 $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ 的面积.

解　应用由参数方程给出的闭曲线所围成的图形的面积公式得

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos t \cdot b\cos t + a\sin t \cdot b\sin t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = \pi ab$$

3.5.3 平面曲线的弧长

（一）弧长的概念

在初等几何学中，圆的周长是作为内接正多边形的周长当边数无限增加时的极限值. 这种确定圆周长的思想方法可用来建立一般的平面曲线弧的长度概念.

定义 设曲线的起点为 A，终点为 B. 在曲线弧$\overset{\frown}{AB}$上任取分点，$M_0=A,M_1,\cdots,M_{i-1},M_i,\cdots M_n=B$，依次作弦将相邻的两点联结起来，得到一条内接折线. 每条弦的长度记为$\overline{M_{i-1}M_i}$，$i=1,2,\cdots,n$. 令 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\overline{M_{i-1}M_i}$. 若当折线的边数无限增加，且 λ 趋向于零时，折线的周长总趋向于一个确定的极限，则称此极限为平面曲线弧$\overset{\frown}{AB}$的长度，或称为曲线在 A,B 两点间的弧长. 这时，这段曲线弧就称为可求长的，其长度记为 s(图 3.14).

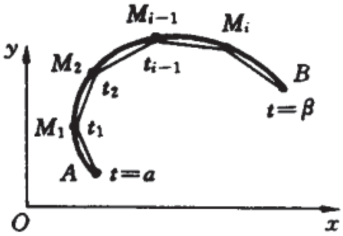


图 3.14

（二）弧长的计算公式

1. 参数方程的情形

定理 1 设曲线弧$\overset{\frown}{AB}$由参数方程 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 给出，而起点 A 与终点 B 对应于参数值 $t=\alpha$ 与 $t=\beta$. 如果函数 $\varphi(t)$与 $\psi(t)$在区间$[\alpha,\beta]$上有连续的微商，则曲线弧$\overset{\frown}{AB}$是可求长的，且弧长 s 可表示为定积分

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$$

证 设内接于弧$\overset{\frown}{AB}$的折线之顶点依次为(图 3.14)

$$A=M_0,M_1,\cdots,M_{i-1},M_i,\cdots,M_n=B$$

且分别对应于参数值

$$\alpha=t_0,t_1,\cdots,t_{i-1},t_i,\cdots,t_n=\beta$$

于是点 M_i 的坐标为 $(\varphi(t_i),\psi(t_i))$. 由解析几何中两点距离的公式,边 $M_{i-1}M_i$ 的长为

$$\overline{M_{i-1}M_i}=\sqrt{[\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})]^2+[\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})]^2}$$

而内接折线的周长就是

$$\begin{aligned}s_n&=\sum_{i=1}^{n}\overline{M_{i-1}M_i}\\&=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})]^2+[\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})]^2}\end{aligned}$$

因为 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续的微商,所以由拉格朗日中值定理就得到

$$\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})=\varphi'(\xi_i)\Delta t_i\quad(t_{i-1}<\xi_i<t_i)$$

$$\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})=\psi'(\xi_i')\Delta t_i\quad(t_{i-1}<\xi_i'<t_i)$$

由此推知,折线的长又可表示成

$$s_n=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\xi_i')}\Delta t_i$$

或写成

$$\begin{aligned}s_n=&\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\xi_i)}\Delta t_i\\&+\sum_{i=1}^{n}\left[\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\xi_i')}-\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\xi_i)}\right]\Delta t_i\end{aligned}$$

令 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta t_i$,当 λ 趋向零时,则折线的最大边长亦趋向于零. 这时上式右端第一项以积分

$$\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

为极限;而第二项有估计式

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\left[\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\xi_i')}-\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\xi_i)}\right]\Delta t_i\right|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |\psi'(\xi_i')-\psi'(\xi_i)|\Delta t_i{}^*$$

由函数 $\psi'(t)$在$[\alpha,\beta]$上的一致连续性可知，对任给的正数 ε，存在正数 δ，当 $\lambda<\delta$ 时，只要 ξ_i 与 ξ_i'都在区间$[t_{i-1},t_i]$上，就有

$$|\psi'(\xi_i')-\psi'(\xi_i)|<\varepsilon$$

从而得到

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\left[\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\xi_i')}-\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\xi_i)}\right]\Delta t_i\right| < (\beta-\alpha)\varepsilon$$

当 λ 趋向于零时，它亦趋向于零. 这样一来，我们就证明了内接折线之周长的极限存在，也就是弧$\overset{\frown}{AB}$是可求长的，并且弧长 s 可表示为定积分

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

在弧$\overset{\frown}{AB}$上任取一点 M，设其对应的参数值为 t，那么弧$\overset{\frown}{AM}$的长为

$$s(t)=\int_{\alpha}^{t}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}\tau,\quad t\in[\alpha,\beta]$$

它确定为 t 的函数，应用积分对上限微商的法则就有

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$$

或者

---

* 这里利用了下述不等式

设 a、b、c 是任意实数，则有

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\leqslant|b-c|$$

事实上，当 $a=0$ 时不等式显然成立. 当 $a\neq0$ 时因为

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}>|b|+|c|$$

所以

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|=\frac{|b^2-c^2|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}}<|b-c|$$

$$ds = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt$$

但

$$\varphi'(t) = \frac{dx}{dt},\ \psi'(t) = \frac{dy}{dt},$$

所以

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

这个公式称为弧长微分公式，它有明显的几何意义.

在曲线上任取点 $M(x,y)$ 及邻近点 $M'(x+\Delta x, y+\Delta y)$，过 M 作曲线的切线 MI，它与平行于 y 轴的直线 $M'N$ 交于点 P（图 3.15），由直角三角形 MNP 得

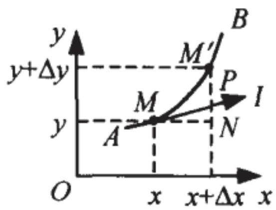


图 3.15

$$MP^2 = MN^2 + NP^2$$

但 $MN = \Delta x = dx$，$NP = dy$，于是得到

$$MP^2 = dx^2 + dy^2$$

所以 $ds = MP$，就是说，弧长的微分等于直角三角形 MNP 的弦长.

例 1 求旋轮线 $x = a(t - \sin t)$，$y = a(1 - \cos t)$ 一支的弧长.

解 因 $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$，故由上述弧长公式即得

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}dt \\ &= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}dt = 8a \end{aligned}$$

就是旋轮线一支的弧长等于滚动圆的直径之四倍.

2. 直角坐标系中的情形

定理 2 若曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 由方程 $y = f(x)$，$a \leqslant x \leqslant b$ 给出，且 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 是可求长的，其弧长 s 为

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

证 这时取参数 $t = x$ 为积分变量，它的积分区间为 $[a,b]$. 由

前面导出的弧长微分公式知，弧长微元是

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$$

从而所求的曲线弧$\overset{\frown}{AB}$的弧长为

$$s = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$$

例 2 求抛物线 $y=x^2$ 在点 $O(0,0)$，$A(a,a^2)$之间的一段弧长 s.

解 因为$\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+(2x)^2}$，于是由弧长公式，得到所求的弧长

$$s = \int_0^a \sqrt{1+(y')^2}dx = \int_0^a \sqrt{1+(2x)^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{2a} \sqrt{1+u^2}du$$

$$= \frac{1}{4}[u\sqrt{1+u^2} + \ln(u+\sqrt{1+u^2})\Big|_0^{2a}$$

$$= \frac{1}{4}[2a\sqrt{1+4a^2} + \ln(2a+\sqrt{1+4a^2})]$$

例 3 计算抛物线 $y^2=2px$ 从顶点到此曲线上一点 $M_0(x_0,y_0)$的弧长($p>0$).

解 不妨设 $y_0>0$，这时应取 y 为参数，故有

$$\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{1}{p}\sqrt{p^2+y^2}$$

于是由弧长公式，得到所求的弧长为

$$s = \frac{1}{p}\int_0^{y_0} \sqrt{p^2+y^2}dy = \frac{1}{2p}[y\sqrt{p^2+y^2}$$

$$+ p^2\ln(y+\sqrt{p^2+y^2})]\Big|_0^{y_0}$$

$$= \frac{y_0}{2p}\sqrt{p^2+y_0^2} + \frac{p}{2}\ln\frac{y_0+\sqrt{p^2+y_0^2}}{p}$$

3. 极坐标系中的情形

定理 3 如果曲线弧$\overset{\frown}{AB}$由极坐标方程 $r=f(\theta)$，$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ 给出，且 $f'(\theta)$在$[\alpha,\beta]$上连续，则曲线的弧长公式为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\,d\theta$$

证　此时取 θ 为积分变量. 它的变化区间为 $[\alpha,\beta]$，今将 θ 看作参数，并由 $x=f(\theta)\cos\theta$，$y=f(\theta)\sin\theta$，得到

$$x'(\theta) = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta$$

$$y'(\theta) = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta$$

于是弧微分为

$$ds = \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2}\,d\theta = \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\,d\theta$$

从而所求的弧长为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\,d\theta$$

例 4　求对数螺线 $r=ce^{a\theta}$，在极角 $\theta=\alpha$ 与 $\theta=\beta$ 之间的弧长，其中 $c>0$ 与 $a\neq 0$ 都是常数.

解　由 $r=ce^{a\theta}$，得到 $r'=ace^{a\theta}$，于是

$$r^2 + (r')^2 = c^2(e^{2a\theta} + a^2 e^{2a\theta}) = c^2(1+a^2)e^{2a\theta}$$

故弧微分为

$$ds = \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\theta = c\sqrt{1+a^2}\,e^{a\theta}\,d\theta$$

弧长为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\theta = c\sqrt{1+a^2}\int_{\alpha}^{\beta} e^{a\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{c\sqrt{1+a^2}}{a}(e^{a\beta} - e^{a\alpha})$$

3.5.4　利用横截面计算体积

考虑由一曲面和垂直于 x 轴的二平面 $x=a$，$x=b$ 围成的空间立体(3.16). 若已知立体垂直于 x 轴的所有截面的面积，则这个立体的体积也可以化为定积分来计算，即有如下结果.

若一立体垂直于 x 轴的截面面积 $S(x)$ 是已知的 x 的连续函数，则这立体的体积可表示为

$$V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x$$

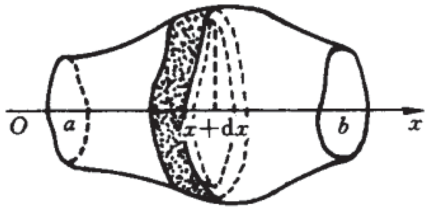


图 3.16

其中 a 与 b 各为这个立体两端截面所对应的横坐标.

考虑区间$[a,b]$内任一小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$，由于 $\mathrm{d}x$ 取得充分小，因此这一小段上的立体可近似看成上、下底的面积都是 $S(x)$，而高为 $\mathrm{d}x$ 的小的正柱体. 于是得到体积微元为

$$\mathrm{d}V = S(x)\mathrm{d}x$$

将 $\mathrm{d}V$ 从 a 到 b 积分，则有

$$V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x$$

例 1 证明：底面积为 Q，高为 h 的锥体的体积为

$$V = \frac{1}{3}Qh$$

证 取锥体的顶点为坐标原点 $O(0,0)$. 设过顶点 O 垂直于底面的直线为 x 轴(如图 3.17). 假设距顶点 O 为 x $(0\leqslant x\leqslant h)$的截面的面积为 $S(x)$. 由初等几何知，有

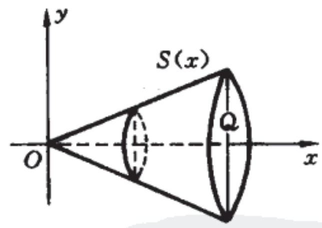


图 3.17

$$\frac{S(x)}{Q} = \frac{x^2}{h^2}$$

或

$$S(x) = \frac{Q}{h^2}x^2, 0\leqslant x\leqslant h$$

且 $S(x)$是$[0,h]$上的已知的连续函数，故锥体的体积为

$$V = \int_0^h \frac{Q}{h^2}x^2\,\mathrm{d}x = \frac{Q}{h^2}\int_0^h x^2\,\mathrm{d}x = \frac{Q}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}Qh$$

例 2 设已知某矿山相距为 h 的各等高线所围成的图形的面积为

$$S_0, S_1, S_2, \cdots, S_n$$

则这座矿山的体积 V 近似地等于

$$V \approx \left(\frac{S_0 + S_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} S_i\right)h$$

事实上,可将高度为 x 的等高线所围成的平面图形看作矿山的一个截面.设其面积为 $S(x)$.又设高度 x 的变化范围是区间$[a,b]$,则此矿山的体积可由定积分 $\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$ 表示.而面积 $S_0, S_1, \cdots, S_n$ 就是截面积 $S(x)$ 在相应分点:$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 上的数值,且 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = h, i=1,2,\cdots,n$.应用定积分近似计算的梯形公式得到矿山的体积近似为

$$V \approx \left(\frac{S_0 + S_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} S_i\right)h$$

3.5.5 旋转体的体积

旋转体是由一个平面图形绕此平面内的一条直线旋转一周所成的立体,并称这条直线为旋转轴.例如球体是半圆绕它的直径旋转一周所成的立体.

若考虑由连续曲线 $y=f(x)$,直线 $x=a, x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴转旋一周而得的旋转体.这时在点 x 处垂直于 x 轴的截面面积为半径等于 y 的圆面积,即有

$$S(x) = \pi y^2 = \pi[f(x)]^2$$

代入 3.5.4 中的体积公式后,就可得到旋转体的体积.从而得到

由连续曲线 $y=f(x)$ 在横坐标 $x=a, x=b$ 之间的部分所成的平面图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积为

$$V = \pi\int_a^b y^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

例 求由椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$围成的图形绕 x 轴旋转所得的旋转椭球的体积(图 3.18).

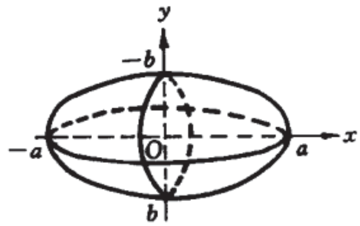


图 3.18

解 由椭圆方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

解出 $y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$,再由旋转体的体积公式即得

$$V=\pi\int_{-a}^{a}y^2\,\mathrm{d}x=2\pi\int_0^a b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=2\pi ab^2-2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a x^2\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

若 $a=b=R$,即得到半径为 R 的球体体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

3.5.6 旋转体的侧面积

求出了旋转体的体积之后,再来计算它的侧面积.何谓旋转体的侧面积呢?

定义 设在平面 Oxy 上给定以 A 为起点,B 为终点的一段曲线,作这段曲线的内接折线.若当折线的边数无限增加,而最大的边长趋向于零时,这折线绕 x 轴旋转所得立体的侧面积的极限就称为曲线弧$\overset{\frown}{AB}$绕 x 轴旋转所得的旋转体的侧面积.

设曲线弧$\overset{\frown}{AB}$的参数方程为 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$,而曲线弧的起点 A 及终点 B 各对应于参数值 α 与 β.若函数 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续的微商,且 $\varphi'(t)$ 与 $\psi'(t)$ 不同时为零,则上述旋转体的侧面积可表示为定积分

$$P=2\pi\int_\alpha^\beta|\psi(t)|\,\mathrm{d}s$$

其中 $\mathrm{d}s$ 是所给曲线的弧微分

$$\mathrm{d}s=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$$

事实上,分割区间$[\alpha,\beta]$,考虑任一小区间$[t,t+\mathrm{d}t]$(图3.19),且曲线上与参数 t 及 $t+\mathrm{d}t$ 对应的点分别为 M 与 N. 因此对应于这一小区间上,是由小弧段$\widehat{MN}$绕 x 轴旋转所得的侧面积 ΔP,它可以用切线段 MT,长度为 $\mathrm{d}s$ 绕 x 轴旋转所得到的圆台的侧面积来近似代替. 这个圆台的上,下底半径分别为 $y=\psi(t)$ 及 $y+\mathrm{d}y=\psi(t)+\psi'(t)\mathrm{d}t$. 斜高为 $\mathrm{d}s$. 由立体几何学知

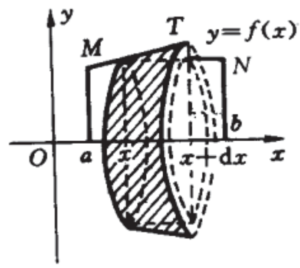


图 3.19

$$\text{圆台侧面积} = \pi \times (\text{上底半径} + \text{下底半径}) \times \text{斜高}.$$
$$= \pi\{\psi(t) + [\psi(t) + \psi'(t)\mathrm{d}t]\} \cdot \mathrm{d}s$$
$$= 2\pi\psi(t)\mathrm{d}s + \pi\psi'(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s$$

当 $\mathrm{d}t\to 0$ 时,$\psi'(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s$ 是 $\mathrm{d}t$ 的高级无穷小量,略去后就得到侧面积微元为

$$\mathrm{d}P = 2\pi\mid\psi(t)\mid\mathrm{d}s = 2\pi\mid\psi(t)\mid\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\mathrm{d}t$$

将它从 α 到 β 求定积分,得到侧面积公式

$$P = 2\pi\int_\alpha^\beta\mid\psi(t)\mid\mathrm{d}s = 2\pi\int_\alpha^\beta\mid\psi(t)\mid\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\mathrm{d}t$$

若曲线由方程 $y=f(x)$ 给出,且曲线弧的起点 A 与终点 B 各对应自变量 x 的值是 a 与 b,则有侧面积公式

$$P = 2\pi\int_a^b\mid y\mid\mathrm{d}s = 2\pi\int_a^b\mid f(x)\mid\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x$$

例 1 求半径为 R 的球面面积.

解 把球面看成是半径为 R 的上半圆周绕 x 轴旋转所得球体的侧面积. 若取圆心为坐标原点,旋转轴为 x 轴,则上半圆周的方程可写为

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \quad (-R \leqslant x \leqslant R)$$

因为

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}} = -\frac{x}{y} \ (|x| < R)$$

所以

$$y\sqrt{1+(y')^2} = y\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} = R \ (|x| \leqslant R)$$

于是由公式得到球面的面积

$$P = 2\pi\int_{-R}^{R} y\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_{-R}^{R} R\,\mathrm{d}x = 4\pi R^2$$

例 2 求旋轮线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$的第一拱绕 x 轴旋转所得的旋转体的侧面积.

解 因为有 $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. 故所求旋转体的侧面积为

$$\begin{aligned} P &= 2\pi\int_0^{2\pi} y\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= 8\pi a^2\int_0^{2\pi}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^3\mathrm{d}t = 32\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 u\,\mathrm{d}u = \frac{64}{3}\pi a^2 \end{aligned}$$

3.5.7 函数的平均值

在某实验中测定一个物理量 y 共 n 次,得 n 个值为

$$y_1, y_2, \cdots, y_n$$

一般取它们的算术平均值

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$$

来表示这个量 y 的值. 但在许多实际问题中,不仅要求计算某组数的平均值,而且还常常要求计算某个函数在一区间内连续变化时的平均值,例如蒸汽的平均压力、交流电的平均功率、化学反应的平均速度等等.

设在区间$[a,b]$上给定一个连续函数 $f(x)$,那么应该如何定义和计算它在区间$[a,b]$上的平均值呢?

用分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$，把区间$[a,b]$分成 n 等分，每一等分的长为$\frac{b-a}{n}$. 函数 $f(x)$在前面给出的 n 个分点上的值为

$$f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)$$

这些函数值的算术平均值为

$$\overline{y}_n=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]$$

当分点取得越多时，这个算术平均值就越能表示 $f(x)$在$[a,b]$上的平均值. 因此，就很自然地定义为分点无限增多，即 n 趋向无穷时，$\overline{y}_n$ 的极限为函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的平均值$\overline{y}$，因为

$$\overline{y}_n=\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\frac{b-a}{n}=\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i$$

其中 $\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$. 由于 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则有

$$\overline{y}=\lim_{n\to\infty}\overline{y}_n=\frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

这就是连续函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上的平均值. 它等于这个函数在$[a,b]$上的定积分，除以区间的长度.

由积分中值定理可知，这个平均值恰是 $f(x)$在区间(a,b)内某一点 ξ 的值，即$\overline{y}=f(\xi)$，$a<\xi<b$.

平均值公式有简单的物理意义. 若把 x 看作时间，$f(x)$看作某个质点沿直线运动的速度，则从时刻 a 到时刻 b 这个质点所走过的路程应是$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，而函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$ 上的平均值 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 就成为它在时间间隔$[a,b]$ 内的平均速度了.

例 1 设一定质量的理想气体，等温过程中，若体积由 V_a 膨胀到 V_b，求这个过程中理想气体的平均压强.

解 根据物理学可知，体积与压强的关系为

$$p=\frac{k}{V}$$

其中 p 为压强,V 为体积,k 为常数. 因此平均压强为

$$\bar{p}=\frac{1}{V_b-V_a}\int_{V_a}^{V_b}\frac{k}{V}\mathrm{d}V=\frac{k}{V_b-V_a}\ln\frac{V_b}{V_a}$$

例 2 求正弦交流电 $I(t)=I_m\sin\omega t$ 在一个周期内通过电阻 R 的平均功率,其中 I_m 为电流的最大值,ω 为圆频率.

解 由物理学知,交流电流 I 在时刻 t 通过电阻 R 所消耗的功率为

$$P(t)=RI^2(t)$$

而周期为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$,所以在一个周期的平均功率为

$$\begin{aligned}\overline{P}&=\frac{1}{T}\int_0^T P(t)\mathrm{d}t=\frac{\omega R}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}I^2(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{\omega RI_m^2}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin^2\omega t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}RI_m^2\end{aligned}$$

通常在灯泡上注明 40W,60W 等字样,指的就是这种平均功率.

3.5.8 变力作功

设物体在变力 $F(x)$ 的作用下沿 x 轴作直线运动,力的方向与物体的运动方向平行. 考虑物体从 $x=a$ 移到 $x=b$,且 $a<b$ 时,变力 $F(x)$ 所作的功.

若 $F(x)=F$ 是一个恒力,则力 F 对物体所作的功为

$$W=F(b-a)$$

但现在遇到的是变力 $F(x)$,显然上述公式已不适用了. 为此,分割区间 $[a,b]$,任取一个小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$,在这一小段上,变力所作的功可近似地看作大小为 $F(x)$ 的恒力所作的功. 于是得到功的微元

$$\mathrm{d}W=F(x)\mathrm{d}x$$

将 $\mathrm{d}W$ 从 a 到 b 求定积分,就得到变力 $F(x)$所作的功

$$W=\int_a^b F(x)\mathrm{d}x$$

例 1 将质量为 m 的物体从地面垂直发射到高度为 h 的太空,试求克服地球引力所应作的功.

解 设地球的质量为 M,半径为 R. 取地心为坐标原点,x 轴铅垂向上. 根据万有引力定律,当物体在 x 处时,地球对它的引力的大小为

$$f(x)=k\frac{Mm}{x^2}$$

其中 k 为引力常数. 为了将物体发射出去,必须克服地球的引力. 用来克服地球引力的外力 $F(x)$与地球引力的大小相等,故有

$$F(x)=k\frac{Mm}{x^2}$$

由求功的公式知,将物体自地面,即 $x=R$ 处垂直发射到高度为 h,即 $x=R+h$ 时所作的功为

$$\begin{aligned}W&=\int_R^{R+h}F(x)\mathrm{d}x=\int_R^{R+h}k\frac{Mm}{x^2}\mathrm{d}x=kMm\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_R^{R+h}\\&=kMm\cdot\frac{h}{R(R+h)}\end{aligned}$$

其中引力常数 k 按如下方法确定:

由于当物体在地面,即 $x=R$ 时,地球对物体的引力大小为 $f=k\dfrac{Mm}{R^2}$,应恰好等于重力 mg,则有

$$k\frac{Mm}{R^2}=mg$$

这里的 g 为重力加速度,从而得到

$$k=\frac{R^2g}{M}$$

故最后得到

$$W=mg\cdot\frac{Rh}{(R+h)}$$

这就是将物体发射到高度为 h 的太空所需作的功.

例 2 设有半径为 R 的球沉入水中,它与水面相接,球的比重为 1,现将此球从水中取出,要作多少功?

解 如图 3.20. 选取坐标系,即以球与水面的接触点为坐标原点,x 轴铅垂向上. 由于球在取出水面时,露出水面的部分为一个球缺,其重量应由外力承担. 外力恰好等于露出水面球缺的重量. 设球缺的高为 x. 而半径已知为 R,故体积为

$$V=\pi x^{2}\left(R-\frac{1}{3}x\right)$$

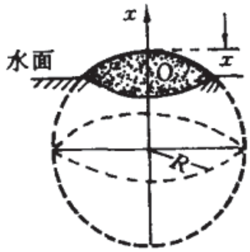


图 3.20

比重是 1. 所以球从水中取出时须施加的外力

$$F(x)=\pi x^{2}\left(R-\frac{1}{3}x\right)$$

根据求功的公式,将球从 $x=0$ 的位置逐步上升到 $x=2R$ 的位置时所作的功为

$$W=\int_{0}^{2R}\pi x^{2}\left(R-\frac{1}{3}x\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{Rx^{3}}{3}-\frac{x^{4}}{12}\right)\Bigg|_{0}^{2R}$$

$$=\pi\cdot 8\left(\frac{4R^{4}-2R^{4}}{12}\right)=\frac{4}{3}\pi R^{4}$$

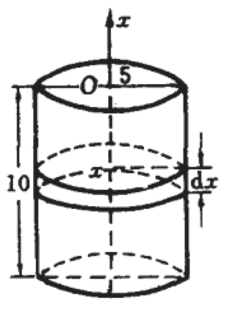


图 3.21

例 3 一个圆柱形的钢桶,其底半径为 5 米,高为 10 米. 若桶中注满了水. 求把全部水抽出钢桶所作的功(水的比重为 1 吨/米^3).

解 取坐标系如图 3.21,坐标原点位于上底面的中心,x 轴铅垂向上. 分割区间 $[-10,0]$,考虑任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$. 相应的水深为 x,厚度为 $\mathrm{d}x$ 的薄圆柱形水层的体积是 $25\pi\mathrm{d}x$.

由于水的比重是 1 吨/米^3. 因此这个薄

圆柱形水层的重量亦为 $25\pi dx$. 把这一层水抽到桶口，经过的距离为 $-x$. 故需作功为

$$dW = -25\pi x\,dx$$

将 dW 从 -10 到 0 求定积分，得到应作的功是

$$W = 25\pi\int_{-10}^{0}(-x)dx = 1250\pi \approx 3927(\text{吨}\cdot\text{米})$$

这就是把钢桶内的水全部抽出所作的功.

3.5.9 液体的侧压力、引力

（一）液体的侧压力

根据物理学可知，在液体面下深度为 h 处，由液体本身的重量所产生的压强等于它的深度与液体比重 r 的乘积. 若用 p 表示该处的压强，则有 $p=rh$. 若有一面积为 A 的平板水平地放置在水深为 h 处，则平板一侧所受的水压力就为 $P=p\cdot A$. 若平板垂直地放置在水中，则由于水深不同的点处压强 p 不相等，平板一侧所受的水压力就不能用上述方法计算. 下面举例说明它的计算方法.

例 1 设有圆形水道，其直径为 2 米，当水满到半圆时，求水道半圆形闸门上所受的压力.

解 如图 3.22 取闸门所在的平面为坐标面 Oxy，使其原点在水道中心，x 轴铅直向下，y 轴在水平面上. 设想把闸门上受到压力的表面分成许多极细的水平长条. 则闸门所受的总压力 P 等于所有细长条上所受压力之和. 考虑闸门上水深为 x，宽度为 dx 的细长条. 细长条的长度为 $2\sqrt{1-x^2}$，故它的面积近似地为 $2\sqrt{1-x^2}dx$ 平方米. 由于水的比重为 1 吨/米^3，因此细长条上所受的压力是 $dP=2x\sqrt{1-x^2}dx$. 于是整个半圆形水下闸门所受的压力等于在 $[0,1]$ 上作定积分，即有

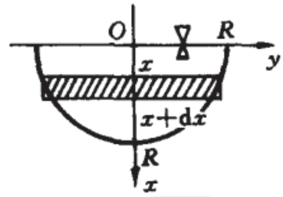


图 3.22

$$P = \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\text{ 吨}$$

（二）引力

从物理学知，质量分别为 m_1，m_2. 相距为 r 的二质点间的引力大小等于

$$f = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

其中 k 为引力常数.

例 2 两条长为 l，质量为 M 的均匀细杆位于同一直线上，其近端距离为 l，求两杆之间的引力.

解 把细杆所在的直线取为 x 轴，如图 3.23，因为左杆坐标是 x，长度为 $\mathrm{d}x$ 的小段的质量为

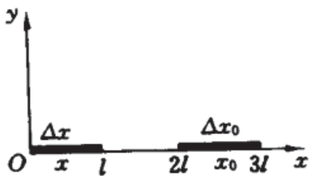


图 3.23

$$m = \frac{M}{l}\mathrm{d}x$$

右杆坐标为 x_0，长度为 $\mathrm{d}x_0$ 的小段的质量是

$$m_0 = \frac{M}{l}\mathrm{d}x_0$$

由于 $\mathrm{d}x$ 与 $\mathrm{d}x_0$ 都很小，因此这两小段细杆都可以看成质量分别为 m 与 m_0 的质点. 它们之间的距离为(x_0-x). 故引力的大小为

$$\mathrm{d}F = k\frac{\frac{M}{l}\mathrm{d}x_0\,\frac{M}{l}\mathrm{d}x}{(x_0-x)^2} = k\left(\frac{M}{l}\right)^2\mathrm{d}x_0\cdot\frac{1}{(x_0-x)^2}\mathrm{d}x$$

其中 k 为引力常数. 从而整个左杆对右杆上任意固定的小段 $\mathrm{d}x_0$ 的引力为

$$F_0 = k\left(\frac{M}{l}\right)^2\mathrm{d}x_0\int_0^l\frac{1}{(x_0-x)^2}\mathrm{d}x = k\left(\frac{M}{l}\right)^2\mathrm{d}x_0\left(\frac{1}{x_0-l}-\frac{1}{x_0}\right)$$

再把整个左杆对右杆每一小段的引力无限叠加起来，即得到两杆之间的引力

$$F = k\left(\frac{M}{l}\right)^2\int_{2l}^{3l}\left(\frac{1}{x_0-l}-\frac{1}{x_0}\right)\mathrm{d}x_0 = k\left(\frac{M}{l}\right)^2\ln\frac{x_0-l}{x_0}\Big|_{2l}^{3l}$$

$$= k\left(\frac{M}{l}\right)^2 \ln\frac{4}{3}$$

复习思考题

1. 叙述应用定积分解决实际问题的主要过程.

2. 写出曲线段 $x=g(y)$ $(c\leqslant y\leqslant d)$绕 Oy 轴旋转所得旋转体的体积与侧面积的公式.

3. 在"定积分应用"这一节的所有公式中,积分号下的被积表达式各表示什么意义?

习题 3.5

1. 计算下列曲线围成的平面图形的面积

(1) $y=x^2$, $x+y=2$　　(2) $y^2=x^2(a^2-x^2)$

(3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　　(4) $y^2+8x=16$, $y^2-24x=48$

(5) $y=x$, $y=2x$, $xy=2$ 在第一象限部分

(6) $y=\mathrm{e}^x$, $y=\mathrm{e}^{-x}$, $x=1$　　(7) $y^2=4(x+1)$, $y^2=4(1-x)$

(8) $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$, 及 $y=0$

(9) $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$

(10) $\begin{cases} x=2t-t^2 \\ y=2t^2-t^3 \end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2)$

(11) $r=a(1+\cos\varphi)$　　(12) $r^2=a^2\sin 2\varphi$

2. 计算下列曲线的弧长

(1) $y=a\ln\dfrac{a^2}{a^2-x^2}$ $(0\leqslant x\leqslant b<a)$　　(2) $y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ $(0\leqslant x\leqslant b)$

(3) $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$　　(4) $\begin{cases} x=a\cos^4 t \\ y=a\sin^4 t \end{cases}$ $\left(0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$

(5) $r=a\varphi$ $(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$

(6) $r=\dfrac{p}{1+\cos\varphi}\left(|\varphi|\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$，$p$ 为常数.

3. 计算下列曲面所围成的体积

(1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$　　　(2) $x^2+z^2=a^2$，$y^2+z^2=a^2$

4. 证明：将面积 $a\leqslant x\leqslant b,0\leqslant y\leqslant f(x)$，($f(x)$ 为连续函数)绕 y 轴旋转所成的旋转体体积为

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$$

5. 求下列曲线旋转所成的立体体积

(1) $y=\sin x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$绕 x 轴及 y 轴

(2) $y=\dfrac{3}{x}$，$y=4-x$ 绕 x 轴及 y 轴

(3) $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$绕 x 轴

(4) $x^2+(y-b)^2=a^2$　$(0<a\leqslant b)$绕 x 轴

6. 求下列各区域绕 y 轴旋转所形成的立体体积

(1) $y=\dfrac{\sin x}{x}$，$\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi$

(2) $y=\mathrm{e}^{x^2}$，$0\leqslant x\leqslant 1$

(3) $y=\dfrac{1}{x\mathrm{e}^x}$，$1\leqslant x\leqslant 4$

(4) $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$，$1\leqslant x\leqslant 2$

7. 求下列曲线旋转后所成立体的侧面积

(1) $x^2+y^2=R^2$ 绕 x 轴

(2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 绕 y 轴(设 $a>b$)

(3) $y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ $(0\leqslant x\leqslant a)$绕 x 轴

(4) $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$绕 x 轴

(5) $r=a(1+\cos\varphi)$绕极轴

8. 求下列函数的平均值

(1) $y=2x\mathrm{e}^{-x}$, $0\leqslant x\leqslant 2$

(2) $y=\sin^2 x$, $-\pi\leqslant x\leqslant \pi$

9. 挖一半球形的蓄水池,深 20 米,求克服土块重力所作的功(设土的比重为 1.5 吨/米^3.)

10. 求水对垂直板的压力,这个板的形状是上底为 6 米,下底为 10 米,高为 5 米的等腰梯形,设下底沉于水面下 20 米处(设水的比重为 1 吨/米^3.)

11. 一块高为 a,底为 b 的等腰三角形薄板垂直地沉没在水中,顶在下,底与水面相齐,试计算薄板所受的水压力. 若把它倒放. 使它的顶与水面相齐,而底与水面平行,那么压力如何?

12. 设某物质在化学反应中分解的速度与反应进行的时间成正比,比例系数为 2,设开始时有物质 m_0 克. 问 3 秒后还有物质多少?

13. 两条长度分别为 l_1 与 l_2,质量分别为 m_1 与 m_2 的均匀细杆位于同一条直线上,相邻二端点之距离为 a,证明此细杆之间的引力为

$$F=k\frac{m_1 m_2}{l_1 l_2}\ln\frac{(a+l_1)(a+l_2)}{a(a+l_1+l_2)}$$

其中 k 为引力常数.

14. 一质点沿直线运动,受到阻力的影响,速度每秒减小 2 米,若初速度为 25 米/秒,问它能走多远?

3.6 广 义 积 分

前面所讨论的黎曼积分受着双重限制,即要求积分区间是有限的;被积函数在积分区间上是有界的. 可是在实际问题中,又往往会遇到不满足这些限制条件的情形. 这一节中,我们要从这两个方面来推广黎曼积分的概念. 推广后的积分称为广义积分,而相应地把以前讨论的积分称为常义积分. 在理论上,广义积分为将来表示一些非初等函数起到重要作用.

3.6.1 无穷区间上的积分

考虑由曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}$,x 轴和直线 $x=1$ 所围成的开口曲边梯形

的面积(图 3.24). 从形式上看这块面积应该等于无穷限积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x$$

但是,直到目前为止,还没有赋予这个积分的意义.

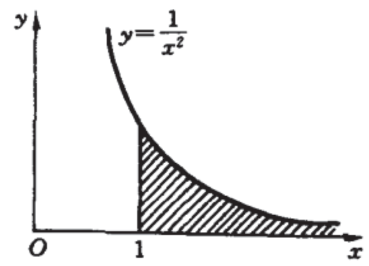


图 3.24

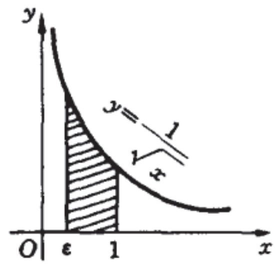


图 3.25

另外,若作辅助直线 $x=b>1$,则介于直线 $x=1, x=b$ 之间的曲边梯形(图 3.25)的面积等于

$$A(b)=\int_1^b \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x=1-\frac{1}{b}$$

显然,当 b 越大时,这块面积就越接近于上述开口曲边梯形的面积. 因此很自然地就认为开口曲边梯形的面积是,当 b 趋向于无穷时 $A(b)$ 的极限 1. 于是给出了定义

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x=\lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x=\lim_{b \to +\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right)=1$$

一般地,有如下定义.

定义 设函数 $f(x)$ 在无限区间 $[a,+\infty)$ 上连续,若对任意的 $b>a$,且当 b 趋向正无穷时,积分 $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$ 的极限就称为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的无穷限积分或第一类广义积分,记为 $\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$,即

$$\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x=\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x) \mathrm{d}x$$

若此极限存在,则称无穷限积分 $\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$ 收敛;若上述极限不

存在，则称无穷限积分$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$不存在或发散.

类似地，若函数 $f(x)$在$(-\infty,b]$上连续，则定义

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

同样，若函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，则定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

其中 c 为任意的实数，a 与 b 是各自独立地分别趋于负无穷大与正无穷大. 因此上述等式左端的积分收敛，相当于右端的两个积分同时收敛，且其值为二者之和. 若右端的两个积分有一个发散或两个都发散，这时称左端的积分是发散的. 根据积分区间的可加性，积分值与点 c 的取法无关. 为了方便故常取 $c=0$.

在无穷区间$(-\infty,b]$，或$[a,+\infty)$或$(-\infty,+\infty)$上，若函数 $f(x)$存在原函数 $F(x)$，且记号 $F(-\infty)$，$F(+\infty)$各表示极限

$$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x),\ F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x),$$

则牛顿-莱布尼兹公式对这类积分仍保持成立. 即有

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{a}^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty)$$

例 1 判别无穷限积分$\int_{a}^{+\infty} \frac{1}{x^{p}}\mathrm{d}x$的敛散性，即收敛与发散性，其中 $a>0$，p 为常数.

解 根据定义

(1) 当 $p\neq1$ 时，对任意的 $b>a$，有

$$\int_{a}^{b} \frac{1}{x^{p}}\mathrm{d}x = \frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_{a}^{b} = \frac{1}{1-p}(b^{1-p} - a^{1-p})$$

故得

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x = \frac{1}{1-p}\lim_{b\to+\infty}(b^{1-p} - a^{1-p})$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}a^{1-p}, & \text{当 } p > 1 \\ +\infty, & \text{当 } p < 1 \end{cases}$$

(2) 当 $p=1$ 时,有

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\ln\frac{b}{a} = +\infty$$

从而得到第一类广义积分 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$,当 $p>1$ 时收敛;当 $p\leqslant 1$ 时发散. 这个积分通常称为第一类 p 积分.

例 2 计算第一类广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解 由定义,因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arctg} x\Big|_a^0\right) + \lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg} x\Big|_0^b\right)$$

$$= \lim_{a\to-\infty}(-\operatorname{arctg} a) + \lim_{a\to+\infty}\operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

或

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

例 3 证明:$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 与 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 发散.

解 由定义,因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

但是

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\ln(1+x^2)\Big|_a^0$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\ln(1+a^2)$$

该极限不存在,即$\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 发散. 所以$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 发散.

类似地,得到$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 也发散.

3.6.2 无界函数的积分

关于无穷区间上的积分所引入的概念,完全可以类推到无界函数的情形. 仍先考虑一个具体例子.

设有曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, x 轴和直线 $x=1$ 所围成的开口曲边梯形. 按定积分的几何意义,这个曲边梯形的面积形式上可写成

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

由于被积函数$\frac{1}{\sqrt{x}}$在点 $x=0$ 处无界,因此这个定积分在黎曼意义下是不存在的. 但若作辅助直线 $x=\varepsilon(\varepsilon>0)$(图 3.26),则介于直线 $x=\varepsilon$ 与 $x=1$ 之间的曲边梯形的面积显然为

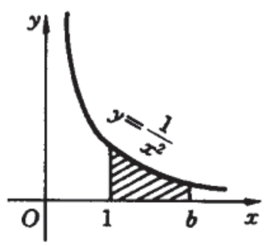


图 3.26

$$A(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2(1-\sqrt{\varepsilon})$$

当 ε 越小时,这块面积就越接近开口曲边梯形的面积. 故就很自然地认为上述开口曲边梯形的面积是当 ε 趋向于零时, $A(\varepsilon)$ 的极限 2. 即规定

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2$$

一般地我们有

定义 设函数 $f(x)$ 在半开半闭区间 $(a,b]$ 上连续，且在左端点 a 处无界，即 a 为无穷间断点，通常称为 $f(x)$ 的瑕点. 这时 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$. 取正数 ε，极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)\mathrm{d}x$ 称无界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分，记为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，且有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)\mathrm{d}x$$

若此极限存在，就称无界函数的积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

若上述极限不存在，就称无界函数的积分发散或不存在.

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 的右端点 b 处无界，则类似地定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a}^{b-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x$$

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 的两个端点 a 与 b 上都无界，而在 (a,b) 内连续，则定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{c}f(x)\mathrm{d}x+\lim_{\eta\to 0^+}\int_{c}^{b-\eta}f(x)\mathrm{d}x$$

其中 c 为 a 与 b 之间的任意数，ε 与 η 是相互独立的变量. 当上式右端两个积分都收敛时，就称积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

易见，积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的值与点 c 的选取无关，当右端两个积分中有一个发散时，就称积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内有唯一的一点 $c(a<c<b)$ 是无界的，则定义

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\\&=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a}^{c-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x+\lim_{\eta\to 0^+}\int_{c+\eta}^{b}f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

当上式右端的两个积分都收敛时，就称积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；当这

两个积分有一个发散时，就称积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散.

无界函数的积分又称为第二类广义积分或瑕积分.

设 $F(x)$是 $f(x)$的原函数. 此时牛顿-莱布尼兹公式对这类积分可写为

若 b 是瑕点，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b-0)-F(a)$；

若 a 是瑕点，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a+0)$；

若 a 与 b 都是瑕点，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b-0)-F(a+0)$. 这时的符号应理解为

$$F(a+0)=\lim_{\varepsilon\to0^+}F(a+\varepsilon);F(b-0)=\lim_{\varepsilon\to0^+}F(b-\varepsilon)$$

例 1 判断瑕积分$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\mathrm{d}x$ $(a<b)$ 的敛散性.

解 由于被积函数为$\frac{1}{(x-a)^p}$. 当 $p>0$ 时，点 a 就是它的瑕点，且在区间(a,b)中无别的瑕点.

当 $p\neq1$ 时，取正数 ε，使 $a+\varepsilon<b$，则有

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b \frac{1}{(x-a)^p}\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{1-p}\lim_{\varepsilon\to0^+}(x-a)^{1-p}\Big|_{a+\varepsilon}^b\\ &=\frac{1}{1-p}\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[(b-a)^{1-p}-\varepsilon^{1-p}\right]\\ &=\begin{cases}\dfrac{1}{1-p}(b-a)^{1-p}, & \text{当 } p<1 \text{ 时}\\ +\infty, & \text{当 } p>1 \text{ 时}\end{cases}\end{aligned}$$

当 $p=1$ 时，

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b \frac{1}{(x-a)}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\ln(x-a)\Big|_{a+\varepsilon}^b$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} [\ln(b-a) - \ln\varepsilon] = +\infty$$

于是第二类广义积分 $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx$，当 $p < 1$ 时收敛；$p \geqslant 1$ 时发散. 这个积分常称为第二类 p 积分.

例 2 计算积分 $\int_0^1 \ln x dx$.

解 点 $x=0$ 是被积函数 $\ln x$ 的瑕点，且在区间 $(0,1)$ 内无其他瑕点. 取正数 ε，则有

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} (x\ln x - x) \Big|_\varepsilon^1$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} (-1 - \varepsilon\ln\varepsilon + \varepsilon) = -1$$

例 3 考虑积分 $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

解 $x = \pm 1$ 是被积函数的两个瑕点，且在 $(-1,1)$ 内无其他瑕点. 由定义知应考虑如下的两个瑕积分

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \text{ 与 } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

取正数 ε，有

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-1+\varepsilon}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \arcsin x \Big|_{-1+\varepsilon}^0$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} [-\arcsin(-1+\varepsilon)] = \frac{\pi}{2}$$

再取正数 η，有

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\eta \to 0^+} \int_0^{1-\eta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$
$$= \lim_{\eta \to 0^+} \arcsin(1-\eta) = \frac{\pi}{2}$$

故瑕积分 $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 收敛，且

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \pi$$

3.6.3 广义积分的柯西(Cauchy)主值

今后在概率论等课程中会用到广义积分的柯西主值.

定义 1 若点 c,$a<c<b$ 是函数 $f(x)$在$[a,b]$上的唯一瑕点,对给定的正数 ε,若积分

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x \text{ 与} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$$

都存在,其中 $a<c-\varepsilon$,$c+\varepsilon<b$. 其极限为

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x\right]$$

称此极限是积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的柯西主值. 记为

$$V.P.\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x\right]$$

若极限存在,则称柯西主值积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,否则称为发散.

定义 2 若函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义,取任意大的正数 A,若积分

$$\int_{-A}^0 f(x)\mathrm{d}x \text{ 与} \int_0^A f(x)\mathrm{d}x$$

存在,极限为

$$\lim_{A\to+\infty}\left[\int_{-A}^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^A f(x)\mathrm{d}x\right] = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^A f(x)\mathrm{d}x$$

称此极限是积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的柯西主值,记为

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^A f(x)\mathrm{d}x.$$

若极限存在,则称柯西主值无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,否则称为发散.

例 考虑将会在概率论中遇到的两个无穷积分：

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$　　　　(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{1+x^2}\mathrm{d}x$

解 显然在通常意义下，即 3.6.1 例 3 中的两个无穷积分都发散.

现在来考虑它们的柯西主值. 根据定义 2，有

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=0$$

而

$$\begin{aligned}V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{1+x^2}\mathrm{d}x&=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\frac{|x|}{1+x^2}\mathrm{d}x=2\lim_{A\to+\infty}\int_{0}^{A}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=\lim_{A\to+\infty}\ln(1+A^2)=+\infty\end{aligned}$$

故无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 发散，而 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 有柯西主值.

复习思考题

1. 广义积分分为几类？分别叙述它们收敛的定义.

2. 若积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，$a<b$，问积分 $\int_b^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 是否收敛？反之又如何？

3. 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的意义如何？若积分 $\int_{-\infty}^{a}f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 都发散，积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 能否收敛？

4. 若积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_A^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=0$，对否？

5. 试建立积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 的分部积分与换元公式.

习题 3.6

1. 判断下列广义积分的收敛性

(1) $\int_{2}^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$　　(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

(3) $\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^k}\mathrm{d}x$　　(4) $\int_{0}^{+\infty}x\sin x\mathrm{d}x$

(5) $\int_{0}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$　　(6) $\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\cos bx\mathrm{d}x$

(7) $\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{arctg}x}{x^2}\mathrm{d}x$　　(8) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$

(9) $\int_{1}^{2}\frac{x}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$　　(10) $\int_{0}^{2}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$

(11) $\int_{0}^{2}\frac{1}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x$　　(12) $\int_{a}^{2a}\frac{1}{(x-a)^{3/2}}\mathrm{d}x$

(13) $\int_{0}^{2}\frac{1}{(1-x)^2}\mathrm{d}x$　　(14) $\int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

2. 计算下列广义积分

(1) $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^4}\mathrm{d}x$　　(2) $\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x$, $(a>0)$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+6x+10}\mathrm{d}x$　　(4) $\int_{0}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$

(5) $\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x$　　(6) $\int_{a^2}^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$, $(a\neq 0)$

(7) $\int_{0}^{+\infty}x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ (n 是正整数)

(8) $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{(a^2+x^2)^n}\mathrm{d}x$ (n 是正整数, $a>0$)

(9) $\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$　　(10) $\int_{0}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{d}x$

(11) $\int_{1}^{2}\frac{x}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$　　(12) $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$

(13) $\int_{0}^{1}\frac{x\ln x}{(1-x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$　　(14) $\int_{0}^{1}\frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ (m 是自然数)

(15) $\int_{0}^{1}\frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ (n 是正整数)

(16) $\int_{0}^{1}(\ln x)^n\mathrm{d}x$ (n 是正整数)

总 复 习 题

1. 求下列不定积分

(1) $\int \frac{1}{x(x^m+1)}\mathrm{d}x$，$m\geqslant 2$ 是正整数

(2) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-2x^2-1}}\mathrm{d}x$ (3) $\int \frac{1}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

(4) $\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$ (5) $\int \frac{1}{a+\mathrm{e}^{bx}}\mathrm{d}x$，$(ab\neq 0)$

(6) $\int \frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x+r^2}\mathrm{d}x\ (r>0)$

2. 设 $I_{p,q}=\int \sin^p x\cos^q x\,\mathrm{d}x$，且 $p+q\neq 0$，证明

$$I_{p,q}=\frac{\sin^{p+1}x\cos^{q-1}x}{p+q}+\frac{q-1}{p+q}I_{p,q-2}$$

3. 试从 $\int_{-1}^{0}\frac{1-t^n}{1-t}\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0}(1+t+\cdots+t^{n-1})\mathrm{d}t$ 与 $\left|\int_{-1}^{0}\frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_{-1}^{0}|t^n|\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}$，导出

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln 2$$

4. 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续可微，试求极限

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\alpha x\,\mathrm{d}x$$

5. 设 $g_\alpha(x)=\mathrm{e}^{-\alpha x^2}(\alpha>0)$，且有 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\pi}$，证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty}g_\alpha(x-t)g_\beta(t)\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha+\beta}}g_{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}}(x)$$

6. 试求曲线 $y=x^k(k>0)$与直线 $y=a^k$，及 y 轴所围成的平面图形绕 y 轴旋转一周所成旋转体的体积$(0\leqslant x\leqslant a)$，试问该体积与旋转体外接圆柱体的体积有何关系？

7. 设 $f(x)$在$[-2a,2a](a>0)$上具有连续的微商，求极限

$$I=\lim_{a\to 0^+}\frac{1}{4a^2}\int_{-a}^{a}[f(t+a)-f(t-a)]\mathrm{d}t$$

8. 若 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 是满足 $a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{n}+\frac{a_n}{n+1}=0$ 的实数，则方程

$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$ 在$[0,1]$上至少有一个根.

9. 设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$,证明:$\displaystyle\int_0^{(\sin x)^2}\arcsin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t+\int_0^{(\cos x)^2}\arccos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}$.

10. 设 $F(x)=\displaystyle\int_a^b f(t)\mid x-t\mid \mathrm{d}t$, $(a<x<b)$,其中 $f(t)$ 是连续函数,求证 $F''(x)=2f(x)$.

11. 求证 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x\mid\sin t\mid\mathrm{d}t}{x}=\frac{2}{\pi}$.

12. 设 $f(x)$在$[a,b]$上可微,且$|f'(x)|\leqslant M$,$f(a)=0$,证明

$$\int_a^b\mid f(x)\mid\mathrm{d}x\leqslant\frac{M}{2}(b-a)^2.$$

13. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上有连续的一阶微商,且 $|f'(x)|\leqslant M$,$f(0)=f(1)=0$,证明:$\left|\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{4}M$.

14. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上有连续的一阶微商,$f(0)=0$,$f(1)=1$,证明 $\left|\displaystyle\int_0^1[f(x)-f'(x)]\mathrm{d}x\right|\geqslant\frac{1}{\mathrm{e}}$ 且 $f(x)-f'(x)$ 在$[0,1]$上不变号.(提示:$[f(x)\mathrm{e}^{-x}]'\mathrm{e}^x=f'(x)-f(x)$).

15. 设 $f(x)$,$g(x)$都在$[a,b]$上连续,证明

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

16. 设 $f(x)$在$[a,b]$上可微,且 $f'(x)$连续,$f(a)=0$,证明

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

4 可积常微分方程

何谓常微分方程？按照习惯的说法，就是联系一个自变量、未知函数以及未知函数的某些微商的方程式. 研究一个常微分方程主要是给出它的各种求解方法，以及讨论其解的某些性质. 本章的内容是介绍几类可用分析方法求解的一阶与可降阶的二阶常微分方程，即所谓可积常微分方程.

4.1 常微分方程的基本概念

在自然科学、工程技术、医学、自动控制与经济管理等的许多问题中，常常需要我们根据变量之间所遵循的变化规律去确定它们的函数关系，而这些待定的未知函数又往往和它们的微商或微元相联系，并构成一个方程式，即所谓常微分方程. 然后利用常微分方程去确定函数关系. 这种应用常微分方程解决实际问题的过程，通常分为下列三步：

1. 从实际问题出发，由未知函数与其微商所满足的规律；或某个未知量的微元所满足的规律；或通过模拟近似建立常微分方程；

2. 求出常微分方程的解，并分析其特性；

3. 利用所得的结果去解释实际问题，从而对某些自然、社会及经济现象中的特定性质进行预测，达到能动地改造世界，解决实际问题.

下面先看几个例子.

例 1 一潜水艇在水中下降时，其所受阻力与下降的速度成正比. 若潜水艇由静止状态开始运动，求潜水艇下降速度的变化规律.

解 根据牛顿第二定律建立方程式. 取时间 t 为自变量，未知函数为潜水艇下降速度 $v(t)$. 大家知道，潜水艇主要是依靠它在水中的重力 w 克服阻力而作铅垂方向的下降运动. 在 t 时刻所受阻力为 $-kv(t)$，其中 k 是正的比例常数. 于是按牛顿第二定律得其运动方程为

$$\frac{w}{g} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = w - kv(t),\ t > 0,$$

其中 g 为重力加速度. 由题意知与此运动有关的限制条件为初始时刻 $t=0$ 时的条件：$v(0)=0$. 通常称为初始条件.

例 2 取一长为 l 的细线，一端固定，另一端系质量为 m 的质点，这样就构成一个单摆. 今设此单摆在其平衡位置附近作微小振动，且最大偏角为 θ_0. 若在开始时刻 $t=0$ 时，摆处于平衡位置，试在不计阻力的条件下求摆的运动规律.

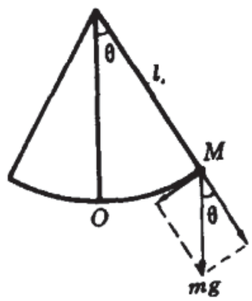


图 4.1

解 以时间 t 为自变量，细线与铅垂线的偏角为未知函数 $\theta(t)$（如图 4.1）. 应用能量守恒原理来建立方程式. 由于不计阻力，当单摆来回运动，即振动时，质点 M 只能在半径为 l 的圆弧上运动，故其角速度为 $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$，而线速度为 $l\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$. 于是在时刻 t 所具有的动能为 $\frac{1}{2}ml^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$，其势能等于 $mg(l-l\cos\theta)$. 根据能量守恒原理，有

$$\frac{1}{2}ml^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 + mg(l - l\cos\theta) = C(\text{常数})$$

将上式两端关于 t 求微商，就得单摆振动的运动方程为

$$ml^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + mgl\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0$$

由于当 $t>0$ 时，$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\neq 0$，故有

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega^2\sin\theta=0,\ t>0,\ 其中\ \omega=\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

若单摆的振动是微小的，这时 $\theta\ll 1$，故有 $\sin\theta\approx\theta$，得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega^2\theta=0\ (t>0)$$

这就是描述单摆微振动的运动方程.

当 $t=0$ 时，$\theta(0)=0$，$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=0}=\dot{\theta}_0>0$，这时势能为零，故有 $\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_0^2=C$；而当 $\theta(0)=\theta_0$ 时，动能为零，势能为 $mg(l-l\cos\theta_0)$，当 $\theta_0\ll 1$ 时，有 $1-\cos\theta_0=\frac{1}{2}\theta_0^2$，故得到

$$\frac{1}{2}mgl\theta_0^2=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_0^2$$

或有

$$\dot{\theta}_0=\sqrt{\frac{g}{l}}\theta_0=\omega\theta_0$$

因此，初始条件可假设为：$\theta(0)=0$，$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=0}=\omega\theta_0$.

例 3 求一曲线，使在此曲线上任意一点 (x,y) 处的切线垂直于该点的向径.

解 根据微商的几何意义建立方程式. 取点的横标 x 为自变量，纵标 y 为未知函数. 由于未知曲线上任意一点处切线的斜率为 $\frac{dy}{dx}$，而向径的斜率为 $\frac{y}{x}$，故按题意它们应有负倒数关系，即有

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

其初始条件应为 $y|_{x=x_0}=y_0$，即曲线通过已知点 (x_0,y_0).

例 4 将温度为 100℃的物体放在温度为 0℃的介质中冷却，求物体的温度 T 与时间 t 的依赖关系.

解 应用微元法. 设自变量为时间 t，未知函数 $T(t)$ 表示物体的温度. 初始时刻 $t=0$ 时，物体温度为 100℃. 考虑从 t 到 $t+dt$ 这

段时间内，从物体所放出的热量的微元变量 dQ. 根据牛顿的冷却定律：这个热量 dQ 是与时间间隔 dt 及在瞬时 t 物体与介质的温度差成正比. 于是可写成

$$dQ = \alpha T dt,\ t > 0$$

其中 α 为比例常数.

另外，若把该物体的比热记作 c，则又有

$$dQ = -c dT$$

这里出现负号是因为物体的温度在降低，而 dT 是负的，比较 dQ 的两个表达式就得到

$$\frac{dT}{dt} = -kT,\ t > 0$$

其中 $k = \frac{\alpha}{c}$ 是正常数. 其初始条件为 $T(0) = 100℃$.

例 5 设在一高为 $H=2$ 米，底半径 $R=0.5$ 米的圆柱形桶内盛满水，桶底有一半径为 $r=0.5$ 厘米的圆形小孔. 问桶中的水从小孔全部流尽需要多少时间？

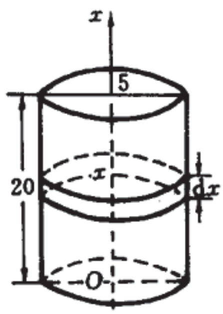


图 4.2

解 如图 4.2. 设自变量为时间 t，未知函数 $x(t)$ 表示水面的高度. 设坐标原点 O 在底部小孔处. x 轴的正向铅直向上. 初始时刻 $t=0$ 时，水面高度为 $x(0)=H=2$ 米，今要建立 $x(t)$ 所满足的方程式，并由 $x(T)=0$，求出桶中的水全部流尽所需要的时间 T.

时刻 t 的水面高度简记为 x，时刻 $t+dt$ 的水面高度为 $x+dx$，由于水面不断下降，因此 $dx<0$. 考虑从 t 到 $t+dt$ 这段时间内桶内水的体积微元为 $dV=-\pi R^2 dx$.

另外，由面积为 $s=\pi r^2$ 的小孔在从 t 到 $t+dt$ 这段时间内流出的水的体积微元为 $s \cdot v(x)dt$，其中 $v(x)$ 表示水面高度为 x 时，

从小孔中流出的水沿 x 轴反向的速度. 这里近似地把 t 到 $t+\mathrm{d}t$ 这段时间里,即水面高度从 x 到 $x+\mathrm{d}x$ 时流出水的速度看成保持不变的 $v(x)$. 根据水力学中有关的定律知,当水面处于 x 的深度时,水从小孔流出的速度为

$$v(x)=0.62\sqrt{2gx}$$

其中 g 是重力加速度.

从前面的分析得到

$$\mathrm{d}V=-\pi R^2\mathrm{d}x=\pi r^2 v(x)\mathrm{d}t$$

将 $v(x)$ 的表达式代入上式,有

$$-\pi R^2\mathrm{d}x=0.62\pi r^2\sqrt{2gx}\,\mathrm{d}t$$

或有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-0.62\left(\frac{r}{R}\right)^2\sqrt{2gx}$$

且初始条件为 $x(0)=H$.

例 6 对市场经济而言. 商品价格取决于市场供给与需求之间的关系,一个最一般而又最简单的经济规律是要求市场价格能促使商品的供求平衡. 这种价格称为均衡价格.

一般来说,市场价格不会恰好等于均衡价格,市场价格应该是时间 t 的函数. 现在要建立市场价格形成的动态过程的方程式.

解 这时我们不能像物理、力学中的问题那样精确地建立方程式. 而采用模拟近似的方法. 先提出一些对规律的分析与假想,然后建立模拟这个动态过程的方程式. 求其解后,再去与实际的动态情况作比较以决定模拟近似方程式的好坏,并确定是否采纳.

仍设时间 t 为自变量,商品价格 $p(t)$ 为未知函数. 通过分析可用价格随时间的变化率正比于需求与供给之差的假设来作模拟近似,即有关系式

$$\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t}=\alpha\{f[p(t),r]-g[p(t)]\},\ t>0$$

其中 α 为正常数,r 为参数,表示消费者的收入;$f(p,r)$ 为需求函

数，$g(p)$为供给函数. 设初始时刻 $t=0$ 时，$p(0)=p_0$.

通过前面的六个具体的实例，不难抽象出下面的一些概念.

一般说来，在一个方程式中，除含有一个自变量的未知函数之外，还含有未知函数的微商或微分，这个方程式就称为常微分方程.

例如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy^2+y^2$$

$$y''^2+ay'+by=\sin x$$

$$(x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y=0$$

以及例 1 至例 6 所导出的方程式就都是常微分方程. 今后，往往把常微分方程简称为微分方程，甚至于更简单地称为方程.

方程中出现的未知函数的最高微商或微分的阶数，称为方程的阶. 本章将按方程的阶来划分方程的类型.

例如，前面的第一和第三个方程，以及例 1、例 3、例 4、例 5 及例 6 中的方程都是一阶方程，而第二个方程与例 2 中的方程是二阶方程. 因此，以自变量 x，未知函数为 y 的 n 阶方程的一般形式应为关系式

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$$

若能从上述关系式中解出最高阶微商，就得到 n 阶方程

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$$

以后讨论的微分方程都是已解出最高阶微商或能解出最高阶微商的方程.

若方程对于未知函数和它的各阶微商的全体而言是一次，它就称为线性方程，否则就称为非线性方程. 如例 1、例 2 中的近似方程，例 4 都是线性方程，而例 2 的一般形式，例 3，例 5 以及前面的三个方程都是非线性的.

微分方程有显式和隐式两种形式的解.

若存在一个在某区间(a,b)之内 n 次连续可微的函数

$y=\varphi(x)$，当把它代入 n 阶方程后，就使

$$\varphi^{(n)}(x) = f[x, \varphi(x), \cdots, \varphi^{(n-1)}(x)]$$

在区间(a,b)内恒成立，则函数 $y=\varphi(x)$就称为这个 n 阶方程的显式解，其中(a,b)称为解 $y=\varphi(x)$的定义区间. 但是有时不易求得 n 阶方程的显式解，而只能求得 x 与 y 的一个关系式$\Phi(x,y)=0$. 若由它确定的函数 $y=\varphi(x)$是 n 阶方程的解，则称 $\Phi(x,y)=0$ 是这个 n 阶方程的隐式解，并简称为 n 阶方程的积分. 对于一个微分方程，求得它的积分也就相当于求得它的解.

通过所举的实例，我们常要求满足特定条件的解. 这些特定条件称为定解条件，满足这些定解条件的解称为定解问题的特解. 我们主要讨论最常见、最重要的满足初始条件的特解. 这种定解问题称为初始值问题，即有形式

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \\ y\big|_{x=x_0} = y_0, y'\big|_{x=x_0} = y_0', \cdots, y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

它也称为柯西问题.

通常把一个实际问题抽象成数学问题之后，应满足下列必要条件：

1° 解的存在性，即至少有一个解；

2° 解的唯一性，即至多有一个解；

3° 解对所给初始条件的连续依赖性.

只有这样才说明问题提得正确. 条件 1°是明显的逻辑条件，不过，我们不能简单地说因为实际问题有解，所以数学问题也有解. 由于数学模型会出现误差，因此可能满足常微分方程的解不存在；条件 2°也是必要的，因为实际问题只有一解，故数学问题也必须只有一个解；条件 3°也是有用的. 由于初始条件是测量得到的，在测量过程中总存在小的误差，故要求数学问题的解，当测量的初始数据出现小的误差时，不同的初始条件给出的相应的解之间差别也应当小.

这里我们假设：所给的初始值问题存在唯一的并连续地依赖

于初始条件的解. 关于它的证明将在第十二章中给出.

微分方程与普通代数方程不同,微分方程的解,通常不是常数而是函数;且解的个数有无限之多. 例如,考虑一阶方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

它的解族为

$$y(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

其中 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数,C 是积分常数. 积分一次总要出现这样一个常数. 由 C 的任意性可知,这个方程的解有无限多个. 而对任意给定的初始条件 $y|_{x=x_0}=y_0$,总能找出任意常数 C 的特定值(可能为∞),使得对应的解满足给定的初始条件. 故把含任意常数的解称为方程的通解,而 C 取特定值时所得到的解称为方程的特解. 一般地有如下的概念

定义 设 n 阶微分方程 $y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$的解为 $y=\varphi(x,C_1,\cdots,C_n)$(或 $\Phi(x,y,C_1,C_2,\cdots,C_n)=0$),含有 n 个独立的任意常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$,并在区间(a,b)内对任意给定的初始条件 $y|_{x=x_0}=y_0, y'|_{x=x_0}=y_0', \cdots, y^{(n-1)}|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}$,总能找出任意常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 的特定值 $\overline{C}_1,\overline{C}_2,\cdots,\overline{C}_n$(可能为$\infty$),使得对应的解 $y=\varphi(x,\overline{C}_1,\cdots,\overline{C}_n)$(或 $\Phi(x,y,\overline{C}_1,\cdots,\overline{C}_n)=0$)满足 n 阶微分方程,则称 $y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$(或 $\Phi(x,y,C_1,\cdots,C_n)=0$)是 n 阶微分方程在定义区间(a,b)内的通解(或通积分). 为了方便,今后统称为通解.

下一节讨论几类方程的求解问题. 主要是通过积分来进行求解.

习题 4.1

1. 指出下列方程的阶、自变量和未知函数:

(1) $\frac{dx}{dt}+P(t)x=Q(t)x^n$

(2) $\frac{d^2y}{dx^2}+a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y=f(x)$

(3) $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2-4y=0$

其中 P,Q,a,b,f 都是已知函数,n 为常数.

2. 验证下列各题中左边的函数族是右边方程的解:

(1) $y=Ce^{\int P(x)dx}$, $\qquad y'=P(x)y$

(2) $y=C_1\cos wx+C_2\sin wx$, $\qquad y''+w^2y=0$

(3) $x\sin^2y+y^2=C$, $\qquad (\sin^2y)dx+(x\sin 2y+2y)dy=0$

3. 有一曲线,其上任一点的切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标,试求这曲线所适合的微分方程.

4. 设有质量为 m 的质点,用长为 l 的细线悬挂在 O 点,让它左右来回摆动.略去细线的质量与弹性.但设质点在摆动时受到空气阻力,其大小与质点的线速度成正比.试求摆动角度 θ 所满足的微分方程,并给出两种不同的初始条件.

5. 高 H 为 20 厘米的圆锥形漏斗盛满水,上口半径 R 为 12 厘米,底口半径 r 为 0.3 厘米.试建立描述漏斗内的水面下降的运动方程.

4.2 一阶常微分方程

对一阶方程,这时有形式

$$F(x,y,y')=0$$

或能解出一阶微商,则有形式

$$y'=f(x,y)$$

4.2.1 可分离变量的方程

给定一微分方程如何求它的解,这是十分重要的问题.所谓分离变量法是用来求解某些一阶方程的一个基本方法.

若 $f(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$,则一阶方程有形式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(x)\psi(y)$$

它称为可分离变量的方程.

若 $\psi(y)\neq 0$,且假设 $\varphi(x)$ 与 $\psi(y)$ 分别是 x 与 y 的连续函数,于是这个方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\psi(y)}=\varphi(x)\mathrm{d}x$$

就是说,可把微分方程化成一端只含 y 的函数与 $\mathrm{d}y$,另一端只含 x 的函数与 $\mathrm{d}x$. 设 $y=y(x)$ 是它的解,将这个解代入方程后得到恒等式

$$\frac{y'(x)}{\psi[y(x)]}\mathrm{d}x=\varphi(x)\mathrm{d}x$$

将上式两端积分,并由 $y=y(x)$ 引入变量 y,得到

$$\int\frac{1}{\psi(y)}\mathrm{d}y=\int\varphi(x)\mathrm{d}x+C$$

这里出现的不定积分只表示被积函数的某一个原函数. 这样一来,我们就得到变量 x 与 y 之间的一个关系式. 通常为隐式解的形式,若能从中解出 y 为 x,C(或 x 为 y,C)的函数,则可得方程的显式解. 由于这个解中含有一个任意常数,并对任给的初始条件 $y|_{x=x_0}=y_0$,总能找出任意常数 C 的特定值(可能为∞),使对应的解满足此初始条件,因此它是这个一阶方程的通解.

必须注意:若存在常数$\bar{y}$致使 $\psi(\bar{y})=0$,把函数 $y=\bar{y}$ 代入原方程验证,可知它是这个一阶方程的一个特解. 由于这种解往往在进行分离变量时丢失,且有时又不包含在通解中,即无论让任意常数 C 取何值(包括∞)都得不到这个特解. 因此必须另外补上才能得到一阶方程的全部解. 从而不难看出通解未必是方程的全部解. 究其原因是这种解已不满足唯一性假设.

例 1 求方程

$$x^2y\mathrm{d}y+\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}x=0$$

的解.

解 当 $x\neq0,1-y^2\neq0$ 时,分离变量后可将方程改写为

$$-\frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

两端积分得

$$\sqrt{1-y^2}=-\frac{1}{x}+C$$

因而可得到方程的通解为

$$\sqrt{1-y^2}+\frac{1}{x}=C$$

其中 C 为任意常数.

容易看出,$x=0$ 与 $y=\pm1$ 都是原方程的解. 它们都是在分离变量的过程中丢失的,且 $y=\pm1$ 不包含在通解中,故应补上. 于是这个方程的解应为

$$\sqrt{1-y^2}+\frac{1}{x}=C \text{ 及 } y=\pm1$$

在第一节中已指出,实际问题中往往要求的是满足某一特定条件的方程的特解,即能用来确定任意常数的初始条件,它是由问题本身给出.

例 2 求解第一节的例 1,即求解初始值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{w}{g}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=w-kv,\ t>0\\ v\,|_{t=0}=0\end{cases}$$

解 若 $w-kv\neq0$,将原方程分离变量后得

$$\frac{w\mathrm{d}v}{g(w-kv)}=\mathrm{d}t$$

两端积分后,且有 $w-kv\neq0$,故得

$$-\frac{w}{kg}\ln|w-kv|=t+C_1$$

或有通解 $v(t)=\frac{1}{k}(w-C\mathrm{e}^{-\frac{kg}{w}t})$,其中 $C=\pm\mathrm{e}^{\frac{C_1kg}{w}}$. 由于潜水艇是由静止状态开始运动,即有初始条件 $t=0$ 时,$v(0)=0$,从而有

$$C = w$$

由此推知，有

$$v(t) = \frac{w}{k}(1 - e^{-\frac{kg}{w}t})$$

这就是潜水艇下降速度的变化规律.潜水艇下沉过程中，速度 v 从零开始逐渐增大.当 t 趋于无穷时，速度 $v(t)$ 趋于$\frac{w}{k}$.这就是说，在相当长时间之后，潜水艇以匀速度$\frac{w}{k}$下沉.

另外，若 $w-kv=0$，有特解 $v=\frac{w}{k}$.易见它包含在通解之中.

顺便指出：对于从空中降落的跳伞员，这个结论同样成立.因为降落伞正是按照空气对伞的浮力与它下落的速度成正比而设计制造的，所以只要跳伞员在空中有足够长的停留时间，他到达地面时的速度就近似地等于匀速度$\frac{w}{k}$.

例 3 求解第一节的例 3.

解 将方程$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$分离变量后，有

$$y\mathrm{d}y = - x\mathrm{d}x$$

两端积分后，得方程的通解，实际上为通积分

$$x^2 + y^2 = C$$

其中 $0<C<+\infty$.故通解中的任意常数并非完全是任意，而是受到某些约束和限制的.这主要是由函数的定义域的限制所引起的.它是以原点为圆心的同心圆族.为了定出任意常数 C，就必须给定初始条件.例如，设所求的曲线过点(3,4)，则有

$$C = 3^2 + 4^2 = 25$$

从而得到这条曲线为圆周

$$x^2 + y^2 = 25$$

例 4 求解第一节的例 4.

解 若 $T\neq 0$,将方程$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-kT$ 分离变量后,有

$$\frac{\mathrm{d}T}{T}=-k\mathrm{d}t$$

积分得

$$\ln|T|=-kt+C_1$$

或有

$$T=C\mathrm{e}^{-kt}$$

其中 $C=\pm \mathrm{e}^{C_1}$,这就是方程的通解. 因为在开始时,即 $t=0$ 时,物体的温度尚未冷却,所以有 $T=100$,故得

$$C=100$$

代入通解后,得到物体的冷却规律为

$$T=100\mathrm{e}^{-kt}$$

当 t 趋向无穷时,T 趋向于零. 这就是说经过很长的时间后,物体冷却至零度. 这与实际的观测是一致的.

若 $T=0$,显然也是方程的解,且包含在通解中.

例 5 求解第一节的例 5.

解 若 $x>0$,将方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-0.62\left(\frac{r}{R}\right)^2\sqrt{2gx}$$

分离变量后,得

$$\mathrm{d}t=\frac{-1}{0.62\sqrt{2g}}\left(\frac{R}{r}\right)^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$$

积分后,有

$$t=-\frac{1}{0.31\sqrt{2g}}\left(\frac{R}{r}\right)^2\sqrt{x}+C$$

因为开始时,即 $t=0$ 时,桶中的水还未流出,所以 $x=H$,故得

$$C=\frac{1}{0.31\sqrt{2g}}\left(\frac{R}{r}\right)^2\sqrt{H}$$

从而得到

$$t=\frac{1}{0.31\sqrt{2g}}\left(\frac{R}{r}\right)^2(\sqrt{H}-\sqrt{x})$$

故桶中的水全部流尽，即 $x=0$ 时所需的时间为

$$t=\frac{1}{0.62}\left(\frac{R}{r}\right)^2\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

代入所设的数据后得到

$$t\approx 10304\ 秒 \approx 3\ 小时$$

易见，$x=0$ 也是方程的解，但为丢失的解.

例 6 设有 A,B 两种物质，在一容器中经化学反应后产生新物质 D，A 的一个分子与 B 的一个分子结合而生成 D 的一个分子，即有

$$A+B\rightarrow D$$

这种化学反应称为二级化学反应. 根据化学中的质量作用定律，若容器中的温度保持一定，则在任何时刻物质形成的速率(反应速率)与该时刻容器中物质 A 与 B 的浓度的乘积成正比. 试研究这种化学反应.

解 设在化学反应开始时刻 $t=0$ 时，物质 A 与 B 的浓度分别为 α 和 β(单位：克分子/立升)，而在时刻 t 物质 D 的浓度为 $x(t)$，则在此时刻 A 的浓度应为 $\alpha-x$，B 的浓度应为 $\beta-x$. 因此，根据质量作用定律，有

$$\frac{dx}{dt}=k(\alpha-x)(\beta-x),\ t>0$$

其中 $k>0$ 为比例常数.

若 $(\alpha-x)(\beta-x)\neq 0$，分离变量后得

$$\frac{dx}{(\alpha-x)(\beta-x)}=k\,dt$$

设 $\alpha\neq\beta$，进行部分分式，有

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{\alpha-x}-\frac{1}{\beta-x}\right)dx=k\,dt$$

由于总有 $\alpha-x\neq 0$ 与 $\beta-x\neq 0$，积分后得到

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\ln\left|\frac{\beta-x}{\alpha-x}\right| = kt + C$$

或

$$\frac{\beta-x}{\alpha-x} = Ce^{k(\beta-\alpha)t}$$

其中 $C=\pm e^{C_1(\beta-\alpha)}$,由初始条件可知,当 $t=0$ 时. $x(0)=0$,故得

$$C = \frac{\beta}{\alpha}$$

代入后得特解

$$x(t) = \frac{\alpha\beta[1-e^{k(\beta-\alpha)t}]}{\alpha-\beta e^{k(\beta-\alpha)t}}$$

由此可见,有

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \begin{cases}\alpha, \text{ 当 } \beta>\alpha \text{ 时}\\ \beta, \text{ 当 } \alpha>\beta \text{ 时}\end{cases}$$

其意义是:若使这种二级化学反应一直进行下去,直到原物质 A(或 B)耗尽为止,则新物质 D 在容器中的浓度越来越接近原物质 A(或 B)的浓度.

若 $\alpha=\beta$,有

$$\frac{dx}{dt} = k(\alpha-x)^2$$

则可解得

$$x(t) = \frac{\alpha^2 kt}{1+\alpha kt}$$

由此推知

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \alpha$$

其意义与 $\alpha\neq\beta$ 的完全相同.

最后,当 $(\alpha-x)(\beta-x)=0$ 时,则方程有解:$x=\alpha$ 或 $x=\beta$. 易见它们都包含在通解中.

4.2.2 齐次方程

若常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$$

右端的函数 $f(x,y)$可写成$\frac{y}{x}$的函数时，即 $f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$，则称该一阶方程为齐次方程. 例如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

就是齐次方程. 因为

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

易见，这时已无法直接使用分离变量法. 不过，我们可采取迂回的做法. 一个容易想到的方法就是作适当的变量代换，将齐次方程化为可分离变量的方程. 通过观察与试验后，可令 $u=y/x$，或 $y=xu$ 以引进 x 的新的未知函数 u. 这时原方程的右端仅是 u 的函数. 由于

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

因此原方程化为

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \varphi(u)$$

由此推出

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\varphi(u)-u}{x}$$

不难看出这是一个可分离变量的方程.

若 $\varphi(u)-u\neq 0$，分离变量后，给出

$$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \text{ 或 } \int \frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u} = \ln|x| + C,$$

算出积分后，再将 u 换成$\frac{y}{x}$，即得齐次方程的通解.

若 $\varphi(u)-u=0$ 有实根 $u_1,u_2,\cdots,u_m$，则有 $y=u_ix$，$i=1,2,$

$\cdots, m$,也是所给齐次方程的解,求解时应注意补上其中漏掉的,又不包含在通解中的特解.

若 $\varphi(u)-u\equiv 0$,这时由于$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=0$,故有

$$u = C(\text{常数})$$

将 u 代成 y/x,则 $y=Cx$ 就是这个特殊的齐次方程的通解. 当任意常数 C 取不同的值时,它表示一族过原点的直线.

例 1 求解方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x+y}{x-y}$$

解 这是一个齐次方程,令 $y=xu$ 可得

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1+u}{1-u}$$

或

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1+u^2}{1-u}$$

分离变量后得

$$\frac{1-u}{1+u^2}\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

积分得

$$\operatorname{arctg}u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln|x| + C_1$$

化简得

$$x\sqrt{1+u^2} = C\mathrm{e}^{\operatorname{arctg}u}, \text{其中 } C = \pm\,\mathrm{e}^{-C_1}$$

但 $u=\frac{y}{x}$,因此原方程的通解为

$$\sqrt{x^2+y^2} = C\mathrm{e}^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$$

若采用极坐标,由于 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$,因此上述通解可简单地写成

$$r = C\mathrm{e}^{\theta}$$

它表示一族指数螺旋曲线.

例 2 求解方程

$$x\mathrm{d}y=(y+\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x$$

解 先考虑 $x\neq 0$ 的情形. 则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}+\frac{|x|}{x}\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

当 $x>0$ 时,得齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

作代换 $y=xu$,得到

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1+u^2}$$

变量分离后,故有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

积分后得

$$\ln(u+\sqrt{1+u^2})=\ln x+C_1$$

其中 C_1 为任意常数. 或

$$u+\sqrt{1+u^2}=Cx$$

这里的 $C=\mathrm{e}^{C_1}>0$. 代回 $u=\frac{y}{x}$,给出

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$$

再以 $y-\sqrt{x^2+y^2}$ 乘上式两端得到

$$-x^2=Cx^2(y-\sqrt{x^2+y^2})$$

而 $x^2\neq 0$,则有

$$y-\sqrt{x^2+y^2}=-\frac{1}{C}$$

于是可解得

$$y=\frac{1}{2}\left(Cx^2-\frac{1}{C}\right)$$

当 $x<0$ 时,得方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

它也是一个齐次方程. 作代换 $y=xu$ 并代回方程后可解得同样的结果.

另外,不难得到 $x=0$ 也是方程的解. 但是这个解已包含在前面得到的结果之中. 总之,所给方程的解为

$$y=\frac{1}{2}\left(Cx^2-\frac{1}{C}\right),\ 且,\ C=e^{C_1}>0.$$

这是一族以 y 轴为对称轴且开口向上的抛物线.

例 3 设一小船在河一岸的点 A 处渡河,它在每一时刻的速率都是 v_1,其方向始终指向它出发时正对岸的一点 O. 若河水的流速为 v_2,河宽为 a,试求船的划行路线. 若能到达对岸,试求所需划行时间(图 4.3).

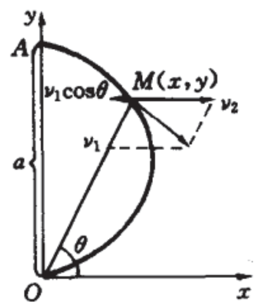


图 4.3

解 取正对岸的点 O 为原点,OA 为 y 轴,x 轴指向水流方向构成坐标系. 设时刻 t 时,小船位于河中的点 $M(x,y)$处,用 θ 表示 M 的向径与 x 轴的正向的夹角,则船的速度这时在各坐标轴上的分量为

$$\frac{dx}{dt}=v_2-v_1\cos\theta,\ \frac{dy}{dt}=-v_1\sin\theta$$

由此推得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-v_1\sin\theta}{v_2-v_1\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta-b}$$

其中 $b=\frac{v_2}{v_1}$. 若把 x 视为 y 的函数,则有

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\cos\theta - b}{\sin\theta}$$

因为

$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

且 $y>0$,所以

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - b\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}$$

这是一个齐次方程,令 $x=yu$,它变为

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -b\frac{dy}{y}$$

积分得

$$\ln(u+\sqrt{1+u^2}) = -\ln y^b + C$$

显然,当 $y=a$ 时,$x=0$,即船位于出发点,由此给出 $C=\ln a^b$,从而得到

$$\ln(u+\sqrt{1+u^2}) = \ln\left(\frac{a}{y}\right)^b$$

或

$$u+\sqrt{1+u^2} = \left(\frac{a}{y}\right)^b$$

再以 $u-\sqrt{1+u^2}$乘上式两端得

$$-1 = (u-\sqrt{1+u^2})\left(\frac{a}{y}\right)^b$$

即

$$u-\sqrt{1+u^2} = -\left(\frac{a}{y}\right)^{-b}$$

于是可解出

$$u = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{y}\right)^b - \left(\frac{a}{y}\right)^{-b}\right]$$

再用$\frac{x}{y}$代替 u,即得所求的船行路线为

$$x=\frac{a}{2}\left[\left(\frac{y}{a}\right)^{1-b}-\left(\frac{y}{a}\right)^{1+b}\right]$$

若小船的速率大于河水的流速，即 $v_1>v_2$，则有 $b<1$，这时小船沿上述路线划行在有限的时间内可到达对岸的 O 点处；

若小船的速率等于河水的流速，即 $v_1=v_2$，则有 $b=1$，且小船航行的路线是一条抛物线

$$x=\frac{a}{2}\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)$$

这时小船沿上述路线划行，从理论上来看要经历无限长的时间后可在下游离 O 点$\frac{a}{2}$处到达对岸. 但是小船实际上到达不了对岸.

事实上，从$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-v_1\sin\theta$ 及 $\sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x+y^2}}$可得到

$$\mathrm{d}t=-\frac{1}{v_1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}\mathrm{d}y$$

再由小船的划行路线可知，有

$$\mathrm{d}t=-\frac{1}{2v_1}\left[\left(\frac{y}{a}\right)^{-b}+\left(\frac{y}{a}\right)^{b}\right]\mathrm{d}y$$

两边作定积分，有

$$\begin{aligned}t&=\frac{a}{2v_1}\int_0^a\left[\left(\frac{y}{a}\right)^{-b}+\left(\frac{y}{a}\right)^{b}\right]\mathrm{d}\left(\frac{y}{a}\right)\\&=\begin{cases}\dfrac{a}{(1-b^2)v_1}, & \text{当 } v_1>v_2\text{，即 } b<1 \text{ 时}\\+\infty, & \text{当 } v_1=v_2\text{，即 } b=1 \text{ 时}\end{cases}\end{aligned}$$

最后，若小船的速率小于河水的流速，即 $v_1<v_2$，则 $b>1$，因为当 y 趋向零时，x 趋向于无穷，所以这时小船将被水流冲走而不能到达对岸.

考虑方程

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$的解法，其中 a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 都是常数.

(1) $a_1b_2-a_2b_1\neq0$ 的情形. 若 $c_1=c_2=0$,显然这个方程就是齐次方程. 当 c_1,c_2 不全为零时,作变量的平移代换

$$x=\xi+h,y=\eta+k$$

从而引进新的自变量 ξ 与新的未知函数 η,其中 h,k 是待定常数. 把它们代入方程之后,就得到

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}=f\left(\frac{a_1\xi+b_1\eta+a_1h+b_1k+c_1}{a_2\xi+b_2\eta+a_2h+b_2k+c_2}\right)$$

只要选择 h 与 k 使之满足

$$\begin{cases}a_1h+b_1k+c_1=0\\a_2h+b_2k+c_2=0\end{cases}$$

于是,就得到齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}=f\left(\frac{a_1\xi+b_1\eta}{a_2\xi+b_2\eta}\right)=f\left(\frac{a_1+b_1\dfrac{\eta}{\xi}}{a_2+b_2\dfrac{\eta}{\xi}}\right)=\varphi\left(\frac{\eta}{\xi}\right)$$

(2) $a_1b_2-a_2b_1=0$ 的情形

(i) 若 a_2,b_2 同时不为零,则$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\lambda$ 即 $a_1=\lambda a_2$, $b_1=\lambda b_2$,于是原方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left[\frac{\lambda(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right]$$

引进新的未知函数 $z=a_2x+b_2y$,由于$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=a_2+b_2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$故有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=a_2+b_2f\left(\frac{\lambda z+c_1}{z+c_2}\right)$$

这是可分离变量的情形.

(ii) 若 a_2,b_2 至少有一个为零. 当 $b_2\neq0,a_2=0$,则有 $a_1=0$;当 $a_2\neq0,b_2=0$,则有 $b_1=0$. 这时原方程的右端或者已不含变量 x,或者已不含变量 y,故显然是可分离变量的情形. 当 $a_2=b_2=0$ 时,只要令 $z=a_1x+b_1y$,也可把原方程化为可分离变量的情形.

例 4 求解方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-7x+3y+7}{3x-7y-3}$$

解 因为$a_1b_2-a_2b_1=(-7)(-7)-(3.3)=40\neq0$.故可令$x=\xi+h, y=\eta+k$,且$h$与$k$满足

$$\begin{cases}-7h+3k+7=0\\3h-7k-3=0\end{cases}$$

求解得$h=1,k=0$.故应作代换$x=\xi+1,y=\eta$,方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}=\frac{-7\xi+3\eta}{3\xi-7\eta}$$

再令$\eta=\xi u$,得

$$u+\xi\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=\frac{-7+3u}{3-7u}$$

化简后则有

$$\xi\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=\frac{7(u^2-1)}{3-7u}$$

若$u^2-1\neq0$,可分离变量为

$$\frac{1}{7}\left(\frac{3-7u}{u^2-1}\right)\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}$$

积分得到

$$-\frac{5}{7}\ln|1+u|-\frac{2}{7}\ln|1-u|=\ln|\xi|+C_2$$

或有

$$(1+u)^{\frac{5}{7}}(1-u)^{\frac{2}{7}}=\frac{C_1}{\xi},\text{其中 } C_1=\pm\mathrm{e}^{C_2}$$

但$u=\dfrac{\eta}{\xi}$,故有

$$(\xi+\eta)^5(\xi-\eta)^2=C$$

其中$C=C_1^7$,再由$\xi=x-1,\eta=y$,故得原方程的解为

$$(x+y-1)^5(x-y-1)^2=C$$

若$u^2-1=0$,得$u=\pm1$,回到原方程就有

$$x+y-1=0,\text{与 } x-y-1=0$$

它们也是方程的解. 但它们包含在上述通解中，从而所给方程的解为

$$(x+y-1)^5(x-y-1)^2 = C$$

其中 C 为任意常数.

例 5 求解方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x+4y+3}{x+2y+1}$$

解 因为 $a_1b_2 - a_2b_1 = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 0$，故应令 $z = x+2y$，由于

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 1 + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

因此原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{5z+7}{z+1}$$

若 $5z+7 \neq 0$，则可推出

$$\frac{z+1}{5z+7}\mathrm{d}z = \mathrm{d}x$$

积分后给出

$$\frac{z}{5} - \frac{2}{25}\ln|5z+7| = x + C_1$$

但 $z = x+2y$，故原方程的解为

$$2x - y + \frac{1}{5}\ln|5x+10y+7| = C_2$$

其中 $C_2 = -\frac{5}{2}C_1$，它又可写成

$$(5x+10y+7) = C\mathrm{e}^{-10x+5y}$$

其中 $C = \pm \mathrm{e}^{5C_2}$.

若 $5z+7=0$，则得原方程的一个解

$$5x+10y+7 = 0$$

当算作常数 C 取零值，即 C_2 趋于负无穷大时，则它包含在上述解中，故所给方程的通解为

$$5x + 10y + 7 = Ce^{-10x+5y}$$

其中 C 为任意常数.

4.2.3 线性方程

形如

$$a(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + b(x)y = f(x)$$

的方程称为一阶线性方程,其中 $a(x)\neq 0$,$b(x)$,$f(x)$都是已知函数. 由于 $a(x)\neq 0$,故可化为标准形式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$$

其中 $P(x)=b(x)/a(x)$,$Q(x)=f(x)/a(x)$. 这种方程的特征是:未知函数 y 及其微商$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$都是一次的. 若 $Q(x)\equiv 0$,它就称为线性齐次方程. 否则就称为线性非齐次方程. 那么如何求解一阶线性方程呢?

对于线性齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = 0$$

的求解是非常容易的. 实际上,它是一个可分离变量的方程.

若 $y\neq 0$,分离变量后得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -P(x)\mathrm{d}x$$

积分后给出

$$\ln|y| = -\int P(x)\mathrm{d}x + C_1$$

由此得出

$$y = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}, \text{其中 } C = \pm e^{C_1}$$

若 $y=0$,它是线性齐次方程的解. 在上述解中令 $C=0$ 也可得到. 故线性齐次方程的解为

$$y = C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

其中 C 为任意常数.

现在进一步考虑线性非齐次方程的求解. 这时分离变量法用不上了. 自然想到在解微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$时，分离变量法也用不上. 但是，只要作变量代换 $y=xu$ 就可以把它化为可分离变量的方程，从而解决了这种方程的求解问题.

于是，要将线性非齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$$

化为可分离变量的方程，也应该作变量代换才行. 我们经过试验后发现应将 $y=xu$ 修改成 $y=vu$，其中 $u=u(x)$仍作为新的未知函数，而 $v=v(x)$是一个待定函数. 将它代入线性非齐次方程得到

$$v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + P(x)v\right]u = Q(x)$$

易见，当待定函数 v 是线性齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + P(x)v = 0$$

的某一确定的特解，例如取

$$v = \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

时. 则这个修改后的变量代换就被确定为

$$y = \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}u$$

于是将线性非齐次方程就化为关于未知函数 u 的可分离变量方程

$$\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = Q(x)$$

其通解为

$$u(x) = \int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C$$

其中 C 为任意常数. 回到原来的未知函数 y，便得到线性非齐次方程的通解

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$$

这个求解方法称为一阶线性方程的变量代换法.

进一步地分析,不难看出:函数 $v=e^{-\int P(x)dx}$,恰好满足对应于线性方程的线性齐次方程

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

而这个方程的通解为

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}$$

其中 C 是任意常数. 若将这个结果与所作的变量代换

$$y = ue^{-\int P(x)dx}$$

比较,发现任意常数恰好与 u 的位置一致. 于是拉格朗日就大胆地将常数 C 变易为 x 的函数,并假设线性非齐次方程的解具有如下形式

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$$

将它代入线性方程. 因此就得到关于 $C(x)$ 的可分离变量方程

$$e^{-\int P(x)dx}\frac{dC(x)}{dx} = Q(x)$$

从而得到它的通解为

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$$

如此也得到线性非齐次方程的通解

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$$

这种求解方法称为常数变易法.

大家不难看出,常数变易法用来解一阶线性非齐次方程时和变量代换法无本质的区别. 但是,当推广到解高阶线性非齐次方程时,变量代换法就无能为力了,而常数变易法却显现出具有无比巨大的威力.

从线性方程的通解公式还可看出:线性非齐次方程的通解等

于对应的线性齐次方程的通解 $Ce^{-\int P(x)dx}$ 与线性非齐次方程的一个特解 $e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$ 之和.

例 1 求解方程

$$\frac{dy}{dx}+y\text{ctg}x=x^2\csc x \quad (x\neq 0)$$

解 这是一个线性方程,其中 $P(x)=\text{ctg}x, Q(x)=x^2\csc x$,它的通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \text{ctg}\,x dx}\left(\int x^2\csc x e^{\int \text{ctg}x dx}dx+C\right) \\ &= \frac{1}{|\sin x|}\left(\int x^2\frac{|\sin x|}{\sin x}dx+C\right) \\ &= \frac{1}{\sin x}\left(\frac{x^3}{3}+C\right) \end{aligned}$$

例 2 一支火箭在时刻 $t=0$ 自地面从静止开始升起. 设火箭的初始质量为 M_0 克. 它每秒钟喷射出 m 克的气体,气体质点相对于箭身的速度为 a,其方向指向地面. 若空气阻力与火箭运动的速度成正比. 试求火箭速度 v 与时间 t 的关系.

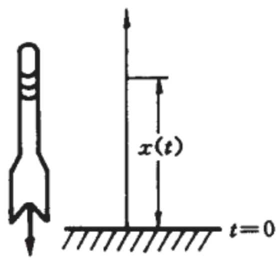


图 4.4

解 如图 4.4,选取坐标轴的正向为铅直向上. 由题意知,在时刻 t 火箭的质量为 M_0-mt,设速度为 $v(t)$,因此它的动量这时等于 $(M_0-mt)v(t)$.

另外,火箭运动时受到随时间而变化的地球引力为 $-(M_0-mt)g$,空气的阻力为 $-kv$,以及由于从尾部喷射出气体而产生使它上升的推力为 $m(a-v)$ 的作用. 于是由变质量的质点的牛顿第二定律:动量对时间的微商等于外力,得到

$$\frac{d}{dt}[(M_0-mt)v(t)]=-g(M_0-mt)-kv(t)+m(a-v(t))$$

或化简成

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{k}{M_0-mt}v=\frac{ma}{M_0-mt}-g$$

这是一个线性非齐次方程,求解可得

$$\begin{aligned}v(t)&=\mathrm{e}^{-\int\frac{k}{M_0-mt}\mathrm{d}t}\left[\int\left(\frac{ma}{M_0-mt}-g\right)\mathrm{e}^{\int\frac{k\mathrm{d}t}{M_0-mt}}\mathrm{d}t+C\right]\\&=(M_0-mt)^{\frac{k}{m}}\left[\int\left(\frac{ma}{M_0-mt}-g\right)(M_0-mt)^{-\frac{k}{m}}\mathrm{d}t+C\right]\\&=\frac{ma}{k}+\frac{g}{m-k}(M_0-mt)+C(M_0-mt)^{\frac{k}{m}}\end{aligned}$$

由初始条件,当 $t=0$ 时 $v=0$,可得

$$C=-M_0^{-\frac{k}{m}}\left(\frac{ma}{k}+\frac{M_0g}{m-k}\right)$$

代入所得的通解后,就得到火箭上升速度与时间的关系为

$$\begin{aligned}v(t)=&\frac{ma}{k}+\frac{g}{m-k}(M_0-mt)\\&-\left(\frac{ma}{k}+\frac{M_0g}{m-k}\right)\left(1-\frac{m}{M_0}t\right)^{\frac{k}{m}}\end{aligned}$$

注意:以上分析只有当$\frac{m}{M_0}t<1$ 或$\frac{M_0'}{m}>t$ 时才适用,其中 M_0' 表示火箭所带的燃料的质量. 通常总是成立的.

对于一阶方程 $F(x,y,y')=0$ 来说,其中的变量 x 与 y 的地位可以互易,即有时以 x 为自变量,y 为未知函数时可能不是线性方程,或求解较麻烦,如 4.2.2 中的例 3. 但是,若把 y 看作自变量,x 看作未知函数就可能是线性方程或求解较方便.

例 3 求 $2y^2\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=-y\mathrm{d}y+x\mathrm{d}y$ 的通解.

解 易见,$y=0$ 是方程的一解.

当 $y\neq0$ 时,将方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{2y^2+y-x}$$

这不是线性方程. 若变形为

$$y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=2y^2+y-x$$

或

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\frac{1}{y}x=1+2y$$

便是以 y 为自变量，x 为未知函数的线性方程.

它的通解

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{e}^{-\int\frac{\mathrm{d}y}{y}}\left[\int(1+2y)\mathrm{e}^{\int\frac{\mathrm{d}y}{y}}\mathrm{d}y+C\right] \\ &= \frac{1}{|y|}\left[\int(1+2y)\,|y|\,\mathrm{d}y+C\right] \\ &= \frac{1}{y}\left(\frac{1}{2}y^2+\frac{2}{3}y^3+C\right) \\ &= \frac{1}{2}y+\frac{2}{3}y^2+\frac{C}{y}. \end{aligned}$$

或

$$y=C\left(x-\frac{1}{2}y-\frac{2}{3}y^2\right)^{-1}$$

故 $y=0$ 也包含在通解之中.

有时会遇到所给方程不是线性的，互易变量的地位之后也不是. 那么一个可能的方法是经过适当的变量代换后，把它化成线性方程. 例如贝努利(Bernoulli)方程就是这种类型的方程.

4.2.4 贝努利方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n,\quad n\neq 0,1$$

的一阶方程称为贝努利方程. 它有点像线性方程，只是右端的 $Q(x)$ 多了一个因子 y^n. 消去它！故以 y^n 除此方程的两端得

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$$

再作适当代换，为此令 $u=y^{1-n}$，这时上式左端第二项已成为线性的了，而

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=(1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

或

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{(1-n)}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

故左端第一项也是线性的了.于是得到一个线性方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+(1-n)P(x)u=(1-n)Q(x)$$

由此就不难求得贝努利方程的通解.

自然,也可以用常数变易法来求贝努利方程的通解(参看第四章总复习题 5).

例 求解方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\mathrm{tg}x+y^2\cos x$$

解 这是贝努利方程,以 y^2 除方程的两端得

$$y^{-2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y^{-1}\mathrm{tg}x=\cos x$$

令 $u=y^{-1}$化为线性方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u\mathrm{tg}x=-\cos x$$

求解后,得

$$u=\mathrm{e}^{-\int\mathrm{tg}x\mathrm{d}x}\left(-\int\mathrm{e}^{\int\mathrm{tg}x\mathrm{d}x}\cos x\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=|\cos x|\left(-\int\frac{\cos x}{|\cos x|}\mathrm{d}x+C\right)$$

由此得到原方程的通解为

$$y=\frac{1}{u}=\frac{1}{(C-x)\cos x}$$

实际上,应用本章总复习题 5 的通解公式立即可得到它的通解.

4.2.5 黎卡提方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$$

的一阶方程称为黎卡提(Riccati)方程. 这种方程的右端是关于变量 y 的二次多项式. 这种方程在实际中非常有用. 可惜它的通解一般不能用初等函数及其积分来表示. 不过,若已经知道这种方程的一个特解 $y=\varphi(x)$,即有恒等式

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\equiv P(x)\varphi^2(x)+Q(x)\varphi(x)+R(x)$$

就有可能求出它的通解. 实际上,作变量代换

$$y=\varphi(x)+u$$

以引进新的未知函数 u,代入黎卡提方程就得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}&=P(x)\varphi^2(x)+Q(x)\varphi(x)+R(x)\\&\quad+P(x)u^2+[2P(x)\varphi(x)+Q(x)]u\end{aligned}$$

利用对 $\varphi(x)$ 的假设条件,上式可简化成

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=P(x)u^2+[2P(x)\varphi(x)+Q(x)]u$$

这是一个贝努利方程. 我们能够求出它的通解,再由代换 $y=\varphi(x)+u$,即得黎卡提方程的通解

$$y=\varphi(x)+\frac{\mathrm{e}^{\int[2P(x)\varphi(x)+Q(x)]\mathrm{d}x}}{C-\int P(x)\mathrm{e}^{\int[2P(x)\varphi(x)+Q(x)]\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}$$

其中 C 为任意常数.

要得到 $\varphi(x)$,一般可采用视察法. 但对一些特殊的黎卡提方程,可令 $\varphi(x)=tx^k$ 或 $\varphi(x)=t\mathrm{e}^{kx}$ 或 $\varphi(x)=t(x+l)^k$,代入原方程后,选择适当的 k 使之成为仅含 x 的一元方程,再取各系数为零时的公共解,就可得到相应的 t 的值. 就导出了这类黎卡提方程的特

解.

例 1 求解方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2-\frac{2}{x^2}$$

解 这是黎卡提方程，且 $P(x)=1,Q(x)=0,R(x)=-\dfrac{2}{x^2}$.

令 $\varphi(x)=tx^k$，代入原方程得到 $t^2x^{2k+2}-ktx^{k+1}-2=0$. 取 $k=-1$，有 $t^2+t-2=(t+2)(t-1)=0$，故有特解 $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$或$\dfrac{-2}{x}$. 若取 $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$是它的一个特解，代入前面的公式，得通解为

$$y=\frac{1}{x}+\frac{\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}}{C_1-\int\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}+\frac{x^2}{C_1-\frac{x^3}{3}}=\frac{1}{x}+\frac{3x^2}{C-x^3}$$

其中 $C=3C_1$.

例 2 考虑第一节中的例 6.

解 若取需求函数 $f(p,r)=5-p^2$，而供给函数 $g(p)=p-1$，则描述价格形成的动态过程的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\alpha(5-p^2-p+1)=-\alpha p^2-\alpha p+6\alpha,\ t>0$$

初始条件为 $t=0$ 时 $p(0)=p_0$. 这是一个黎卡提方程. 用视察法可得$\overline{p}=2$ 是它的一个特解. 通常称为均衡价格. 由于 $P(t)=-\alpha$，$Q(t)=-\alpha$，$R(t)=6\alpha$，代入前面的通解公式，故有

$$p(t)=2+\frac{\mathrm{e}^{-5\alpha t}}{C-\frac{1}{5}\mathrm{e}^{5\alpha t}}$$

代入初始条件确定 C 之后，得到价格与时间的关系为

$$p(t)=2+\frac{5(p_0-2)\mathrm{e}^{-5\alpha t}}{(p_0-2)(1-\mathrm{e}^{-5\alpha t})+5}$$

它表明：若初始价格 $p_0=\overline{p}=2$，则动态价格就维持在均衡价格$\overline{p}=2$上；若初始价格 p_0 大于均衡价格$\overline{p}=2$，则由于有衰减因子

e^{-5at}，$p(t)$严格减向均衡价格 $\bar{p}=2$ 接近；若初始价格低于均衡价格 $\bar{p}=2$，则 $p(t)$ 严格增接近于均衡价格 $\bar{p}=2$. 易见，总有 $\lim\limits_{t\to+\infty}p(t)=\bar{p}=2$. 即随着时间的推移价格越来越接近于均衡价格 $\bar{p}=2$.

用这样一个黎卡提方程来模拟价格的变化过程，在一定程度上反映了价格影响需求与供给的情形.

习题 4.2

1. 求下列可分离变量方程的通解：

(1) $(1+y^2)dx=xdy$　　　　(2) $y-xy=a(y+x^2y)$

(3) $\text{tg}x\cdot\sin^2ydx+\cos^2x\text{ctg}ydy=0$

(4) $yy'=\dfrac{1-2x}{y}$　　　　(5) $xy'+y=y^2$

2. 求下列方程满足所给初始条件的特解：

(1) $y'\sin x=y\ln y$，$y|_{x=\frac{\pi}{2}}=1$

(2) $y-xy'=6(1+x^2y')$，$y|_{x=1}=1$

3. 一条曲线过点(2,3)，其在坐标轴间的任意切线段被切点平分，求这曲线.

4. 一物体冷却的速率与物体和周围介质温度之差成正比，比例系数为 $k=k_0(1+\alpha t)$；在这种假定下，设 $t=0$ 时物体温度 $\theta=\theta_0$，介质温度为 θ_1，试求温度 θ 和时间 t 的依从关系.

5. 某液体起化学反应的速率与液体尚未起化学反应的存量成正比. 设液体总量为 a，试求这液体起化学反应之量与时间 t 的关系.

6. 一汽艇以速度 v 等于 10 公里/小时在静水上运动，它的发动机在开足马力后关掉，经过 20 秒后，汽艇的速度降低为 v_1 等于 6 公里/小时. 设水对汽艇运动的阻力和速度成正比，试求：

(1) 发动机停止 2 分钟后汽艇的速度；

(2) 发动机停止 1 分钟后汽艇所走的路程.

7. 求下列齐次方程和可化为齐次方程的解：

(1) $y'=\frac{y^2}{x^2}-2$　　(2) $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$

(3) $y^2+x^2y'=xyy'$　　(4) $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$

(5) $y'=\frac{1-3x-3y}{1+x+y}$　　(6) $y'=\frac{2y-x-5}{2x-y+4}$

(7) $\frac{dx}{x^2-xy+y^2}=\frac{dy}{2y^2-xy}$　　(8) $\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$

8. 一曲线上任意点 M 的向径的长度等于点 M 的切线和 y 轴的交点与原点间的距离，求这曲线.

9. 求下列线性方程和贝努利方程的解：

(1) $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$

(2) $y'+\frac{1-2x}{x^2}y=1$　　(3) $y'=\frac{1}{2x-y^2}$

(4) $y'=\frac{1}{x\cos y+\sin 2y}$　　(5) $y'=x\sqrt{y}+\frac{xy}{x^2-1}$

(6) $dy+(xy-xy^3)dx=0$　　(7) $(xy+x^2y^3)y'=1$

10. 由曲线上任意点的横坐标及该点切线与纵轴交点的纵坐标为边所作成的矩形面积为一常量 a^2，求这曲线.

11. 在电阻为 R，自感系数为 L 和电压为 V 的电路中，电流强度 I 满足方程

$$L\frac{dI}{dt}+RI=V$$

若 L,R 均为常数，而 $V=E\sin at$，其中 a 和 E 为常数，试求电流强度 I 与时间 t 的依从关系.

12. 求下列方程满足初始条件的特解：

(1) $y'=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$, $y(1)=1$

(2) $(x^2+2xy-y^2)dx+(y^2+2xy-x^2)dy=0$, $y(1)=1$

(3) $y'+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x}$, $y(\pi)=1$

(4) $y'+y\cos x=\sin x\cos x$, $y(0)=1$

13. 用适当的变量代换(如：$x=u^2$, $y=v^2$, $z=\sin y$, $z=\cos y$ 等)将下列方程化为齐次方程或线性方程，并求通解：

(1) $y'+x=\sqrt{x^2+y}$ (2) $(y^4-3x^2)\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}x=0$

(3) $(x-2\sin y+3)\mathrm{d}x+(2x-4\sin y-3)\cos y\mathrm{d}y=0$

(4) $y'=\dfrac{x}{\cos y}-\mathrm{tg}y$

(5) $xy'\ln x\sin y+\cos y(1-x\cos y)=0$

14. 求下列黎卡提方程的通解：

(1) $y'=xy^2-\dfrac{3}{x^3}$ (2) $xy'+y-\mathrm{e}^{-x}y^2=x\mathrm{e}^x$

4.3 可降价的二阶微分方程

二阶微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y',y'')=0$$

或从上述形式中能解出最高阶微商，得二阶方程

$$y''=f(x,y,y')$$

虽然对一般的二阶方程的求解较难，有的甚至不能求得用分析形式表达的解. 不过，仍有几种特殊类型的二阶方程是可以求解的. 其基本的想法是通过适当的变量代换使它降低阶数，化成一阶方程来解决.

4.3.1 不显含未知函数的二阶方程

设有不显含未知函数的二阶方程

$$y''=f(x,y')$$

易见，可以作变量代换 $y'=p$，它就降为一阶方程. 事实上，这时 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=p'$，于是所给方程化为

$$p'=f(x,p)$$

这是未知函数为 p 的一阶方程，因而求解起来一般要比求解二阶方程来得容易些. 设其通解为

$$p=\varphi(x,C_1)$$

但 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,故又得到一个一阶方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(x,C_1)$$

再求积分得

$$y=\int\varphi(x,C_1)\mathrm{d}x+C_2$$

这个含有两个独立的任意常数 C_1 与 C_2 的解族*,在区间(a,b)内对任给的初始条件 $y|_{x=x_0}=y_0$,及 $y'_{x=x_0}=y_0'$,总能找出 C_1 与 C_2 的特定值(可能为∞),使对应的解满足此初始条件,因此它是二阶方程 $y''=f(x,y')$在定义区间(a,b)内的通解.

例 1 求解方程

$$xy''+y'=4x \qquad (x\neq 0)$$

解 这是不显含未知函数的方程,令 $y'=p$,则得

$$xp'+p=4x$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xp)=4x$$

于是有

$$xp=2x^2+C_1$$

或

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x+\frac{C_1}{x}$$

积分得所求方程的通解为

$$y=x^2+C_1\ln|x|+C_2$$

在应用中要求满足特定条件的特解,即要确定出通解中的任

---

* 两个 C_1 与 C_2 独立是指行列式 $\begin{vmatrix}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}C_1} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}C_2}\\ \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}C_1} & \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}C_2}\end{vmatrix}\neq 0$

意常数 C_1 与 C_2. 这时只要给出初始条件就行了.

例 2 设有一线密度为 ρ 的均质而柔软的绳索,两端固定,试求这条绳索在自身重力作用下处于平衡状态时的形状.

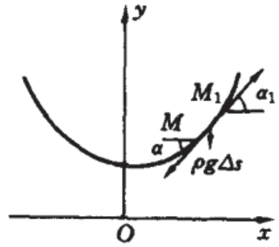


图 4.5

解 在绳索平衡时所在的平面内取定一直角坐标系 Oxy,使 y 轴过绳索的最低点且铅直向上(图 4.5),x 轴为水平. 设 $M(x,y)$ 是绳索上任意一点. 要求绳索的形状曲线方程 $y=y(x)$. 今考虑绳索上介于点 $M(x,y)$ 与 $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 之间的一弧段 $\overset{\frown}{MM_1}$ 受力情况. 由于长度为 Δs,则作用在弧段 $\overset{\frown}{MM_1}$ 上的重力为 $\rho g\Delta s$. 由于绳索的柔软性,在点 M 的张力应沿弧在该点的切线方向,设与水平线成 α 角,其大小为 T;同样,在点 M_1 的张力沿该点的切线方向,设与水平线成 α_1 角,其大小为 T_1. 因作用于弧段 $\overset{\frown}{MM_1}$ 上的外力相互平衡. 故这些力在各坐标轴上的分量之和或合力都为零,即有

$$T_1\cos\alpha_1 - T\cos\alpha = 0$$
$$T_1\sin\alpha_1 - T\sin\alpha - \rho g\Delta s = 0$$

或

$$T\cos\alpha = T_1\cos\alpha_1 \triangleq T_0$$
$$T\sin\alpha + \rho g\Delta s = T_1\sin\alpha_1$$

由此推得

$$T_0\operatorname{tg}\alpha + \rho g\Delta s = T_0\operatorname{tg}\alpha_1$$

由于 $\operatorname{tg}\alpha = y'(x)$,$\operatorname{tg}\alpha_1 = y'(x+\Delta x)$,故有

$$T_0\left[\frac{y'(x+\Delta x)-y'(x)}{\Delta x}\right] = \rho g\frac{\Delta s}{\Delta x}$$

令 Δx 趋向零,取极限得到

$$T_0 y'' = \rho g\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}$$

根据弧长微分公式 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$,从而得到

$$y''=\frac{1}{k}\sqrt{1+y'^2}$$

其中常数 $k=\frac{T_0}{\rho g}$,这就是绳索平衡时的形状曲线 $y=y(x)$ 满足的微分方程. 为求此方程的解,令 $y'=p$,并分离变量得出

$$\frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{\mathrm{d}x}{k}$$

积分得

$$\ln(p+\sqrt{1+p^2})=\frac{x}{k}+C_1$$

因为当 $x=0$ 时,有水平切线,故 $y'=p=0$,即 $C_1=0$,于是得到

$$p+\sqrt{1+p^2}=\mathrm{e}^{\frac{x}{k}}$$

以 $p-\sqrt{1+p^2}$ 乘上式两端,得到

$$p-\sqrt{1+p^2}=-\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}$$

与前面的相加,可解得

$$p=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\frac{x}{k}}-\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}})=\mathrm{sh}\,\frac{x}{k}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{sh}\,\frac{x}{k}$$

再积分一次得

$$y=k\mathrm{ch}\,\frac{x}{k}+C_2$$

为了使曲线方程简单. 现在取 x 轴,使得原点 O 与绳索最低点的距离恰为 k. 这时有初始条件 $x=0$ 时 $y=k$,故 $C_2=0$. 而绳索的形状可表示成曲线

$$y=k\mathrm{ch}\,\frac{x}{k}=\frac{k}{2}(\mathrm{e}^{\frac{x}{k}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}})$$

这种曲线称为悬链线.

由泰勒公式可知

$$\operatorname{ch}\frac{x}{k}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{k}\right)^{2}+o\left[\left(\frac{x}{k}\right)^{2}\right]$$

因此，当$\frac{x}{k}\ll 1$时，悬链线方程可近似为

$$y\approx k+\frac{x^{2}}{2k}$$

这就是说在张力很大且考虑的范围又比较小时，绳索的形状就可近似于一条抛物线.

4.3.2 不显含自变量的二阶方程

设给定方程

$$y''=f(y,y')$$

这类方程的特征是不明显含有自变量 x. 为了达到降阶的目的，仍作变换 $y'=p$，并把 y 作为自变量，由于

$$\frac{\mathrm{d}^{2}y}{\mathrm{d}x^{2}}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

于是方程化为

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$$

积分这个一阶方程得

$$p=\varphi(y,C_1)$$

因为 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，故变量分离后给出

$$\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}=\mathrm{d}x$$

再积分即得原方程的通解为

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2$$

例 1 求方程 $2yy''=1+y'^2$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1,y'|_{x=0}=0$的解.

解 令 $p=y', y''=p\frac{dp}{dy}$代入方程得

$$2yp\frac{dp}{dy}=1+p^2$$

分离变量后有

$$\frac{2p\,dp}{1+p^2}=\frac{dy}{y}$$

积分得

$$\ln(1+p^2)=\ln|y|+C_2$$

或

$$1+p^2=C_1 y, C_1=\pm e^{C_2},$$

当 $x=0$ 时,有 $y=1, y'=p=0$,故得 $C_1=1$,

即

$$1+p^2=y$$

或

$$p=\pm\sqrt{y-1}$$

故有

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{y-1}$$

由此推知,有

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{y-1}}=dx$$

再积分后得到

$$\pm 2\sqrt{y-1}=x+C_2$$

由 $x=0$ 时. $y=1$,定出 $C_2=0$,故所求曲线为

$$\pm 2\sqrt{y-1}=x$$

或

$$y=\frac{x^2}{4}+1$$

这是一条抛物线.

例 2 求解第一节的例 2.

解 在第一节中已导出描述单摆微振动的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2\theta$$

其中 θ 为角位移，而常数 $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$. 这是一个不显含自变量 t 的二阶方程. 令 $p=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$，则有$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\theta}$代入原方程后成为

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\theta}=-\omega^2\theta$$

变量分离后给出

$$p\mathrm{d}p=-\omega^2\theta\mathrm{d}\theta$$

积分得

$$p^2=-\omega^2\theta^2+C_1$$

即

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2=-\omega^2\theta^2+C_1$$

若上式两端乘以$\frac{1}{2}ml^2$，则有

$$\frac{1}{2}m\left(l\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{1}{2}m\omega^2(l\theta)^2=\frac{1}{2}ml^2C_1$$

注意到 $\theta\ll1$，即 $1-\cos\theta\approx\frac{1}{2}\theta^2$，上式就表示单摆自由振动的总能量是守恒的. 由于这个摆在最大偏离时的角位移是 θ_0，所以当 $\theta=\theta_0$时，能量全部转换为势能，故动能为零. 因此当 $\theta=\theta_0$ 时，质点 M 的速度为零，即

$$\left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{\theta=\theta_0}=0$$

由此可定出常数 $C_1=\omega^2\theta_0^2$，从而得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2=\omega^2(\theta_0^2-\theta^2)$$

或

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\pm\omega\sqrt{\theta_0^2-\theta^2}$$

再分离变量并积分得

$$\pm\int\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\theta_0^2-\theta^2}}=\omega t+C_2$$

或

$$\pm\arcsin\frac{\theta}{\theta_0}=\omega t+C_2$$

即

$$\theta=\pm\theta_0\sin(\omega t+C_2)$$

因运动开始时摆处于平衡位置，即 $t=0$ 时 $\theta=0$，故可定出积分常数 $C_2=0$ 或 π. 从而总可得到相位为零的解

$$\theta=\theta_0\sin\omega t$$

这就是所求的单摆微振动规律. 从这个规律可以看出，单摆是作具有周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 的简谐振动，其振动的周期只与摆长 l 和重力加速度 g 有关，而与摆的振幅 θ_0 无关，因此当时钟的发条松弛，摆幅逐渐减小时，周期 T 仍保持不变，此即为用单摆来计时的等时性原理.

习题 4.3

1. 求下列二阶方程的通解

(1) $xy''=y'$ (2) $y''=\frac{y'}{x}+x$

(3) $xy''=y'\ln\frac{y'}{x}$ (4) $1+(y')^2=2yy''$

(5) $a^2y''-y=0$ (6) $yy''+(y')^2=1$

(7) $y''=y'+x$ (8) $y''+(y')^2=2\mathrm{e}^{-y}$

2. 求下列二阶方程满足所给初始条件的特解

(1) $xy''+x(y')^2-y'=0$, $y|_{x=2}=2$, $y'_{x=2}=1$

(2) $y^3y''=-1$, $y|_{x=1}=1$, $y'|_{x=1}=0$

(3) $y''=\frac{y'}{x}+\frac{x^2}{y'}$, $y|_{x=1}=1$, $y'|_{x=1}=0$

3. 一个物体,只受地球引力作用,自无穷高处落下,求落到地面时的速度(地球半径算作 6400 千米,重力加速度 $g=9.8$ 米/秒^2).

4. 一子弹以速度 $v_0=200$ 米/秒打进一块厚度为 $h=10$ 厘米的板.然后穿透它,以速度 $v_1=80$ 米/秒离开板.设板对子弹运动的阻力和运动速度的平方成正比,求子弹穿过板所用的时间.

5. 质量为 m 的物体以初速 v_0 铅直向上抛,空气阻力等于 kv^2,(1) 建立物体上抛和下落运动的微分方程;(2) 求物体落到地面上那一瞬间所具有的速度.

总复习题

1. 求下列一阶方程的通解

(1) $y'=e^{2x-y}$　　(2) $xy'+y=y^2$

(3) $xy'=y+\sqrt{x^2+y^2}$　　(4) $y'=\frac{x+y-2}{-x+y-4}$

(5) $(x+y+1)dx=(2x+2y-1)dy$

(6) $y'+ay=e^{mx}$　(a,m 为常数)

(7) $(y^2-6x)y'+2y=0$　　(8) $y'=\frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$

(9) $y'+\frac{y}{x}=x^2y^3$　　(10) $y'+2y^2=\frac{1}{x^2}$

2. 求下列方程满足初始条件的特解

(1) $\sin y\cos x dy=\cos y\sin x dx$, $y|_{x=0}=\frac{\pi}{4}$

(2) $\frac{y-xy'}{x+yy'}=2$, $y(1)=1$

(3) $y'-\frac{y}{1-x^2}=1+x$, $y(0)=1$

(4) $y''=e^{2y}$, $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=1$

3. 用适当的变量代换将下列方程化为齐次方程或线性方程,并求通解

(1) $y'=\left(\frac{a}{x+y}\right)^2$　　(2) $y^3\mathrm{d}x+2(x^2-xy^2)\mathrm{d}y=0$

(3) $y'-\mathrm{e}^{x-y}+\mathrm{e}^x=0$　　(4) $y'+\sin y+x\cos y+x=0$

(5) $y'=\cos(x-y)$

4. 证明用常数变易法也可求出齐次方程 $y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$的通解. $\Big($提示:将 $y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$化为 $y'-\frac{y}{x}=g\left(\frac{y}{x}\right)$,其中 $g\left(\frac{y}{x}\right)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}$,对方程 $y'-\frac{y}{x}=0$的通解 $y=Cx$ 中的常数C 进行变易来求 $y'-\frac{y}{x}=g\left(\frac{y}{x}\right)$的通解.$\Big)$

5. 试用常数变易法导出贝努利方程 $y'+P(x)y=Q(x)y^n$ 的通解公式

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[(1-n)\int Q(x)\mathrm{e}^{(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]^{\frac{1}{1-n}}$$

6. 求下列二阶方程的通解

(1) $y''=x+\sin x$　　(2) $(1+x^2)y''+(y')^2+1=0$

(3) $2xy'y''=(y')^2+1$　　(4) $(y')^2+2yy''=0$

(5) $y''+\frac{2}{1-y}(y')^2=0$　　(6) $xyy''+x(y')^2-yy'=0$

7. 求下列二阶方程满足所给初始条件的特解

(1) $2y''=3y^2$, $y|_{x=-2}=1$, $y'|_{x=-2}=-1$

(2) $y^3y''=-1$, $y|_{x=1}=1$, $y'|_{x=1}=0$

8. 求下列黎卡提方程的通解

(1) $y'-\frac{1}{x}y=\frac{1}{x^3}y^2-2x$

(2) $y'+\frac{1}{x}y=-\left(1+\frac{1}{x}\right)y^2+1$

(3) $x^2y'-xy=x^2y^2+1$

9. 证明:若黎卡提方程 $y'=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$的系数满足条件 $R(x)=kP(x)\varphi^2(x)$,其中 k 为常数,$\varphi(x)$是对应的贝努利方程 $y'-Q(x)y=P(x)y^2$ 的一个非零解,则黎卡提方程的通解可用初等函数及其积分来表示.

5 空间解析几何

坐标法和向量代数的方法，是研究几何学的有力工具. 本章要应用以上方法，研究一些关于直线和平面的问题，介绍一些常见曲面，讨论空间的坐标变换.

5.1 空间直角坐标系

与平面解析几何类似，为了使空间的几何图形与代数方程联系起来，须在空间中引进坐标，以使空间中的点与某数组对应起来，最常用的坐标系是空间直角坐标系.

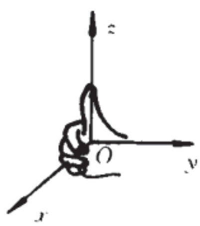


图 5.1

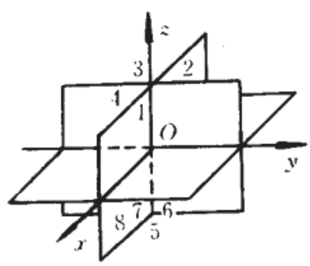


图 5.2

过空间某一定点 O 作三条互相垂直的直线，在这些直线上取定一个相同的长度单位，再各选定一个方向作为正向，这样就有了三条数轴. 把这三条数轴排定一个次序，依次记为 x 轴、y 轴和 z 轴，这样就构成了一个空间直角坐标系，记作 $Oxyz$. 称定点 O 为坐标原点，称三条轴为坐标轴，x 轴也称为横轴，y 轴也称为纵轴，而 z 轴也称为立轴. 通常我们还规定三坐标轴构成右手系统，即用右手握住 z 轴，且大拇指指向 z 轴的正向，则其余四指弯曲的方向

恰是从 x 轴正向沿最小角度转到 y 轴正向的旋轴方向(图 5.1). 三坐标轴中的每一对轴所确定的三张平面 Oxy,Oyz 和 Ozx 两两相互垂直,称为坐标平面. 这些平面把空间分成八个区域,称为八个卦限(图 5.2).

现在设 P 为空间中的任意一点,过点 P 分别作垂直于 x 轴,y 轴与 z 轴的三张平面,它们与各坐标轴的交点依次为 A,B,C(图 5.3). 设这些交点对应的实数分别是 a,b,c. 于是点 P 决定了一个三有序实数组(a,b,c). 反之,如果给出一个三有序实数组(a,b,c),并过 x 轴,y 轴,z 轴上的点 A,B,C 作三张平面,分别垂直于其所在的坐标轴,则这些平面就相交于空间的一点 P. 这样一来,空间的点 P 与三有序实数组(a,b,c)间就建立了一一对应关系,而有序数组(a,b,c)就称为点 P 的直角坐标,记作 $P(a,b,c)$,其中 a 称为横标,b 称为纵标,c 称为立标.

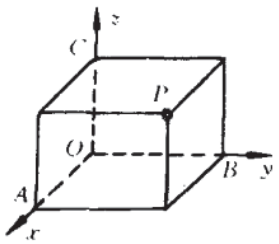


图 5.3

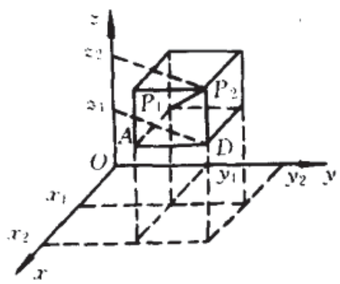


图 5.4

由定义可知,原点 O 的坐标为$(0,0,0)$,若点 P 在 x 轴上,则其坐标为$(a,0,0)$;同样,对于 y 轴上的点,坐标就是$(0,b,0)$;而对于 z 轴上的点,坐标$(0,0,c)$. 若点 P 在平面 Oxy 上,则其坐标为$(a,b,0)$;同样,对于平面 Ozx 上的点,坐标是$(a,0,c)$;对于平面 Oyz 上的点,坐标就是$(0,b,c)$. 容易看出,在八个卦限中,有一个卦限内的每一点的横、纵、立标全是正,称它为第一卦限,而只有横标是负的卦限称为第二卦限,其余卦限的称号如图 5.2 所示.

应用点的坐标概念,可以导出空间两点间的距离公式.

设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间两点，过 P_1 与 P_2 分别作垂直于各坐标轴的平面，相交而成一长方体(图 5.4)，它的三条棱长各是

$$P_1A=|x_2-x_1|,\ AD=|y_2-y_1|,\ DP_2=|z_2-z_1|.$$

由于所求距离 P_1P_2 为其对角线的长，故得

$$\begin{aligned}P_1P_2{}^2&=P_1A^2+AD^2+DP_2{}^2\\&=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,\end{aligned}$$

或开方后给出

$$P_1P_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

这就是空间两点 P_1 与 P_2 间的距离公式. 特别点 $P(x,y,z)$ 与原点 $O(0,0,0)$ 之间的距离为

$$PO=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 1 求点 $P_1(1,0,-1)$ 与 $P_2(4,3,-1)$ 之间的距离.

解 $$\begin{aligned}P_1P_2&=\sqrt{(4-1)^2+(3-0)^2+(-1+1)^2}\\&=3\sqrt{2}.\end{aligned}$$

例 2 求 z 轴上一点，使与点 $A(-4,1,7)$ 和点 $B(3,5,-2)$ 的距离相等.

解 设所求的点为 $M(0,0,z)$，则由两点间的距离公式可得

$$AM=\sqrt{4^2(-1)^2+(z-7)^2}=\sqrt{66-14z+z^2},$$

$$\begin{aligned}BM&=\sqrt{(-3)^2-(-5)^2+(z+2)^2}\\&=\sqrt{38+4z+z^2}.\end{aligned}$$

由题设 $AM=BM$，所以

$$66-14z+z^2=38+4z+z^2,$$

解得 $z=\dfrac{14}{9}$，故所求之点为 $\left(0,0,\dfrac{14}{9}\right)$.

习题 5.1

1. 指出下列各点在哪条坐标轴上或哪个坐标平面上？

(1) $(-4,0,0)$;　　(2) $(0,-7,0)$;

(2) $(0,-7,2)$;　　(4) $(-5,0,3)$.

2. 指出下列各点位于第几卦限?

(1) $(2,-1,3)$;　　(2) $(-1,-2,4)$;

(3) $(1,4,-3)$;　　(4) $(-1,-2,-3)$;

(5) $(1,-1,-1)$;　　(6) $(-2,1,-3)$.

3. 设某点与给定点(a,b,c)分别对称于下列坐标平面:(1) Oxy;(2) Oyz;(3)Oxz,求它的坐标.

4. 设某点与给定点(a,b,c)分别对称于:(1) x轴;(2) y轴;(3) z轴;(4) 原点O,求它的坐标.

5. 求点$P(4,-3,5)$到坐标原点以及到各坐标轴的距离.

6. 求顶点为$A(2,1,4)$,$B(3,-1,2)$,$C(5,0,6)$的三角形各边的长.

7. 在z轴上求与点$A(-4,1,7)$和点$B(3,5,-2)$等距离的点.

8. 在Oyz平面上求一点P,使它与三已知点$A(3,1,2)$,$B(4,-2,-2)$及$C(0,5,1)$等距离.

9. 求点$(1,-3,2)$关于点$(-1,2,1)$的对称点.提示:应用中点公式.

5.2 向量代数

5.2.1 向量的概念

在研究力学与物理学时,经常会遇到这样一些量,仅知道它们数值的大小是不够的,要完全表示它们,还必须同时指出它们的方向,例如速度,加速度,力等等.这种既有大小又有方向的量称为向量.我们可以用一个有向线段来表示它,线段的长度表示它的大小,线段的方向表示它的方向.以A为起点,B为终点的有向线段所表示的向量记为$\overrightarrow{AB}$(图5.5).有时也用小写的粗体字母$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\cdots$来记向量.

如果两个向量的大小相等、方向相同,就称这两个向量是相等的.如图5.5中,$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{A'B'}$是相等的向量,记作

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$$

从两个向量相等的定义可知，一个向量平行移动后，仍为与原来向量相等的向量，所以向量的起点可以放置在空间的任意一点.这种能平移至任意起点的向量称为自由向量.必须注意，在实际问题中，有些向量不能平移，例如一个力，它的作用点只能沿力的作用线移动，而不能移向任意点.这种只能沿一直线移动的向量称为滑动向量.今后没有特别说明，我们只考察自由向量.

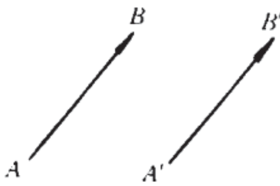


图 5.5

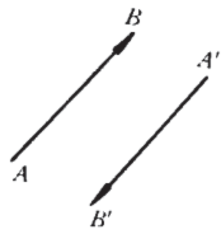


图 5.6

如果两个向量的大小相等而方向相反，则称此二向量为相反向量.如图 5.6，$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{A'B'}$就是相反向量，记作$\overrightarrow{A'B'}=-\overrightarrow{AB}$.因此又称$\overrightarrow{A'B'}$是$\overrightarrow{AB}$的负向量.

向量的长度又称为向量的模，向量$\overrightarrow{AB}$的模用$|\overrightarrow{AB}|$表示，向量$\boldsymbol{a}$的模用$|\boldsymbol{a}|$或a表示.模为 1 的向量称单位向量.模为零的向量称零向量，记作$\mathbf{0}$.显然零向量的起点和它的终点是重合的，所以它没有确定的方向.我们规定，一切零向量都相等.这些特殊向量在向量的代数运算中有着很重要的作用.

5.2.2 向量的加法与数乘

将物理学中的速度与力的合成法则加以抽象，就得到向量之和的定义.

设给定具有共同起点O的两个向量$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，则以$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$为邻边的平行四边形的对角线向量$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$(图 5.7)就称为这两个向量的和，记作

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$$

或简写成

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

这种求和的方法称为平行四边形法则.

从图 5.7 可知$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$,故得

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}.$$

由此可推出求两个向量的和的三角形法则.

在向量$\overrightarrow{OA}$的终点 A 引向量$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$,则以 O 为起点,C 为终点的封口向量$\overrightarrow{OC}$就是$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的和.

特别,如果两个向量在同一直线上,则它们的和就是这样一个向量:当两个向量同向时,和向量的方向与原向量的方向相同,其模等于两向量的模之和;而两向量反向时,和向量的方向与模较大的向量的方向相同,而其模等于两向量模之差.

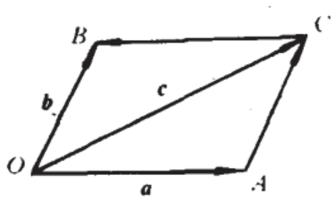


图 5.7

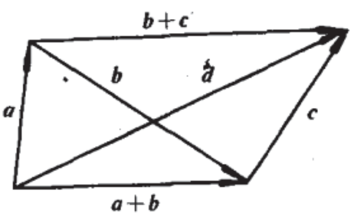


图 5.8

如果两个向量是相反向量,则其和显然为零向量,就是

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$$

如果两个向量之一为零向量,则其和仍为原非零向量,就是

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}.$$

此外,从三角形法则容易证明向量的加法满足交换律,即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$

上面对两个向量所建立的加法运算可以推广到多个向量的情形. 例如欲求三个向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 的和,可在 $\boldsymbol{a}$ 的终点上引 $\boldsymbol{b}$,再在 $\boldsymbol{b}$ 的终点引 $\boldsymbol{c}$,则由 $\boldsymbol{a}$ 的起点至 $\boldsymbol{c}$ 的终点引所得的折线的封口向量 $\boldsymbol{d}$

(图 5.8),即为所求的和,记作

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$$

从图 5.8 不难看出,这个和向量亦可先作 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,再与 $\boldsymbol{c}$ 相加而求得. 又若以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 相加,则得到同样的结果. 就是说,向量的加法满足结合律

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$$

向量的减法与数量的减法一样是定义为加法的逆运算.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和是向量 $\boldsymbol{c}$,则向量 $\boldsymbol{b}$ 就定义为向量 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 之差,记作

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}.$$

从图 5.7 可见

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}+(-\boldsymbol{a}).$$

于是得到减法的法则:若要从向量 $\boldsymbol{c}$ 减去向量 $\boldsymbol{a}$,就只须把 $\boldsymbol{a}$ 的负向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到 $\boldsymbol{c}$ 上去.

现在再来考虑向量与数的乘积. 先叙述一般的定义.

设有向量 $\boldsymbol{a}$ 和数 λ,则其乘积表示这样一个向量,它的模等于向量 $\boldsymbol{a}$ 的模之 $|\lambda|$ 倍,而方向当 λ 大于零时与 $\boldsymbol{a}$ 相同,当 λ 小于零时与 $\boldsymbol{a}$ 相反(图 5.9).

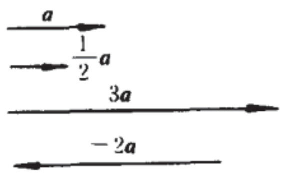


图 5.9

由定义可知,当 $\lambda=0$ 时,$|\lambda \boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. 就是说零与任何向量相乘,其积为零向量.

显然又有

$$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}.$$

就是 -1 与任何向量相乘,其积为该向量的负向量.

利用向量与数的乘积,向量 $\boldsymbol{a}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0,$$

其中 $\boldsymbol{a}^0$ 表示与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量. 由此得到

$$\boldsymbol{a}^0 = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

即一个不为零的向量除以它的模后是一同向的单位向量.

向量与数的乘积具有以下性质.

设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是给定的两个向量,而 λ 及 μ 是任意常数,则有

$$(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a};$$
$$\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = \mu(\lambda\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a};$$
$$\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}.$$

我们只证明最后这个性质. 不妨设 λ 大于零,作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 得一三角形 OAB,再作向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 的和 $\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 得另一三角形 $O'A'B'$(图 5.10). 因为这两个三角形的边 $O'A'$,$A'B'$ 与边 OA,AB 分别互相平行且成比例,所以它们是相似的. 从而得到向量 $\overrightarrow{O'B'}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 是同向平行,且模的比值等于 λ,即 $\overrightarrow{O'B'} = \lambda\,\overrightarrow{OB}$. 但 $\overrightarrow{O'B'} = \lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,这就证明了所要的性质.

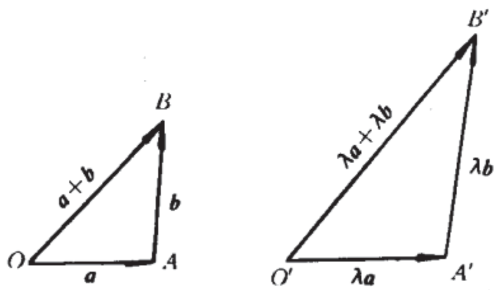


图 5.10

一组向量,把它们都平行移动到同一个起点上,如果这时它们在同一条直线上或在同一个平面内,那么就称这一组向量是共线的或共面的. 共线的两个向量也称为平行的,常用符号“//”来表示,例如 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$ 等.

显然,零向量与任意一个向量共线;共线的向量也是共面的;任意两个向量总是共面的;两个共线向量与第三个向量组成的向量组是共面的.

用数去乘一个非零向量，可以任意改变向量的长度，又可以反转方向，因此，不但所得到的向量都是和它共线的，并且能得到所有和它共线的向量. 具体地说，如果 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\neq 0$，那末有且仅有一个实数 λ 使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$. 我们把 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 看成一个含变数 λ 的向量方程，而向量的特征是长度和方向. 由长度可知，$|\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{b}|$，即 $|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$；由方向可知，$\lambda$ 的正负决定于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的方向是相同还是相反. 因此，λ 是唯一确定的，显然由此确定的 $\lambda=\pm\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$ 合乎要求.

把一些向量分别乘上数再加起来，所得到的向量叫做这些向量的线性组合.

三个向量什么时候共面呢？设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 三个向量共面. 如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，则可将 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 平移到以 O 为起点的一个平面内(图 5.11)，并依次记为 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$. 过点 C 作 $\overrightarrow{OA}$ 及 $\overrightarrow{OB}$ 的平行线分别与 $\overrightarrow{OB}$ 及 $\overrightarrow{OA}$ 交于点 B' 及 A'，于是 $\overrightarrow{OA'}=\lambda\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB'}=\mu\boldsymbol{b}$，其中 λ,μ 是确定的常数. 由此推得

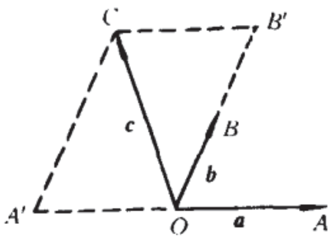


图 5.11

$$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}.$$

如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时有 $\boldsymbol{b}=0\boldsymbol{a}+0\boldsymbol{c}$，当 $\boldsymbol{b}\neq 0$ 时有 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}+0\boldsymbol{c}$，

反之，若存在常数 λ,μ 使得

$$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b},$$

则 $\boldsymbol{c}$ 必在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面上，从而这些向量共面.

于是又得到断言：向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是它们中的一个向量必可表示成其余向量的线性组合.

5.2.3 向量的分解与坐标

向量不是数，但它又可以像数那样去运算. 那末，向量与数以及它们的运算之间究竟有什么关系呢？为了明确这种关系，我们引进向量的坐标，把向量用数表示出来，把向量的运算用数的运算表示出来. 这样，就可以用坐标去讨论向量；在需要的时候随时把向量转换成坐标.

设在空间中取定一直角坐标系 $Oxyz$，如果将空间的任一向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点平移至坐标原点 O，并设这时向量的终点 A 的坐标是 (a_1,a_2,a_3)，则 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$ 就唯一对应于数组 (a_1,a_2,a_3)；反之，对任给的一个数组 (a_1,a_2,a_3)，在空间就唯一确定一点 $A(a_1,a_2,a_3)$，从而确定一个向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$. 这样，向量 $\boldsymbol{a}$ 与数组 (a_1,a_2,a_3) 之间便建立了一一对应的关系，而这个数组 (a_1,a_2,a_3) 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，记为

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3).$$

这就是向量的坐标表示.

如果在坐标轴 Ox,Oy,Oz 上以 O 为起点分别取三个单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，其方向与轴的方向相同，这些单位向量称为坐标系 $Oxyz$ 的基本单位向量. 过向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 作三平面分别与坐标平面平行，且与各坐标轴交于点 X,Y,Z（图 5.12）. 易知

$$\overrightarrow{OX}=a_1\boldsymbol{i},\ \overrightarrow{OY}=a_2\boldsymbol{j},\ \overrightarrow{OZ}=a_3\boldsymbol{k}.$$

由向量加法的三角形规则可得

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{XP}+\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}+\overrightarrow{OZ},$$

即

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}.$$

它就是 $\boldsymbol{a}$ 按基本单位向量的分解式. 应用这个分解式，向量的加法，减法及向量与数的乘积就可归结为其坐标的相应运算. 事实上，设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，而 λ 是一常数，则有

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}.$$

从而得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} &= (a_1 \pm b_1)\boldsymbol{i} + (a_2 \pm b_2)\boldsymbol{j} + (a_3 \pm b_3)\boldsymbol{k} \\ &= (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3);\end{aligned}$$

$$\lambda\boldsymbol{a} = \lambda a_1\boldsymbol{i} + \lambda a_2\boldsymbol{j} + \lambda a_3\boldsymbol{k} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3).$$

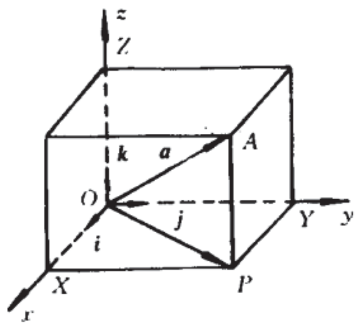


图 5.12

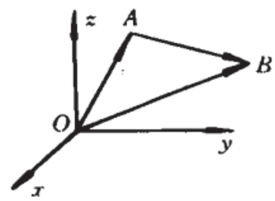


图 5.13

容易明白,在空间取定一个直角坐标系后,两个向量相等的充要条件是它们的坐标相等.

例 1 已知 $\boldsymbol{a}=(4,-1,3)$, $\boldsymbol{b}=(5,2,-2)$,求 $2a+3b$.

解 由于

$$2\boldsymbol{a} = (8, -2, 6),\ 3\boldsymbol{b} = (15, 6, -6),$$

所以

$$2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} = (23, 4, 0).$$

例 2 已知两点 $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$,求向量$\overrightarrow{AB}$的坐标.

解 如图 5.13,作向量$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$,则

$$\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3),\ \overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, b_3).$$

所以

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$

就是说向量$\overrightarrow{AB}$的坐标等于终点 B 的坐标减去起点 A 的坐标.

例 3 证明两个向量共线的充分必要条件是它们的坐标对应

成比例.

证 先证必要性. 不妨设 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$. 设 $\boldsymbol{a}(a_1,a_2,a_3)$ 与 $\boldsymbol{b}(b_1,b_2,b_3)$ 共线,则存在确定的常数 λ,使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$. 因为

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k},$$

所以

$$a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}=\lambda(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}),$$

或移项得

$$(a_1-\lambda b_1)\boldsymbol{i}+(a_2-\lambda b_2)\boldsymbol{j}+(a_3-\lambda b_3)\boldsymbol{k}=0$$

但 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 不共面,从而推知

$$a_1-\lambda b_1=0,\ a_2-\lambda b_2=0,\ a_3-\lambda b_3=0,$$

或写成

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\lambda.$$

此即为共线向量的对应坐标成比例.

次证充分性. 设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$,且有

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$$

记其比值为 λ 就得到

$$a_1=\lambda b_1,\quad a_2=\lambda b_2,\quad a_3=\lambda b_3.$$

于是

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}=\lambda(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})=\lambda\boldsymbol{b},$$

因此 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线.

例 4 设点 P 把有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 分成定比 λ,即有 $\dfrac{AP}{PB}=\lambda$. 若已知端点 A 和 B 的坐标为 (x_1,y_1,z_1) 和 (x_2,y_2,z_2),求分点 P 的坐标 (x,y,z).

解 由题设可知

$$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}.$$

若将 A,P,B 各点与原点 O 连成向量,则有

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}).$$

由此得到

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}).$$

因为

$$\overrightarrow{OA}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},\ \overrightarrow{OB}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k},$$
$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

代入后给出

$$x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\boldsymbol{i}+\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\boldsymbol{j}+\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\boldsymbol{k}.$$

比较 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的对应系数即得

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

这就是空间线段的定比分点公式. 特别地,线段中点的坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2},\ z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 的起点在原点,这时终点 A 的坐标就是 (a_1,a_2,a_3),由空间两点的距离公式得

$$|\boldsymbol{a}|=OA=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}.$$

就是向量的模等于它的各坐标的平方和再开方.

若 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2,a_3)$ 与坐标轴 Ox,Oy,Oz 的正向夹角分别为 α,β,γ,则 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为该向量的方向余弦.

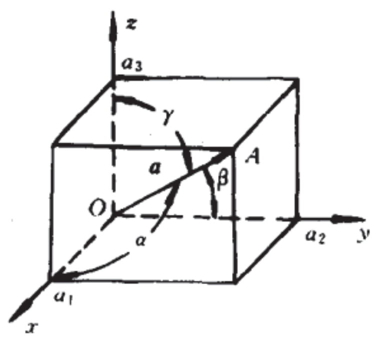


图 5.14

从图 5.14 不难看出

$$a_1=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,$$
$$a_2=|\boldsymbol{a}|\cos\beta,$$
$$a_3=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma.$$

于是可得

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{a_2}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_2}{\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{a_3}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_3}{\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}}.$$

这就是通过向量的坐标表达它的方向余弦的公式. 由此得到

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

就是任何向量的方向余弦的平方和等于 1.

例 5 已知 $P_1(1,-2,3)$, $P_2(4,2,-1)$,求$\overrightarrow{P_1P_2}$的方向余弦.

解 因为

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (3,4,-4),$$

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{41}$$

所以$\overrightarrow{P_1P_2}$的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{41}},\ \cos\beta = \frac{4}{\sqrt{41}},\ \cos\gamma = -\frac{4}{\sqrt{41}}.$$

例 6 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与各坐标轴的正向之夹角都相等,求此向量的方向余弦.

解 由假设知 $\alpha=\beta=\gamma$,故得

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 3\cos^2\alpha = 1.$$

所以 $\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$,因此向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦是

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\text{或}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

5.2.4 向量数量积

设一物体受自身重力 $\boldsymbol{f}$ 的作用沿光滑的斜面下滑(图 5.15),如果这物体的位移 $\boldsymbol{s}$ 的方向与重力的方向作成的角 θ,则力 $\boldsymbol{f}$ 所作

的功 W 应为

$$W = |\boldsymbol{f}||\boldsymbol{s}|\cos\theta.$$

抽去外力作功的物理意义,我们就可以引进向量的数量积的概念.

定义 两个向量的数量积是一个数量,它的大小是这两个向量的模与其夹角的余弦的乘积.通常用记号 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积.

若设它们的夹角为 θ(图 5.16),按定义则有

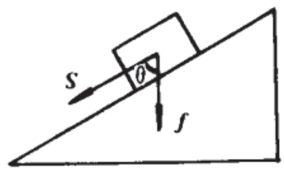


图 5.15

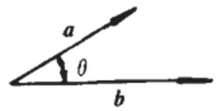


图 5.16

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

于是上述重力作功即为 $\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的数量积 $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{s}$.

由于 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 是向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向上的投影,因此两个向量的数量积等于其中一个向量的模与另一个向量在该向量的方向上的投影的乘积.

数量积具有下列基本性质.

1° 如果两个向量之一为零向量或二者互相垂直,则它们的数量积必为零;反之,如果两个向量的数量积为零,则这两个向量之一为零向量或互相垂直.

证 如果 $\boldsymbol{a}=0$ 或 $\boldsymbol{b}=0$,或 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 $|\boldsymbol{a}|=0$ 或 $|\boldsymbol{b}|=0$,或 $\cos\theta=0$,故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

反之,如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 则 $|a||b|\cos\theta=0$,于是得 $|\boldsymbol{a}|=0$ 或 $|\boldsymbol{b}|=0$或 $\cos\theta=0$,从而 $\boldsymbol{a}=0$ 或 $\boldsymbol{b}=0$,或 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

直接从定义推出

2° 向量的数量积满足交换律

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}.$$

3° 向量的数量积满足分配律

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}.$$

证 作向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ 及封口向量$\overrightarrow{OB}$(图 5.17),则有

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

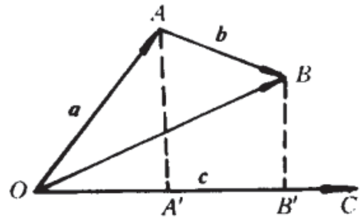


图 5.17

将$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{OB}$投影到$\overrightarrow{OC}$上顺次得线段 OA',$A'B'$,OB',并且

$$OB'=OA'+A'B'.$$

由数量积的定义可知

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OA}\cdot\boldsymbol{c}=OA'|\boldsymbol{c}|,$$

$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{c}=A'B'|\boldsymbol{c}|$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OB}\cdot\boldsymbol{c}=OB'|\boldsymbol{c}|,$$

$$=OA'|\boldsymbol{c}|+A'B'|\boldsymbol{c}|,$$

所以

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}.$$

4° 向量的数量积与数的乘积满足结合律

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).$$

证 如果 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 之一为零向量,则此等式显然成立,因而可假定 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 都不是零向量. 当 $\lambda>0$ 时,$\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 有相同的方向,所以它们与 $\boldsymbol{b}$ 的交角是相等的,并记为 θ,则有

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=|\lambda\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).$$

当 $\lambda<0$ 时,$\boldsymbol{a}$ 下 $\lambda\boldsymbol{a}$ 有相反的方向. 若设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的交角为 θ,则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的交角就为 $\pi-\theta$,所以

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=|\lambda\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\pi-\theta)=\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).$$

利用数量积的运算性质就能导出向量数量积的坐标表示式. 设给定两个向量

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k},$$

则有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\cdot(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})$$

$$
\begin{aligned}
&= a_1b_1(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}) + a_1b_2(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}) + a_1b_3(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}) \\
&\quad + a_2b_1(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}) + a_2b_2(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}) + a_2b_3(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}) \\
&\quad + a_3b_1(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}) + a_3b_2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}) + a_3b_3(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}).
\end{aligned}
$$

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是互相垂直的基本单位向量,所以

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1,\ \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1,\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1, \\
&\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0,\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0,\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=0.
\end{aligned}
$$

从而得到

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

这就是说,两个向量的数量积等于它们对应坐标乘积之和.

特别当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 时,有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=a_1^2+a_2^2+a_3^2.$$

但 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$,所以

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}.$$

这与 5.2.3 中导出的向量模之计算公式完全一致.

当 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时,由性质 1°可知 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,于是推得

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0.$$

反之亦真.因此两个非零向量垂直的充分必要条件是它们的对应坐标乘积之和为零.

现在再来导出两个向量间夹角的计算公式.

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 与 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 之间的夹角为 θ,则由数量积的定义可知

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}.$$

但

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3;$$

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2},\ |\boldsymbol{b}|=\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2},$$

所以

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\ \sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

例 1 已知三点 $A(1,1,-1)$，$B(2,2,-1)$和 $C(2,1,0)$，求向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$之间的夹角 θ.

解 由已知点的坐标得到

$$\overrightarrow{AB}=(1,1,0),\ \overrightarrow{AC}=(1,0,1).$$

于是求得

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{1\cdot1+1\cdot0+0\cdot1}{\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{2},$$

$$\theta=60^\circ.$$

例 2 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模分别为 2 与 1，且其夹角 $\theta=\frac{\pi}{3}$，求向量 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{d}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角 φ.

解 向量 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 的夹角 φ 可由公式

$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}}{|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{d}|}$$

计算. 应用数量积的运算法则得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}&=(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\&=6(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})-2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+9(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})-3(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})\\&=6|\boldsymbol{a}|^2+7(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})-3|\boldsymbol{b}|^2\\&=6\cdot2^2+7\cdot2\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{3}-3\cdot1^2=28;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|^2&=(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\\&=4(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})+12(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+9(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})\\&=4\cdot2^2+12\cdot2\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{3}+9\cdot1^2=37;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d}=|\boldsymbol{d}|^2&=(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\&=9(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})-6(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})\\&=9\cdot2^2-6\cdot2\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{3}+1^2=31.\end{aligned}$$

代入之后给出

$$\cos\varphi=\frac{28}{\sqrt{37}\sqrt{31}}\approx0.8268,\ \varphi\approx34^\circ14'.$$

例 3 已知 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,求向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^0$.

解 由于

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^0=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|},$$

但

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\cdot(-3)+3\cdot(-1)+(-1)\cdot 1=-10,$$
$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=(-3)^2+(-1)^2+1^2=11,$$

所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^0=-\frac{10}{\sqrt{11}}\approx-3.03.$$

例 4 求一个单位向量,使它与向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 都垂直.

解 设所求单位向量为 $\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{j}+x_3\boldsymbol{k}$,由于要求它与 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 都垂直,并且它的大小为 1,因此有

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}=0,\ \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b}=0,\ \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}=1.$$

用坐标写出,即得方程组

$$\begin{aligned}x_1-3x_2+x_3&=0,\\2x_1-x_2+3x_3&=0,\\x_1^2+x_2^2+x_3^2&=1.\end{aligned}$$

解之得

$$x_1=\pm\frac{8}{3\sqrt{10}},\ x_2=\pm\frac{1}{3\sqrt{10}},\ x_3=\mp\frac{5}{3\sqrt{10}}$$

所以

$$\boldsymbol{x}=\pm\frac{1}{3\sqrt{10}}(8\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}).$$

例 5 证明柯西不等式

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2).$$

证 设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$则有

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$
$$|\boldsymbol{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2,\ |\boldsymbol{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2.$$

由数量积的定义

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta,$$

及$|\cos\theta| \leqslant 1$ 推知

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 \leqslant |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{b}|^2.$$

若把它写成坐标的形式,即得欲证的不等式.

5.2.5 向量的向量积

设刚体以角速度 ω 绕定轴转动,其上距离转动轴线 R 处有一点 M,M 处的线速度为 $\boldsymbol{v}$. 由于转动时,点 M 描出一个中心在轴线上且半径为 R 的圆周,所以速度 $\boldsymbol{v}$ 应位于这个圆周的切线上. 由运动学知道,为了完全确定刚体转动的特性,可在轴线上引一向量 $\boldsymbol{\omega}$ 称为角速度的向量,它的大小等于转动的角速度 ω,而方向与转动的方向构成右手螺旋系统(图 5.18). 这时若以 $\boldsymbol{r}$ 表示点 M 与坐标原点相连的位置向量,则 $\boldsymbol{v}$ 必垂直于 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 所决定的平面,且 $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}$ 组成右手系统;而 $\boldsymbol{v}$ 的大小满足

$$|\boldsymbol{v}| = \omega R = |\boldsymbol{\omega}||\boldsymbol{r}|\sin\theta,$$

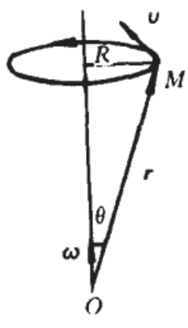


图 5.18

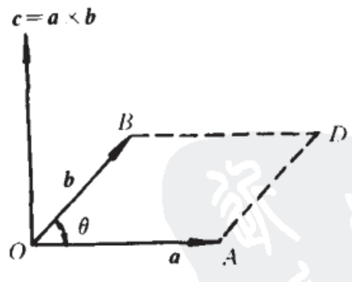


图 5.19

其中 θ 是 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 间的夹角. 三个向量 $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的这种关系不仅在运动学中出现,而且也存在于电磁学等其它领域内. 基于实际的需

要，再引进向量的另一种乘法运算.

定义 两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积是向量 $\boldsymbol{c}$，它由下面的条件来确定：

1. 向量 $\boldsymbol{c}$ 的模等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模与其夹角 θ 的正弦的乘积

$$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta.$$

这就是说，向量 $\boldsymbol{c}$ 的模在数值上等于以向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积(图 5.19).

2. 向量 $\boldsymbol{c}$ 垂直于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面，并且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 构成右手系统(图 5.19).

上述向量 $\boldsymbol{c}$ 通常记成 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

于是前面提及的转动刚体上点 M 的速度 $\boldsymbol{v}$ 就是角速度向量 $\boldsymbol{\omega}$ 与位置向量 $\boldsymbol{r}$ 的向量积

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}.$$

向量积具有以下性质.

1° 如果两个向量之一为零或二者共线，则向量积必是零向量；反之，如果两个向量的向量积为零向量，则这两个向量之一为零向量或二者共线.

证 如果 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，或 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{a}|=0$ 或 $|\boldsymbol{b}|=0$ 或 $\sin\theta=0$，故 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

反之，如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta=0$，由此必有 $|\boldsymbol{a}|=0$ 或 $|\boldsymbol{b}|=0$，或 $\sin\theta=0$，于是推知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，或 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

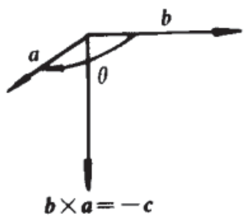


图 5.20

由向量积的定义容易看出，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 的模相等，但方向相反(图 5.20)，故有

2° 当因子的次序互换时，向量积要改变符号，就是

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}).$$

所以两个向量的向量积不满足交换律.

3° 向量的向量积与数的乘积的满足结合

律

$$(\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).$$

证 只须证明 $\lambda \neq 0$ 且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线的情形,因为在相反时性质是显然成立的.

如果 $\lambda > 0$,这时 $\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 有相同的方向,所以它们与 $\boldsymbol{b}$ 的交角是相等的,并记为 θ,则有

$$|(\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b}| = |\lambda \boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta = \lambda |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta = |\lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})|.$$

而向量$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$的方向是相同的,所以

$$(\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).$$

如果 $\lambda < 0$,则向量$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$的模也是相等的,由于这时 $\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向相反,根据右手法则,向量$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向相反,因此向量$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$ 就与 $\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$的方向相同. 于是也有

$$(\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).$$

从性质 3°又可推出向量积与数的乘积另外一些形式的结合律

$$\boldsymbol{a} \times (\lambda \boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}),$$

$$(\lambda \boldsymbol{a}) \times (\mu \boldsymbol{b}) = \lambda\mu(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).$$

为了导出向量积满足分配律,我们先来说明当 $\boldsymbol{c}^0$ 是一单位向量时,向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0$ 的几何作图法.

设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}^0$ 有共同的起点 O. 把向量 $\boldsymbol{a}$ 投影到与 $\boldsymbol{c}^0$ 垂直的平面上得向量 $\boldsymbol{a}_1$,再将 $\boldsymbol{a}_1$ 在这平面上绕点 O 依顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得向量 $\boldsymbol{a}_2$(图 5.21),则有

$$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}^0.$$

事实上,若用 θ 表示 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}^0$ 作成的角,则向量 $\boldsymbol{a}_2$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0$ 的模相等

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{a}_2| &= |\boldsymbol{a}_1| = |\boldsymbol{a}| \sin\theta \\ &= |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}^0|. \end{aligned}$$

又向量 $\boldsymbol{a}_2$ 垂直于向量 $\boldsymbol{c}^0$ 与 $\boldsymbol{a}$ 所决定的平面,且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}^0,\boldsymbol{a}_2$ 组成右手

系统，所以由定义 $\boldsymbol{a}_2$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}^0$ 的向量积.

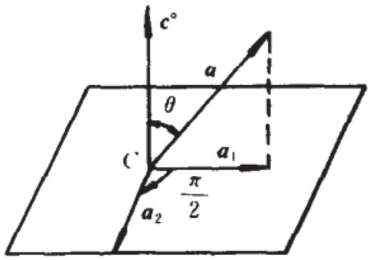


图 5.21

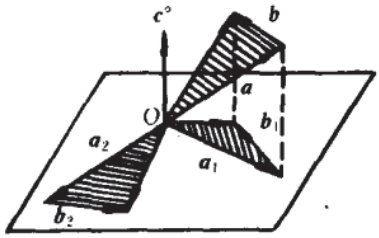


图 5.22

4° 向量的向量积满足分配律

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}.$$

证 先设 $\boldsymbol{c}$ 为单位向量 $\boldsymbol{c}^0$. 将 $\boldsymbol{a}$ 平移使它与 $\boldsymbol{c}^0$ 有共同的起点 O，过 $\boldsymbol{a}$ 的终点引 $\boldsymbol{b}$，按三角形法则得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图 5.22). 把由向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 组成的三角形投影到与 $\boldsymbol{c}^0$ 垂直的平面内得一由向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1$ 组成的三角形，再将所得的三角形在这平面上绕 O 点依顺时针方向旋转$\frac{\pi}{2}$，得一个由 $\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2$ 组成的三角形.

根据上面所述的向量积的几何作图法应有下列诸等式

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{b}_2,$$
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2,$$

于是得到

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^0.$$

这就在 c 为特殊的单位向量时证明了向量积的分配律的性质. 进而考察一般的情形. 因为 $\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|\boldsymbol{c}^0$，在上式的两端乘以 $|\boldsymbol{c}|$ 并利用性质 3°得

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(|\boldsymbol{c}|\boldsymbol{c}^0)=\boldsymbol{a}\times(|\boldsymbol{c}|\boldsymbol{c}^0)+\boldsymbol{b}\times(|\boldsymbol{c}|\boldsymbol{c}^0).$$

此即为

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},$$

从而就完全证明了所要的性质.

由此又可推出向量积的分配律的另一形式

$$\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}.$$

利用向量积的这些运算性质,就可以导出向量积的坐标表示式.

设给定两个向量

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k},$$

则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\times(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\&=a_1b_1(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+a_1b_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+a_1b_3(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})\\&\quad+a_2b_1(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+a_2b_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+a_2b_3(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})\\&\quad+a_3b_1(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+a_3b_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+a_3b_3(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}).\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是互相垂直的基本单位向量,所以

$$\begin{gathered}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=0,\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=0,\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0;\\\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k},\\\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i},\\\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}.\end{gathered}$$

于是得到

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{k}.$$

它可以利用三阶行列式写为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}.$$

例 1 已知三角形的顶点 $A(1,2,3)$,$B(3,4,5)$,$C(-1,-2,7)$,求$\triangle ABC$ 的面积.

解 设所求三角形的面积为 S,则由向量积的定义可知

$$S=\frac{1}{2}\mid\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\mid.$$

但

$$\overrightarrow{AB}=(2,2,2),\ \overrightarrow{AC}=(-2,-4,4),$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 2 & 2\\ -2 & -4 & 4\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 2 & 2\\ -4 & 4\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix} 2 & 2\\ -2 & 4\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} 2 & 2\\ -2 & -4\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$=16\boldsymbol{i}-12\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k},$$

所以

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{16^2+(-12)^2+(-4)^2}=2\sqrt{26}.$$

例 2 求垂直于向量 $\boldsymbol{a}=(1,-3,1)$，$\boldsymbol{b}(2,-1,3)$的单位向量.

解 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 就垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量，而

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -3 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=-8\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k},$$

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-8)^2+(-1)^2+5^2}=3\sqrt{10},$$

于是

$$\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{3\sqrt{10}}(-8,-1,5).$$

这就是所需的单位向量. 此外与它方向相反的单位向量$\frac{1}{3\sqrt{10}}(8,1,-5)$亦为所求.

比较 5.2.4 的例 4 可以看出，这里的方法更为简便.

5.2.6 向量的混合积

向量的两种乘法，数量积与向量积，可用各种方式加以组合，就得到一系列的乘积，以用来解决实际问题. 在这一节，我们只局限于讨论三个向量的混合积.

设给定三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，先作前面个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，再

将所得之向量与第三个向量 $\boldsymbol{c}$ 作数量积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$，称为这三个向量的混合积. 它表示一个数量，并且其绝对值等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积.

事实上，这个平行六面体的体积 V 等于以 a，b 为边的平行四边形的面积 S 乘以高 h（图 5.23），即

$$V = Sh.$$

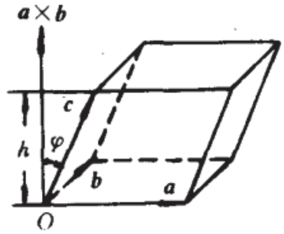


图 5.23

但由向量积的定义可知

$$S = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|.$$

另一方面，若设 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 φ，则有

$$h = \pm|\boldsymbol{c}|\cos\varphi$$

其中 φ 为锐角时取正，否则就取负，因而推得

$$\begin{aligned} V &= \pm|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\varphi \\ &= \pm(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}. \end{aligned}$$

符号＋或－的选取要使所得的体积为正数，所以当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 组成右手系统时取正，而组成左手系统就取负.

从混合积的几何意义立即可以得出，三个向量共面的充分必要条件是它们的混合积为零.

在混合积中，当因子 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的次序轮换时，它们的绝对值都表示同一平行六面体的体积，且符号不变，因此有

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} &= (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a} \\ &= (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}. \end{aligned}$$

就是轮换混合积的三个因子时，其值不变.

利用向量积与数量积的坐标表示式，可以导出混合积的实际计算公式. 事实上. 设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$，因为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k},$$

所以

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}c_1-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}c_2+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}c_3,$$

或用三阶行列式表示为

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.$$

例 1 已知四面体的四个顶点为 $A(1,1,1)$,$B(3,4,4)$,$C(3,5,5)$,$D(2,4,7)$,试求该四面体的体积.

解 容易看出,所求四面体的体积 V 是以$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AD}$为邻边的平行六面体的体积的六分之一,故得

$$V=\frac{1}{6}\mid(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}\mid.$$

而

$$\overrightarrow{AB}=(2,3,3),\ \overrightarrow{AC}=(2,4,4),\ \overrightarrow{AD}=(1,3,6),$$

所以

$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}2 & 3 & 3\\ 2 & 4 & 4\\ 1 & 3 & 6\end{vmatrix}=6.$$

于是得到 $V=1$.

例 2 证明四点 $A(1,1,1)$,$B(4,5,6)$,$C(2,3,3)$,$D(10,15,17)$共面.

证 只须证明以向量$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AD}$为棱的平行六面体的体积为零,即

$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=0.$$

由于

$$\overrightarrow{AB}=(3,4,5),\ \overrightarrow{AC}=(1,2,2),\ \overrightarrow{AD}=(9,14,16),$$

所以

$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 2\\ 9 & 14 & 16\end{vmatrix}=0,$$

故四点 A,B,C,D 共面.

5.2.7 二重向量积

设给定三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$,若先作前两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,再将所得的向量与第三个向量 $\boldsymbol{c}$ 作向量积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$,得到一个向量,称为二重向量积. 关于二重向量积,有以下公式成立:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}.$$

下面利用坐标法直接证明这一公式. 设

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\ \boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3),\ \boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3),$$

$$\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(d_1,d_2,d_3).$$

因为

$$\boldsymbol{d}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_2b_3-a_3b_2 & a_3b_1-a_1b_3 & a_1b_2-a_2b_1\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix},$$

所以

$$\begin{aligned}d_1&=(a_3b_1-a_1b_3)c_3-(a_1b_2-a_2b_1)c_2\\&=(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_1-(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)a_1\\&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_1-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})a_1;\end{aligned}$$

同样可得

$$d_2=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_2-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})a_2;$$

$$d_3=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_3-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})a_3.$$

因此证得

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}.$$

在二重向量积中,当因子 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的次序轮换时,又有

$$(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b};$$

$$(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

从而得到

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.$$

注意二重向量积不满足结合律，就是$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$一般不等于$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.

习题 5.2

1. 判断下列结论是否成立，并举例说明：

(1) 若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$或$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

(2) 若$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，则必有$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}$.

(3) 两单位向量的数量积必等于 1，向量积必等于一单位向量.

(4) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$.

(5) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2$.

(6) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}$.

(7) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$.

2. 设$ABCD$是平行四边形，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$M$是对角线$AC$和$BD$的交点. 试用$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$表示$\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$和$\overrightarrow{MD}$.

3. 设$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$，证明：对任意一点$O$，

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}).$$

4. 证明空间四边形相邻各边中点的连线构成平行四边形.

5. 已知向量$\boldsymbol{a}=(3,5,-1)$，$\boldsymbol{b}=(2,2,3)$，$\boldsymbol{c}=(4,-1,-3)$，求向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$和$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}$坐标.

6. 已知$\boldsymbol{a}=(3,-5,8)$，$\boldsymbol{b}=(-1,1,-4)$，求$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的模和方向余弦.

7. 已知$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k}$，求$\boldsymbol{a}$方向的单位向量$\boldsymbol{a}^0$的坐标.

8. 已知$\boldsymbol{a}$与Ox与Oy所夹的角分别是$\alpha=60°$，$\beta=120°$，且$|\boldsymbol{a}|=2$，试求$\boldsymbol{a}$的坐标.

9. 设$\boldsymbol{a}=(-2,3,\beta)$，$\boldsymbol{b}(\alpha,-6,2)$，问$\alpha,\beta$为何值时两向量共线？

10. 已知$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的夹角$\varphi=\frac{2}{3}\pi$，且$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，计算：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$;　　　　(2) $(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$.

11. 已知$\boldsymbol{a}=(4,-2,4)$，$\boldsymbol{b}=(6,-3,2)$，试计算：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$;　　　　　(2) $\sqrt{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}$;

(3) $(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$;　　(4) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$.

12. 求向量 $\boldsymbol{a}=(2,-4,4)$ 和 $\boldsymbol{b}=(-3,2,6)$ 的夹角的余弦.

13. 试求向量 $\boldsymbol{a}=(5,2,5)$ 在向量 $\boldsymbol{b}(2,-1,2)$ 上的投影,即求数值 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^0$.

14. 证明下列恒等式

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=2(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2),$$

并说明它的几何意义.

15. 作图说明下列各式:

(1) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$;

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

(3) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

16. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直,且 $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=4$,试计算:

(1) $|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|$;

(2) $|(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})|$.

17. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$,又 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$,试计算:

(1) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2$;　　　　　(2) $[(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\times(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})]^2$.

18. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,-1,-2)$ 和 $\boldsymbol{b}=(1,2,-1)$,试求下列向量积的坐标:

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$;　　　　　(2) $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

19. 已知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为三个互相垂直的已知向量,且 $\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}$,求 $\boldsymbol{r}$ 的模.

20. 已知点 $A(1,2,0)$, $B(3,0,-3)$, $C(5,2,6)$,求三角形 ABC 的面积.

21. 计算顶点为 $A(2,-1,1)$, $B(5,5,4)$, $C(3,2,-1)$, $D(4,1,3)$ 的四面体的体积.

22. 判断下列向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 是否共面?

(1) $\boldsymbol{a}=(2,3,-1)$, $\boldsymbol{b}=(1,-1,3)$, $\boldsymbol{c}=(1,9,-11)$;

(2) $\boldsymbol{a}=(3,-2,1)$, $\boldsymbol{b}=(2,1,2)$, $\boldsymbol{c}=(3,-1,-2)$.

23. 下列四点:$A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$, $D(2,1,3)$ 是否在一个平面上?

24. 已知 $\overrightarrow{OA}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\overrightarrow{OB}=3\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$, $\overrightarrow{OC}=4\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k}$,问 A,

B,C 三点是否共线？

25. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 的单位向量，试求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$ 的值.

26. 试证恒等式

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2.$$

27. 已知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，试证

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}.$$

28. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共线，且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$，求证 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

29. 若向量 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 垂直于向量 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$，向量 $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 垂直于向量 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，求两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角.

30. 计算以向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{p}-3\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}-3\boldsymbol{r}$，和 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$ 为棱的平行六面体的体积，这里 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 是互相垂直的单位向量.

31. 点 M 的向径与 x 轴成 $45°$ 角，与 y 轴成 $60°$ 角，其长为 6 单位，若在 z 轴上的坐标是负值，求点 M 的坐标.

32. 已知一个三角形的一个顶点 $A(2,-5,3)$ 及二边的向量 $\overrightarrow{AB}=(4,1,2)$ 和 $\overrightarrow{BC}=(3,-2,5)$，求其余顶点的坐标和向量 $\overrightarrow{CA}$，并求 $\angle A$.

33. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 互相垂直，证明

$$\boldsymbol{a}\times\{\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]\}=a^4\boldsymbol{b}.$$

34. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 与实数 λ；求一向量 $\boldsymbol{x}$，使其满足方程

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=\lambda.\end{cases}$$

5.3 平面与直线

5.3.1 平面的方程

设给定空间一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 与一个非零向量 $\boldsymbol{n}(A,B,C)$，则过点 M_0 且垂直于向量 $\boldsymbol{n}$ 的平面在空间的位置就完全被确定了，现在要来建立它的方程.

在平面上任取一点 $M(x,y,z)$，则向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 相垂直(图 5.24)，因此它们的数量积为零，即

$$\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0.$$

若记 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}, \boldsymbol{r}_0=\overrightarrow{OM_0}$，由于 $\overrightarrow{M_0M}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$，所以

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = 0.$$

这个等式对平面上所有的点都成立；反之，使该等式成立的点也必在平面上，因而它就是平面的向量方程式. $\boldsymbol{n}$ 称为平面的法向量.

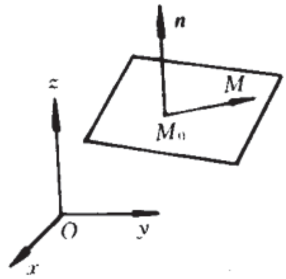


图 5.24

注意到

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0 = (x-x_0, y-y_0, z-z_0),$$

上述向量方程又可写成坐标的形式

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

称为平面的点法式方程. 若 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$，它可以写成

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

由此不难看出，空间任何平面都可表示为 x, y, z 的三元一次方程，相反的结论也是成立的. 就是说，如果任意给定一个三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

只要系数 A,B,C 不全为零，则它就表示空间的一张平面. 因为这时总可求得一组值 x_0, y_0, z_0，满足

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$$

而所给的三元一次方程就可改写为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

这就是通过点 (x_0, y_0, z_0) 且以 $\boldsymbol{n}(A,B,C)$ 为法向量的平面方程. 所以三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 表示空间的平面，并称为平面的一般式方程.

如果 $D=0$，则方程 $Ax+By+Cz=0$ 就表示通过原点的平面.

如果 $C=0$，由于法向量 $\boldsymbol{n}(A,B,0)$ 垂直于 z 轴，所以方程 $Ax+By+D=0$ 表示平行于 z 轴的平面(图 5.25). 同样，方程 $Ax+$

$Cz+D=0$ 与 $By+Cz+D=0$ 所表示的平面就分别平行于 y 轴与 x 轴.

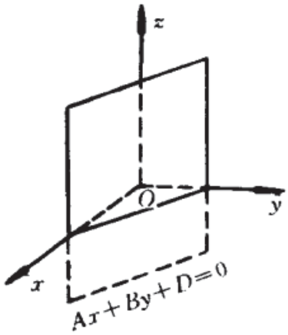


图 5.25

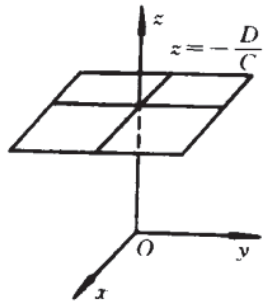


图 5.26

如果 $A=B=0$，这时法向量 $\boldsymbol{n}(0,0,C)$ 平行于 z 轴，所以方程 $Cz+D=0$ 表示平行于坐标面 Oxy 的平面(图 5.26). 同样，方程 $Ax+D=0$ 与方程 $By+D=0$ 所表示的平面就分别与坐标面 Oyz 与 Ozx 平行.

例 1 求过点$(1,-2,0)$且以 $\boldsymbol{n}(6,-4,3)$为法向量的平面方程.

解 由平面的点法式方程得

$$6(x-1)-4(y+2)+3(z-0)=0,$$

化简后给出

$$6x-4y+3z-14=0.$$

这就是所要求的平面方程.

例 2 求通过点 $M_0(3,2,1)$及 x 轴的平面方程.

解 因所求平面通过 x 轴，故可设这平面的方程为

$$By+Cz=0.$$

又平面过点 $M_0(3,2,1)$，所以它的坐标应满足这个方程，即有

$$2B+C=0$$

或 $C=-2B$. 代入后消去 B 即得所求平面的方程为

$$y-2z=0.$$

例 3 求过三点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$,$M_3(x_3,y_3,z_3)$的平面方程.

解 因为向量$\overrightarrow{M_1M_2}$与$\overrightarrow{M_1M_3}$在所求的平面上,所以向量积$\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}$就是这平面的一个法向量. 在平面上任取一点 $M(x,y,z)$,则有

$$\overrightarrow{M_1M}\cdot(\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3})=0,$$

写成坐标形式

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0,$$

它就是所求平面的方程.

特别,如果所给的三点为$(\alpha,0,0)$,$(0,\beta,0)$,$(0,0,\gamma)$,则上式成为

$$\begin{vmatrix} x-\alpha & y & z \\ -\alpha & \beta & 0 \\ -\alpha & 0 & \gamma \end{vmatrix}=0.$$

从而算得

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1$$

它称为平面的截距式方程,而 α,β 与 γ 称为平面在 x 轴,y 轴与 z 轴上的截距(5.27).

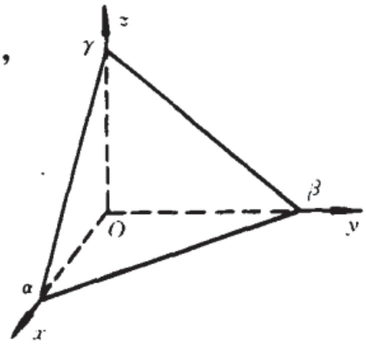


图 5.27

5.3.2 两平面的关系

设两平面 π_1 与 π_2,它们的方程是

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

则法向量分别是

$$\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1),\ \boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2).$$

如果两平面 π_1 与 π_2 平行,则法向量 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 必共线. 由此推知,存

在常数 λ,使得

$$\boldsymbol{n}_1 = \lambda \boldsymbol{n}_2,$$

或写成坐标的形式为

$$A_1 = \lambda A_2,\ B_1 = \lambda B_2,\ C_1 = \lambda C_2.$$

因此两平面 π_1 与 π_2 平行的充分必要条件是

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

亦即平面一般式方程的一次项系数对应成比例.

如果两平面 π_1 与 π_2 互相垂直,则法向量 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 也互相垂直,所以

$$\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 = 0.$$

因此两平面 π_1 与 π_2 垂直的充分必要条件是

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0,$$

亦即平面一般式方程的一次项系数对应乘积之和为零.

在一般的情形,如果两平面 π_1 与 π_2 相交所成的二面角定义为其法向量 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 的夹角(图 5.28),并记作 φ,则有

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

这就是所给两平面的夹角的余弦公式.

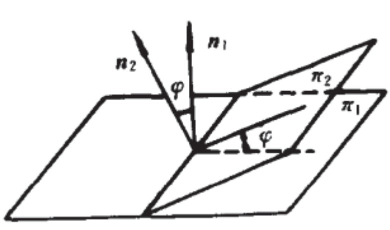


图 5.28

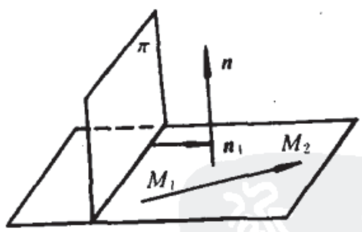


图 5.29

例 1 求通过 z 轴且与平面 $x-2y+5=0$ 垂直的平面.

解 通过 z 轴的平面方程可设为

$$Ax + By = 0,$$

这平面与已给的平面 $x-2y+5=0$ 垂直，故有

$$A-2B=0,$$

或 $A=2B$. 代入所设的平面方程并消去 B，就得到

$$2x+y=0.$$

它即是所求的平面方程.

例 2 求通过点 $M_1(8,-3,1)$ 与 $M_2(4,7,2)$ 且垂直于平面 π: $3x+5y-7z+21=0$ 的平面方程.

解 所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 应垂直于向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 与已给平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(3,5,-7)$（图 5.29），因此可取

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\overrightarrow{M_1M_2}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3 & 5 & -7\\ -4 & 10 & 1\end{vmatrix}=25(3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}),$$

故所求平面的方程为

$$3(x-8)+(y+3)+2(z-1)=0,$$

即

$$3x+y+2z-23=0.$$

例 3 求两相交的平面 $x-y+z=0$ 与 $x+y-z=0$ 的夹角.

解 所给两平面的法向量是

$$\boldsymbol{n}_1(1,-1,1),\ \boldsymbol{n}_2(1,1,-1),$$

故其夹角 φ 的余弦为

$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=-\frac{1}{3},$$

从而求得 $\varphi=\pi-\arccos\dfrac{1}{3}$.

注意，如果将法向量 $\boldsymbol{n}_1$ 取成它的负向量，这时 $\cos\varphi=\dfrac{1}{3}$，而 $\varphi=\arccos\dfrac{1}{3}$，依定义，它仍是两平面的夹角.

5.3.3 点到平面的距离

设给定平面 π: $Ax+By+Cz+D=0$ 与平面外一点 $M_0(x_0,$

y_0, z_0)，现在要来导出点 M_0 到平面 π 的距离公式.

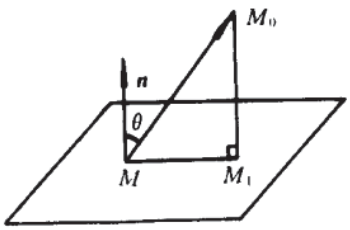


图 5.30

过点 M_0 作平面 π 的垂线，记垂足为 M_1（图 5.30），于是 M_0M_1 即为欲求的距离 d. 若在平面 π 上任取一点 $M(x,y,z)$. 并设向量 $\overrightarrow{MM_0}$ 与平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 的夹角为 θ，则有

$$d = M_0M_1 = |\overrightarrow{MM_0}\cos\theta|$$

$$= \left|\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\cdot\overrightarrow{MM_0}\right|$$

$$= \frac{|A(x_0-x)+B(y_0-y)+C(z_0-z)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

因为点 M 在平面 π 上，所以 $Ax+By+Cz=-D$. 于是算得点 M_0 到平面 π 的距离为

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

例 求点$(1,-2,3)$到平面 $2x-2y+z-3=0$ 的距离 d.

解 $$d=\frac{|2\cdot1-2(-2)+3-3|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=2.$$

5.3.4 直线的方程

设已知一点 M_0 及一非零向量 $\boldsymbol{v}$，则过点 M_0 且平行于向量的直线在空间中就有完全确定的位置. 为了建立这条直线 L 的方程，在 L 上任取一点 M，并设 $\overrightarrow{OM_0}=\boldsymbol{r}_0$，$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$（图 5.31），则有

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \overrightarrow{M_0M}.$$

但 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 共线，所以必存在数 t，使 $\overrightarrow{M_0M}=t\boldsymbol{v}$，于是有

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{v}.$$

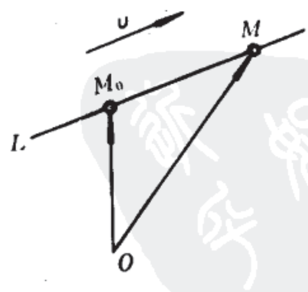


图 5.31

这个向量等式对直线 L 上的所有点都成

立. 反之,使该式成立的位置向量 $\boldsymbol{r}$,其终点 M 必在直线 L 上,因此它就是空间直线的向量式方程,$\boldsymbol{v}$ 称为这直线的方向向量,而 t 称为参数,它随点 M 的位置变化而取不同的值.

在取定的以 O 为原点的坐标系中,设点 M 的坐标为(x,y,z),M_0 的坐标为(x_0,y_0,z_0),而方向向量 $\boldsymbol{v}$ 的坐标为(l,m,n),则有

$$\boldsymbol{r}=(x,y,z),\ \boldsymbol{r}_0=(x_0,y_0,z_0),\ t\boldsymbol{v}=(lt,mt,nt),$$

于是向量式方程写成坐标的形式就是

$$x=x_0+lt,\ y=y_0+mt,\ z=z_0+nt,$$

称为直线 L 的参数方程. 如果从参数方程中消去参数 t 就得到

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

称为直线 L 的点向式方程. 它实际上是含有两个方程的方程组

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m},\ \frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

其中每一个都是三元一次方程,前者表示平行于 z 轴的平面,后者表示平行于 x 轴的平面,而直线 L 就是它们的交线.

如果方向向量的坐标之一例如 l 为零,这时点向式方程

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

应理解为下述的方程组

$$x=x_0,\ \frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

任何一条直线都可以看成是两个平面的交线,因此三元一次方程组

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

当对应的系数不成比例时就表示一条直线. 这个方程组称为直线的一般式方程.

由于通过一条直线可以作无限多个平面,任取其中两个平面,

把它们的方程联立就可以表示这条直线，所以直线的一般式方程不是唯一的. 因此如果直线 L 是给定为上述的一般式方程，我们还必须说明怎样将它化成标准的点向式方程.

首先应求出直线 L 上的一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$. 为此可先行取定例如 z_0，然后代入到一般式方程中以确定其余的 x_0,y_0.

其次应求出直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{v}=(l,m,n)$. 从图 5.28 可以看出，这个方向向量必垂直于一般式方程中每个平面的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_2)$与 $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$，所以可取

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}.$$

例 1 求过点 $M_0(4,-1,3)$且平行于直线$\dfrac{x-3}{2}=y=\dfrac{z+1}{-5}$的直线.

解 因为所求直线与已给直线平行，所以它们可以有相同的方向向量，即可取 $\boldsymbol{v}=(2,1,-5)$，从而所求直线的点向式方程是

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{-5}.$$

例 2 求过点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$的直线方程.

解 过空间两点可作一直线，而$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$就是这条直线的一个方向向量，因此直线的方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

例 3 化直线$\begin{cases}2x-3y+z-5=0\\ 3x+y-2z-2=0\end{cases}$为点向式方程.

解 为求出直线上的一个点，可先在方程中取 $z=0$，则得

$$\begin{cases}2x-3y=5\\ 3x+y=2\end{cases}$$

解之得 $x=1, y=-1$，于是$(1,-1,0)$即为所求之点. 而直线的方向向量可取为

$$\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & 1 & -2\end{vmatrix}=5\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+11\boldsymbol{k},$$

所以直线的点向式方程是

$$\frac{x-1}{5}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{11}.$$

5.3.5 两直线的位置关系

由于空间存在异面的直线，所以给出两直线同在一个平面上的条件就具有重要的意义，为此，设二直线的点向式方程已知为

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},$$

$$L_2: \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

故其方向向量分别是

$$\boldsymbol{v}_1=(l_1, m_1, n_1),\ \boldsymbol{v}_2=(l_2, m_2, n_2).$$

如图 5.32，通过直线 L_1 及直线 L_2 上的点 $M_2(x_2, y_2, z_2)$作平面 π. 容易看出，要直线 L_2 也位于这平面上当且仅当它的方向向量 $\boldsymbol{v}_2$ 平行于 π. 就是说，三向量 $\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 共面. 因此直线 L_1 与 L_2 共面的充分必要条件是这些向量的混合积为零，即

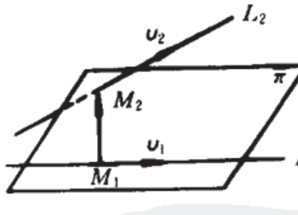


图 5.32

$$(\overrightarrow{M_1M_2}\times\boldsymbol{v}_1)\cdot\boldsymbol{v}_2=\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\end{vmatrix}=0.$$

例 1 问直线$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-z_0}{4}$中的 z_0 为何值时,它与直线$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$共面?

解 根据共面条件,z_0 必须满足

$$\begin{vmatrix} 1-1 & 2-1 & z_0-1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

解之得 $z_0=\frac{11}{3}$.

例 2 一直线通过点(1,1,1)且和两直线

$$L_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3},\quad L_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{4}$$

相交,求它的方程.

解 设所求直线的方程为$\frac{x-1}{l}=\frac{y-1}{m}=\frac{z-1}{n}$,因为它与 L_1 相交,所以它们是共面直线,故有

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ l & m & n \end{vmatrix}=l-2m+n=0;$$

同样这直线与 L_2 共面,又有

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ l & m & n \end{vmatrix}=14l-4m-6n=0.$$

从上两式可解得 $m=\frac{5}{4}l,n=\frac{3}{2}l$. 不妨令 $l=4$,于是可取$(l,m,n)=(4,5,6)$. 这个方向向量并不平行于直线 L_1 及 L_2,因此点向式方程

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-1}{6}$$

所表示的直线就与 L_1 及 L_2 相交,所以它就是要求的直线方程.

下面再来一般地考察空间两条直线 L_1 与 L_2 的交角. 从任一点引这两直线的平行线,所引二直线的两个交角都称为直线 L_1 与 L_2 的交角,而其中之一就是直线 L_1 与 L_2 的方向向量 $\boldsymbol{v}_1=(l_1,m_1,n_1)$与 $\boldsymbol{v}_2=(l_2,m_2,n_2)$的夹角 φ,所以得到

$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2|}=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

如果两直线互相垂直,则其方向向量也互相垂直,因此两直线垂直的充分必要条件是

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.$$

如果两直线平行,则其方向向量是共线的,因此两直线平行的充分必要条件是

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}.$$

例 3 求直线$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+4}{7}$与直线$\frac{x+6}{5}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{-1}$的交角.

解 所给直线的方向向量分别是$(1,-2,7)$与$(5,1,-1)$,并设这二直线的交角为 φ,则

$$\cos\varphi=-\frac{4}{27\sqrt{2}},$$

故得 $\varphi=\pi-\arccos\frac{4}{27\sqrt{2}}$.

5.3.6 点到直线的距离

设已知直线 L 的一般式方程

$$\begin{cases}\pi_1:Ax+B_1y+C_1z+D_1=0\\ \pi_2:A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

与直线外一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,求点 M_1 到直线 L 的距离 p.

过点 M_1 作到 π_1、π_2 及 L 的投影分别为 $A(x_0,y_0,z_0)$,$B(x_2,y_2,z_2)$,M_0,而 π_1 与 π_2 的法向量为 $\boldsymbol{n}_i=(A_i,B_i,C_i)$,$i=1,2$. 故 L

的方向向量 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$. 由向量积的模之几何意义得到

$$P=\frac{|\boldsymbol{v}\times\overrightarrow{M_0M_1}|}{|\boldsymbol{v}|}=\frac{(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2)\times\overrightarrow{M_0M_1}|}{|\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2|}$$

$$=\frac{|(\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{M_0M_1})\boldsymbol{n}_2-(\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{M_0M_1})\boldsymbol{n}_1|}{|\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2|}$$

从图 5.33 可以看出

$$\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{M_0M_1}=\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AM_1}=-(A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D_1)$$

$$\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{M_0M_1}=\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BM_1}=-(A_2x_1+B_2y_1+C_2z_1+D_2)$$

因而我们有

$$p=\frac{\boldsymbol{v}\times\overrightarrow{M_0M_1}}{|\boldsymbol{v}|}=$$

$$\frac{|(A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D_1)\boldsymbol{n}_2-(A_2x_1+B_2y_1+C_2z_1+D_2)\boldsymbol{n}_1|}{|\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_1|}$$

这就是点到直线的距离公式.

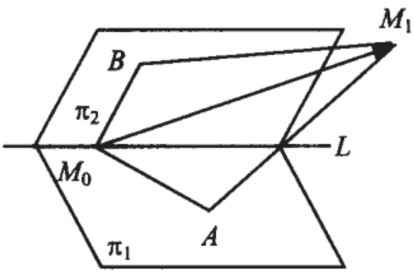


图 5.33

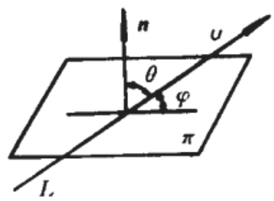


图 5.34

5.3.7 直线与平面的关系

设直线的方程是

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

平面的方程是

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

如果直线与平面相交,其交角就定义为直线与它在此平面上的投

影所作成的锐角. 若设直线的方向向量 $\boldsymbol{v}=(l,m,n)$ 与平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 的夹角为 θ(图 5.34),则直线与平面的这个交角 φ 等于 $\frac{\pi}{2}-\theta$ 或 $-\frac{\pi}{2}+\theta$. 由于

$$\begin{aligned}\sin\varphi &= \pm\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\ &= \pm\cos\theta = |\cos\theta|,\end{aligned}$$

所以得到

$$\sin\varphi = \frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{v}|} = \frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\ \sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

如果直线与平面互相垂直,这时直线的方向向量与平面的法向量共线,因此直线与平面垂直的条件是

$$\frac{l}{A}=\frac{m}{B}=\frac{n}{C}.$$

如果直线与平面平行,这时直线的方向向量与平面的法向量互相垂直,因此直线与平面平行的条件是

$$Al+Bm+Cn=0.$$

当直线与平面相交时,欲求交点的坐标,可在直线的点向式方程中令其比值为 t 而得

$$x=x_0+lt,\ y=y_0+ml,\ z=z_0+nt.$$

将它们代入到平面的方程中有

$$A(x_0+lt)+B(y_0+mt)+C(z_0+nt)+D=0.$$

整理后得

$$(Al+Bm+Cn)t=-(Ax_0+By_0+Cz_0+D).$$

如果 $Al+Bm+Cn\neq 0$,则由上式求得

$$t=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cn}.$$

把这个 t 值代入到直线的参数方程中,即得直线与平面的交点之坐标.

如果 $Al+Bm+Cn=0$,但 $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$,这时直线

与平面平行，而点(x_0,y_0,z_0)又不在平面上，所以直线与平面没有交点.

如果$Al+Bm+Cn=0$，且$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$，这时直线与平面平行，而点(x_0,y_0,z_0)又在平面上，所以直线完全落在平面上.

例 求直线$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$与平面$2x-y+z-6=0$的交点及交角.

解 将此直线方程化为参数式

$$x=2+t,\ y=3+t,\ z=4+2t,$$

并代入到所给平面的方程中，得

$$2(2+t)-(3+t)+(4+2t)-6=0,$$

求出$t=\frac{1}{3}$，从而得到交点的坐标为$\left(\frac{7}{3},\frac{10}{3},\frac{14}{3}\right)$. 又由于

$$\sin\varphi=\frac{|2\cdot1+(-1)\cdot1+1\cdot2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{1}{2},$$

所以直线与平面的交角为$\frac{\pi}{6}$.

5.3.8 平面束的方程

设空间直线L的方程为

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases},$$

其中方程$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$与$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$分别表示平面π_1与π_2，而L就是这两平面的交线.

我们由此建立如下的一次方程

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

其中λ_1与λ_2是不全为零的任意常数. 因为它是x,y,z的三元一次方程，所以表示空间的一个平面. 若在直线L上任取一点，则这点的坐标必满足平面π_1与π_2的方程，因而也满足上面所建立的

方程，故这个建立的方程是表示通过直线 L 的平面. 当 λ_1 与 λ_2 取各种不同的数值时，就得到它所表示的各个不同的平面. 反之，容易证明通过直线 L 的任何平面都可以通过适当地选取 λ_1 与 λ_2 而从上面所建立的方程中得到. 特别当 $\lambda_1=0$ 时得到平面 π_2；而当 $\lambda_2=0$ 时就得到 π_1.

通过定直线的所有平面的全体称为平面束. 而上面所建立的含有任意常数 λ_1 与 λ_2 的方程就是通过定直线 L 的平面束的方程.

如果 $\lambda_1\neq0$，并令 $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}=\lambda$，则有

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0.$$

这种形式的平面束方程只依赖于一个任意常数，称为平面束的标准式.

例 1 已知直线 L 的方程为

$$x+2y-1=0,\quad x-y+z=0$$

与直线外一点 $M(1,1,1)$，求过直线 L 与点 M 的平面.

解 因所求的平面通过直线 L，所以可设这平面的方程为

$$x+2y-1+\lambda(x-y+z)=0.$$

又这平面通过点 $M(1,1,1)$，所以它的坐标应满足这个方程，由此即可定出 $\lambda=-2$，于是所求平面的方程为

$$x+2y-1-2(x-y+z)=0,$$

即

$$x-4y+2z+1=0.$$

例 2 试求过直线 L_1

$$3x+2y+5z+6=0,\ x+4y+3z+4=0$$

且平行于直线 L_2

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+1}{-3}$$

的平面方程.

解 设所求平面的方程为

$$3x+2y+5z+6+\lambda(x+4y+3z+4)=0,$$

或写成

$$(3+\lambda)x+(2+4\lambda)y+(5+3\lambda)z+(6+4\lambda)=0.$$

由于这平面与直线 L_2 平行,故应有

$$3(3+\lambda)+2(2+4\lambda)-3(5+3\lambda)=0,$$

如此解得 $\lambda=1$. 把 λ 的值代入后给出

$$2x+3y+4z+5=0,$$

这就是所要的平面方程.

习题 5.3

1. 指出下列平面位置的特点,并作图

(1) $4x+4y+4z=-2$; (2) $3x-3y+2=0$;

(3) $y-3z=0$; (4) $3x-2=0$.

2. 已知点 $P(2,-1,-1)$是原点到一个平面所引垂线的垂足,求这个平面的方程.

3. 试求通过点 $M_1(2,-1,3)$和 $M_2(3,1,2)$且平行于向量 $\boldsymbol{v}=(3,-1,4)$ 的平面的方程.

4. 设平面通过点$(5,-7,4)$且在 x,y,z 三轴上的截距相等,求平面方程.

5. 一平面通过点$(2,1,-1)$,而在 x 轴和 y 轴上截距分别为 2 和 1,求它的方程.

6. 试求经过下列各组三点的平面方程

(1) $(3,-1,2),(4,-1,-1),(2,0,2)$;

(2) $(2,3,0),(-2,-3,4),(0,6,0)$;

(3) $(1,1,-1),(-2,-2,2),(1,-1,2)$.

7. 试判断下列方程组中各组平面的位置关系(平行,重合,相交,垂直):

(1) $2x-3y+5z-7=0$ 与 $2x-3y+5z+3=0$;

(2) $4x+2y-4z+5=0$ 与 $2x+y+2z-1=0$;

(3) $x-3z+2=0$ 与 $2x-6z+4=0$;

(4) $3x-y-2z-5=0$ 与 $x+9y-3z+2=0$.

8. 求通过点 $M(3,-1,1)$ 且同时垂直于两个平面 $2x-z+1=0$ 和 $y=0$ 的平面方程.

9. 求通过点 $M(-5,2,-1)$ 且平行于坐标面 Oyz 的平面的方程.

10. 求通过点 $M_1(2,-1,1)$ 和 $M_2(3,1,2)$ 且平行于 Oy 轴的平面的方程.

11. 求下列各对平面的夹角：

(1) $2x-y+z-7=0$ 和 $x+y+2z-11=0$；

(2) $4x+2y+4z-7=0$ 和 $3x-4y=0$；

(3) $2x+y-2z-4=0$ 和 $3x+6y-2z-12=0$.

12. 计算点到平面的距离 d：

(1) $M(2,-1,-1)$，$16x-12y+15z-4=0$；

(2) $M(1,2,-3)$，$5x-3y+z+4=0$；

(3) $M(9,2,-2)$，$12y-5z+5=0$.

13. 求两平行平面间的距离：

(1) $3x+6y-2z-7=0$ 与 $3x+6y-2z+14=0$；

(2) $2x-y+2z+9=0$ 与 $4x-2y+4z-21=0$.

14. 试判定点 $M(2,-1,1)$ 与原点在下列平面的同侧还是异侧？

(1) $5x+3y+z-18=0$；

(2) $x+5y+12z-1=0$.

15. 求与两平面 $x+y-2z-1=0$ 和 $x+y-2z+3=0$ 等距离的平面.

16. 求两平面 $2x-y+z-7=0$ 和 $x+y+2z-11=0$ 所成两个二面角的平分面.

17. 在平面 $x+y+z-1=0$ 与三坐标平面所围成的四面体内求一点，使它到四个面的距离相等.

18. 在 Oy 轴上求一点，使它到平面 $x+2y-2z-2=0$ 的距离 $d=4$.

19. 在 Oy 轴上求一点，使它到平面 $2x+3y+6z-6=0$ 及平面 $8x+9y-72z+73=0$ 距离相等.

20. 分别按下列各组条件求平面方程：

(1) 平面两点 $A(1,2,3)$ 和 $B(2,-1,4)$ 间的线段且垂直于线段 AB；

(2) 与平面 $6x+3y+2z+12=0$ 平行，且到原点的距离为 1 个单位；

(3) 与平面 $6x+3y+2z+12=0$ 平行，而点 $(0,2,-1)$ 到这两个平面的

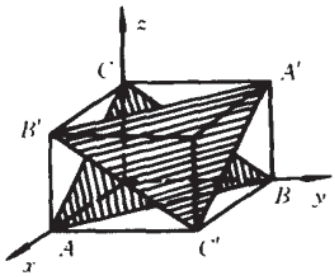
距离相等；

(4) 通过 x 轴，且点(5,4,13)到这个平面的距离为 8 个单位.

21. 求下列平面的方程：

(1) 经过点 $M(0,0,1)$及 $N(3,0,0)$并与 Oxy 平面成$\pi/3$ 角；

(2) 经过 z 轴且与平面 $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$ 成 $\pi/3$ 角.



题 22 图

22. 过点 $P(a,b,c)$作平行于坐标面的三个平面，它和坐标面围成一个长方体(题 22 图). 试证通过 A,B,C 的平面和通过 A',B',C'的平面是平行的. 并求这两平面的距离.

23. 一半径 $R=5$，球心在 $M(5,-5,3)$的球与平面 $9x-6y-2z=25$ 相截得一圆，求这圆的圆心坐标和半径.

24. 分别求出满足下列各组条件的直线方程：

(1) 过点(2,3,−8)且平行于直线

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z+8}{5};$$

(2) 过点(2,−3,4)且与平面 $3x-y+2z=4$ 垂直；

(3) 过点(0,2,4)而与两平面 $x+2z=1$，$y-3z=2$ 平行；

(4) 过点(−1,2,1)且平行于直线

$$\begin{cases}x+y-2z-1=0\\x+2y-z+1=0\end{cases};$$

(5) 过点(2,−3,4)且和 z 轴垂直并相交.

25. 求通过两已知点的直线方程：

(1) (1,−2,1)，(3,1,−1)；

(2) (3,−1,0)，(1,0,−3).

26. 求通过点(−1,−4,3)并与下面两直线：

$$\begin{cases}2x-4y+z=1\\x+3y=-5\end{cases},\quad\begin{cases}x=2+4t\\y=-1-t\\z=-3+2t\end{cases}$$

都垂直的直线方程.

27. 求直线$\begin{cases}2x+3y-z-4=0\\3x-5y+2z+1=0\end{cases}$的参数方程.

28. 求直线与平面的交点：

(1) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{6}$，$2x+3y+z-1=0$；

(2) $\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{2}$，$x+2y-2z+6=0$.

29. 求下列直线的夹角：

(1) $\begin{cases}2x-2y-z+8=0\\x+2y-2z+1=0\end{cases}$和

$\begin{cases}4x+y+3z-21=0\\2x+2y-3z+15=0;\end{cases}$

(2) $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-3}{-12}=\dfrac{z-1}{3}$和

$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-8}{-2}$.

30. 证明下列各组直线互相平行，并求它们间的距离：

(1) $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=z$ 和$\begin{cases}x+y-z=0\\x-y-5z-8=0;\end{cases}$

(2) $\dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z-9}{4}$和$\begin{cases}2x+2y-z-10=0\\x-y-z-22=0;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2y+z=0\\3y-4z=0\end{cases}$和$\begin{cases}5y-2z=8\\4y+z=4.\end{cases}$

31. 证明下列各组直线垂直相交，并求它们的交点：

(1) $\begin{cases}x+2y=1\\2y-z=1\end{cases}$和$\begin{cases}x-y=1\\x-2z=3;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}4x+y-3z+24=0\\z-5=0\end{cases}$和$\begin{cases}x+y+3=0\\x+2=0.\end{cases}$

32. 求直线和平面的夹角 φ：

(1) $\begin{cases}3x-2y=24\\3x-z=-4,\end{cases}$；$6x+15y-10z+31=0$；

(2) $\begin{cases}x+y+3z=0\\x-y-z=0,\end{cases}$；$x-y-z+1=0$；

(3) $\frac{x}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{7}$, $3x-2y+7z=8$.

33. 求点到直线的距离 p:

(1) $M_1(1,0,-1)$, $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$;

(2) $M_1(1,2,3)$, $\begin{cases}x+y-z=1\\2x+z=3;\end{cases}$

(3) $M_1(3,-1,2)$, $\begin{cases}2x-y+z-4=0\\x+y-z+1=0.\end{cases}$

34. 证明下列各组直线是异面直线,并求它们的距离(即两直线公垂线之长):

(1) $\frac{x-9}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{1}$和$\frac{x}{-2}=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2}$;

(2) $\begin{cases}x+y-z=1\\2x+z=3\end{cases}$和 $x=y=z-1$;

(3) $\begin{cases}x+y-z-1=0\\2x+y-z-2=0\end{cases}$和$\begin{cases}x+2y-z-2=0\\x+2y+2z+4=0.\end{cases}$

35. 试求通过点 $P_0(1,-2,1)$且垂直于直线

$$\begin{cases}x-2y+z-3=0\\x+y-z+2=0\end{cases}\text{的平面方程.}$$

36. 试求通过两平面 $2x-3y+z-3=0$, $x+3y+2z+1=0$ 的交线和一点 $P(1,-2,3)$的平面的方程.

37. 试求通过直线$\begin{cases}3x+2y-z-1=0\\2x-3y+2z+2=0\end{cases}$并垂直于平面 $x+2y+3z-5=0$ 的平面方程.

38. 求经过两平面 $x+5y+z=0$ 和 $x-z+4=0$ 的交线,且和平面 $x-4y-8z+12=0$ 相交 $45°$角的平面方程.

39. 试求过点 $P_0(1,2,-3)$且平行于两直线

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-7}{3}\text{和}\frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{-1}$$

的平面方程.

40. 求通过直线 $x=3t+1$, $y=2t+3$, $z=-t-2$ 且平行于直线

$\begin{cases}2x-y+z-3=0\\x+2y-z-5=0\end{cases}$的平面方程.

41. 过直线$\begin{cases}5x-11z+7=0\\5y+7z-4=0\end{cases}$作两互相垂直的平面. 其中一平面过点(4,−3,1),求此二平面方程.

42. 求点(−1,2,0)在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影.

43. 求点(2,3,1)在直线 $x=t-7,y=2t-2,z=3t-2$ 上的投影.

44. 求原点关于平面 $6x+2y-9z+121=0$ 对称的点的坐标.

45. 求点(1,2,3)关于直线$\frac{x}{1}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-3}{-2}$对称的点的坐标.

46. 试求 λ,使两直线$\frac{x-1}{\lambda}=\frac{y+4}{5}=\frac{z-3}{-3}$与$\frac{x+3}{3}=\frac{y-9}{-4}=\frac{z+14}{7}$相交,并求出交点和由此两直线确定的平面方程.

47. 经过平面 $x+28y-2z+17=0$ 和平面 $5x+8y-z+1=0$ 的交线,作切于球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的平面.

48. 试求通过点 $P_0(-1,2,-3)$,垂直于向量 $\boldsymbol{s}=(6,-2,-3)$且与直线$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-5}$相交的直线方程.

49. 一直线通过点(−3,5,−9),且与两直线

$$\begin{cases}y=3x+5\\z=2x-3\end{cases},\quad\begin{cases}4x-y-7=0\\5x-z+10=0\end{cases}$$

相交,求其方程.

50. 求直线$\begin{cases}x+y-z-1=0\\x-y+z+1=0\end{cases}$在平面 $x+y+z=0$ 上的投影直线的方程.

51. 求直线 $x=3-t,y=-1+2t,z=5+8t$ 在三坐标面上的投影直线方程.

52. 写出垂直于平面 $5x-y+3z-2=0$,且与它的交线在 Oxy 平面上的平面方程.

53. 求平行于平面 $2x+y+2z+5=0$ 而与三坐标平面所构成的四面体的体积为 1 单位的平面.

54. 求过点 $A(1,1,1)$,并与直线$\begin{cases}3x+y-z+1=0\\2x-y+4z-4=0\end{cases}$相交成直角的直线方程.

55. 求由原点到直线$\frac{x-5}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-2}$的垂线方程.

56. 一平面通过从点$(1,-1,1)$到直线$\begin{cases}y-z+1=0\\x=0\end{cases}$的垂线并垂直于平面$z=0$,试求其方程.

57. 一直线过点$(-1,0,4)$,平行于平面$3x-4y+z-10=0$,且与直线$\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$相交,试求其方程.

5.4 常见曲面

5.4.1 曲面方程的概念

在取定空间直角坐标系后,平面就可以表示为坐标x,y,z的三元一次方程,而每一个这样的三元一次方程的几何图形就是一个平面.同样,空间曲面这时可用坐标x,y,z的一个三元方程$F(x,y,z)=0$来表示.使得凡在此曲面上的点的坐标都满足这个方程,而坐标满足这个方程的点都在此曲面上.这个三元方程$F(x,y,z)=0$就称为该曲面的方程.反之任何一个三元方程$F(x,y,z)=0$都可看成是一张曲面,这张曲面就是坐标满足该方程的点的全体所构成的空间图形.

下面将举例说明如何建立空间曲面的方程.

例 1 求到两定点$A(1,-2,1)$与$B(2,1,-2)$等距离的点$M(x,y,z)$的几何轨迹.

解 由于$AM=BM$,所以

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2}$$
$$=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2}$$

两端平方后再化简得

$$2x+6y-6z-3=0.$$

因此点M的几何轨迹为一平面,上式就是这个平面的方程.

例 2 设球面的中心在点 $C(a,b,c)$，且半径为 R，求它的方程.

解 由定义，球面是动点 $M(x,y,z)$ 的几何轨迹，这动点 M 到中心 C 的距离等于 R，即 $MC=R$. 于是可得

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=R.$$

平方后给出

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

这就是所要求的球面方程.

若球心在坐标原点，则 $a=b=c=0$，而球面的方程化成

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

5.4.2 柱　　面

我们知道，三元一次的缺项方程，例如 $Ax+By+D=0$，在空间中表示一个平行于 z 轴的平面. 这个平面可看成是由平行于 z 轴的直线沿坐标面 Oxy 内的直线 $Ax+By+D=0$ 平行移动所生成的几何轨迹. 一般地，设 L 是给定一条空间曲线和通过其上面某点的一条直线，则当此直线沿曲线 L 平行移动时所构成的曲面称为柱面，而 L 称为柱面的准线，动直线称为它的母线(图 3.35).

若准线 L：$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，今求母线的方向向量 $\boldsymbol{v}=(l,m,n)$ 的柱面方程. 任取一点 $M(x,y,z)$，过 M 以 $\boldsymbol{v}$ 为方向向量作直线. 点 M 位于所求柱面上就等价于此直线与准线 L 相交. 设交点为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，故得到

$$\begin{cases}F(x_0,y_0,z_0)=0\\G(x_0,y_0,z_0)=0\end{cases}$$

但又有

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t$$

或

$$x_0 = x - lt,\ y_0 = y - mt,\ z_0 = z - nt$$

于是,所求的柱面方程的参数形式为

$$\begin{cases} F(x - lt, y - mt, z - nt) = 0 \\ G(x - lt, y - mt, z - nt) = 0 \end{cases}$$

消去 t 就得到它的直角坐标形式. 例如,以 Oxy 平面上的曲线 $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ 为准线,母线的方向向量 $\boldsymbol{v}=(l,m,n)(n\neq0)$ 的柱面方程的参数形式为

$$\begin{cases} f(x - lt, y - mt) = 0 \\ z - nt = 0 \end{cases} (n \neq 0)$$

从第二个方程得到 $t=z/n$,消去 t 后有柱面方程为

$$f\left(x - \frac{l}{n}z,\ y - \frac{m}{n}z\right) = 0$$

特别,当母线平行 z 轴,即 $\boldsymbol{v}=(0,0,n)$ 时,柱面方程为 $f(x,y)=0$.

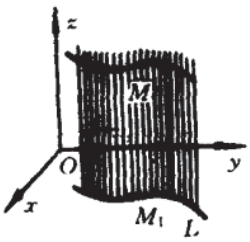


图 5.35

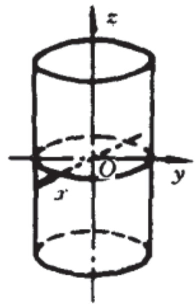


图 5.36

同样,方程 $g(y,z)=0$ 表示母线平行于 x 轴的柱面;而方程 $h(z,x)=0$就表示母线平行于 y 轴的柱面.

必须注意,方程 $f(x,y)=0$ 在空间表示一个柱面,而它与坐标平面 Oxy 上的交线,即准线 L,应该用方程组来表示:

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0. \end{cases}$$

以下给出母线平行于 z 轴的几个柱面方程，它们都是二次曲面.

椭圆柱面(图 5.36)的方程是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

双曲柱面(图 5.37)的方程是

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

抛物柱面(图 5.38)的方程是

$$y^2=2px.$$

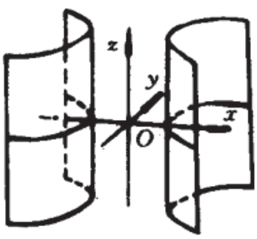


图 5.37

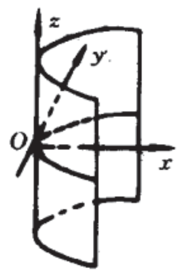


图 5.38

5.4.3 旋转曲面

平面上的曲线绕这平面上的一条定直线旋转而成的曲面称为旋转曲面，定直线称为旋转曲面的轴.

设 L 是坐标平面 Oxy 上的一条曲线，它的方程为 $f(x,y)=0$，把这曲线绕 x 轴旋转得一旋转曲面，现在要来导出这个旋转曲面的方程. 为此，在旋转曲面上任取一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，过点 M_0 作垂直于 x 轴的平面 $x=x_0$，它与旋转曲面的交线为中心在 x 轴上、半径为 $r_0=\sqrt{y_0^2+z_0^2}$ 的圆. 这圆是平面曲线 L 上的点(x_0，$\pm$

r_0)在绕 x 轴旋转时所形成的曲线,故有 $f(x_0, \pm r_0)=0$. 因而点 M_0 的三个坐标 x_0, y_0, z_0 满足方程

$$f(x_0, \pm\sqrt{y_0^2+z_0^2})=0.$$

反之,满足这个方程的点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 必须在此旋转曲面上. 由于点 M_0 的任意性,所以要求的旋转曲面的方程为

$$f(x, \pm\sqrt{y^2+z^2})=0.$$

同样,若曲线 L 绕 y 轴旋转,所得旋转面的方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+z^2}, y)=0.$$

当曲线是二次曲线时,所得的旋转面就是二次曲面. 例如椭圆 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ 绕 z 轴旋转所得的旋转面称为旋转椭球面,它的方程是

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1;$$

双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$ 绕 z 轴旋转所得的旋转面称为旋转单叶双曲面,而绕 x 轴旋转所得旋转面称为旋转双叶双曲面,它们的方程是

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1, \ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1;$$

抛物线 $y^2=2pz$ 绕 z 轴旋转所得旋转面称为旋转抛物面,它的方程是

$$x^2+y^2=2pz.$$

当直线 $\frac{y}{a}=\frac{z}{c}$ 绕 z 轴旋转时所得的旋转面称为圆锥面,它的方程是

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

5.4.4 椭球面

方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>0,b>0,c>0)$$

所表示的曲面称为椭球面(图 5.39).

从这个方程可知

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1,\ \frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,\ \frac{z^2}{c^2}\leqslant 1,$$

即

$$|x|\leqslant a,\ |y|\leqslant b,\ |z|\leqslant c.$$

这说明椭球面上的所有点都在以平面 $x=\pm a, y=\pm b, z=\pm c$ 所围成的长方体内,而 a,b,c 称为椭球的半轴.

为了研究椭球面的形状,可用平行于坐标面的一组平面去截割此椭球面,并对其切口进行分析.

用平行于坐标面 Oxy 的平面 $z=h$ 截椭球面时,截线的方程是

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2}\\ z=h,\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}=1\\ z=h.\end{cases}$$

当 $0\leqslant|h|\leqslant c$ 时,截线是以 $\dfrac{a}{c}\sqrt{c^2-h^2}$ 与 $\dfrac{b}{c}\sqrt{c^2-h^2}$ 为半轴的椭圆. 而且由坐标面 Oxy 上的最大椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$$

开始,随着 $|h|$ 的增大向 z 轴的两个方向逐渐缩小. 当 $|h|=c$ 时,上述椭圆就缩成两点 $(0,0,\pm c)$.

同样,用平行于坐标面 Oyz 或 Ozx 的平面去截椭球面也得类

似的结果，据此就可确定出椭球面的形状如图 5.39.

在椭球面的方程中，若半轴 a,b,c 有两个相等，例如 $a=b$，则它就表示坐标面 Oyz 上的椭圆

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

绕 z 轴旋转而成的旋转椭球面. 若半轴 $a=b=c$ 就得到球面方程

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

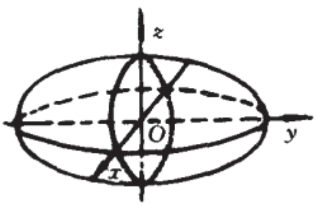


图 5.39

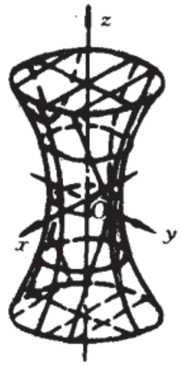


图 5.40

5.4.5 单叶双曲面

方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

所表示的曲面称为单叶双曲面(图 5.40)，其中 a,b,c 称为这个双曲面的半轴.

用平行于坐标面 Oxy 的平面 $z=h$ 去截双曲面，截线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2}\\ z=h.\end{cases}$$

它是以 $\frac{a}{c}\sqrt{c^2+h^2}$ 与 $\frac{b}{c}\sqrt{c^2+h^2}$ 为半轴的椭圆，而且由坐标面 Oxy

上的最小椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0.\end{cases}$$

开始,随着$|h|$增大向 z 轴的两个方向也逐渐增大.

若用平行于坐标面 Ozx 的平面 $y=h$ 去截双曲面,截线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2}\\ y=h,\end{cases}$$

它是以$\dfrac{a^2}{b^2}(b^2-h^2)$与$\dfrac{c^2}{b^2}(b^2-h^2)$为其半轴平方的双曲线. 当 $h^2<b^2$,这双曲线的实轴平行于 x 轴,虚轴平行于 z 轴;当 $h^2>b^2$,这双曲线的实轴平行于 z 轴,虚轴平行于 x 轴;当 $h^2=b^2$,则上述方程化成两个一次方程

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0,\quad \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0.$$

它表示平面 $y=b$ 截此双曲面所得截线是一对相交于点$(0,b,0)$的直线. 同理,平面 $y=-b$ 截此双曲面所得截线是一对相交于点$(0,-b,0)$的直线;当 $h=0$ 时,可知双曲面与坐标面 Ozx 的交线也是双曲线,其方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

类似地,若用与坐标面 Oyz 平行的平面去截双曲面时,其截线亦是双曲线. 用平面 $x=\pm a$ 截双曲面时,截线就是两对相交的直线.

如此得出单叶双曲面的形状如图 5.40 所示.

在单叶双曲面的方程中,若半轴 $a=b$,它就表示坐标面 Ozx 上的双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

绕 z 轴旋转而成的旋转曲面，称为单叶旋转双曲面.

5.4.6 双叶双曲面

方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

所表示的曲面称为双叶双曲面(图 5.41).

若用平行于坐标面 Oxy 的平面 $z=h$ 去截此曲面，截线的方程是

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{c^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1\\ y=h.\end{cases}$$

可见当 $|h|<c$ 时，平面 $z=h$ 与此曲面不相交而无截痕；当 $h=\pm c$ 时，截线缩成两点$(0,0,\pm c)$，称为双曲面的顶点；当 $|h|>c$ 时，截线是以 $\frac{a}{c}\sqrt{h^2-c^2}$ 与 $\frac{b}{c}\sqrt{h^2-c^2}$ 为半轴的椭圆，并随 $|h|$ 的增加而逐渐增大.

若用平行于坐标面 Ozx 的平面 $y=h$ 去截此曲面，截线的方程是

$$\begin{cases}-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1+\dfrac{h^2}{b^2}\\ y=h.\end{cases}$$

这是实轴平行于 z 轴，虚轴平行于 x 轴的双曲线.

若用平行于坐标面 Oyz 的平面截此双曲面，所得截线也是双曲线，其实轴与 z 轴平行，虚轴与 y 轴平行.

如此得到双叶双曲面的形状如图 5.41 所示.

在双叶双曲面的方程中，若 $a=b$，它就表示在坐标面 Oyz 上的双曲线

$$-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

绕 z 轴旋转而成的旋转曲面，并称为双叶旋转双曲面.

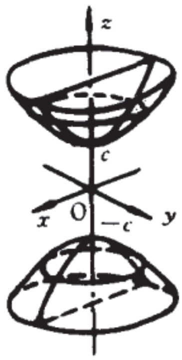


图 5.41

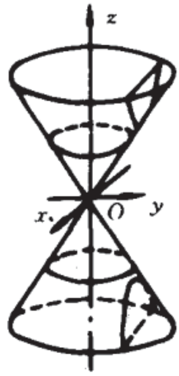


图 5.42

5.4.7　二次锥面

方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

所表示的曲面称为二次锥面(图 5.42)，为确定这个锥面的形状，我们先指出它的以下性质.

如果点 M_0 在二次锥面上，则通过坐标原点 O 点与点 M_0 的直线 L 就全在此锥面上.

事实上，设点 M_0 的坐标为(x_0,y_0,z_0)，则直线 L 的方向向量可取为$\overrightarrow{OM_0}=(x_0,y_0,z_0)$，因此这直线的方程为

$$x=x_0t,\ y=y_0t,z=z_0t.$$

将此各式代入锥面方程，并注意 $M_0(x_0,y_0,z_0)$在锥面上就得到

$$\frac{(x_0t)^2}{a^2}+\frac{(y_0t)^2}{b^2}-\frac{(z_0t)^2}{c^2}=t^2\left(\frac{(x_0)^2}{a^2}+\frac{(y_0)^2}{b^2}-\frac{(z_0)^2}{c^2}\right)=0.$$

这就证明了直线 L 在锥面上.

根据锥面这个性质可知它是由通过原点 O 的一些直线所构成. 构成锥面的直线称为这锥面的母线，这些母线所通过的点 O

称锥面的顶点.

若用平行于坐标面 Oxy 的平面 $z=h$ 截锥面所得的截线方程是

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}\\ z=h.\end{cases}$$

这是以 $\dfrac{a}{c}|h|$ 及 $\dfrac{b}{c}|h|$ 为半轴的椭圆,当 $|h|$ 增大时,椭圆从顶点向 z 轴的两个方向逐渐增大. 而二次锥面就是由过原点而沿上述椭圆移动的直线所形成的几何轨迹. 由此得到二次锥面的形状如图 5.42 所示.

若用平行坐标面 Ozx 或坐标面 Oyz 的平面去截锥面所得的截口都是双曲线.

在锥面的方程中,若 $a=b$,它就表示通常的圆锥面.

5.4.8 椭圆抛物面

方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$

所表示的曲面称为椭圆抛物面(图 5.43).

若用平面 $z=h$ 截此抛物面,所得截线的方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2h}+\dfrac{y^2}{b^2h}=1\\ z=h.\end{cases}$$

当 $h>0$ 时,它是以 $a\sqrt{h}$ 及 $b\sqrt{h}$ 为半轴的椭圆,而且随着 h 的增大,椭圆也逐渐增大. 当 $h=0$ 时,上述椭圆就缩成一点,即坐标原点,并称它为抛物面的顶点. 当 $h<0$ 时,半轴为虚数,这说明此抛物面不与平面 $z=h$ 相交. 由此可见抛物面通过原点且在上半空间内.

若用平面 $y=h$ 截此抛物面,所得截线的方程为

$$\begin{cases} x^2 = a^2\left(z - \dfrac{h^2}{b^2}\right) \\ y = h. \end{cases}$$

这是轴平行于 z 轴，而顶点为点 $\left(0, h, \dfrac{h^2}{b^2}\right)$ 的抛物线.

若用平面 $x=h$ 截此抛物面，所得截线也是抛物线.

由此得出椭圆抛物面的形状如图 5.43 所示.

在椭圆抛物面的方程中，若 $a=b$，它就表示在坐标面 Ozx 上的抛物线

$$x^2 = a^2 z$$

绕 z 轴旋转而成的旋转抛物面.

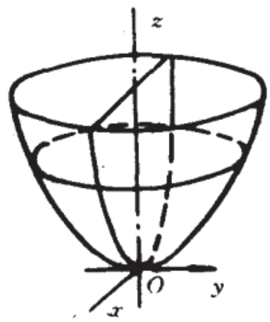


图 5.43

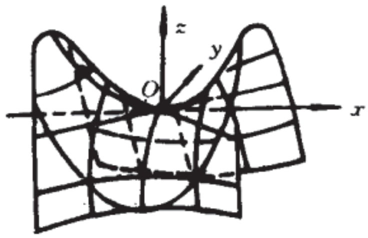


图 5.44

5.4.9 双曲抛物线

方程

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

所表示的曲面称双曲抛物面，也称马鞍面(图 5.44).

若用平面 $z=h$ 截马鞍面，所得截线的方程为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = h \\ z = h. \end{cases}$$

当 $h>0$ 时，这是实轴平行 x 轴，虚轴平行 y 轴的双曲线. 当 $h=0$ 时，这是坐标面 Oxy 上两条相交于原点的直线

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=0\\ z=0,\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=0\\ z=0,\end{cases}$$

当 $h<0$ 时，它也是双曲线，但实轴平行于 y 轴，虚轴平行于 x 轴.

若用平面 $x=h$ 截马鞍面，所得截线的方程为

$$\begin{cases}y^2=b^2\left(\dfrac{h^2}{a^2}-z\right)\\ x=h.\end{cases}$$

当 $h=0$ 时，截线是坐标面 Oyz 上顶点为原点的抛物线，且张口朝下. 当 $|h|>0$ 时，截线也都是张口朝下的抛物线，只是随 $|h|$ 的增大，抛物线的顶点也随之升高

若用平面 $y=h$ 截马鞍面，截线是张口向上的抛物线

$$\begin{cases}x^2=a^2\left(z+\dfrac{h^2}{b^2}\right)\\ y=h.\end{cases}$$

由此得出马鞍面的形状如图 5.44 所示.

习题 5.4

1. 指出下列方程中哪些是旋转曲面，它们是怎样产生的：

(1) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{9}=1$；　　(2) $x^2+y^2+z^3=1$；

(3) $x^2+2y^2+34z^2=1$；　　(4) $x^2-\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$；

(5) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{z^2}{9}=-1$；　　(6) $x^2-y^2-z^2=1$；

(7) $x^2+y^2=4z$；　　　(8) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=3z$.

2. 指出下列方程在平面直角坐标系 Oxy 和空间直角坐标系 $Oxyz$ 中分别表示怎样的几何图形：

(1) $x=2$；　　　(2) $y=x+1$；

(3) $x^2+y^2=4$；　　　(4) $x^2-y^2=1$；

(5) $y=x^2+1$　　　(6) $\begin{cases}5x-y+1=0\\2x-y-3=0\end{cases}$；

(7) $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1\\y=2\end{cases}$；　　　(8) $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1\\x=4\end{cases}$.

3. 求下列旋转曲面的方程，并指出它们的名称：

(1) 曲线 $\begin{cases}y^2-\dfrac{z^2}{4}=1\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周；

(2) 曲线 $\begin{cases}y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)\\z=0\end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周；

(3) 曲线 $\begin{cases}4x^2+9y^2=36\\z=0\end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周；

(4) 曲线 $\begin{cases}z^2=5x\\y=0\end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周；

(5) 曲线 $\begin{cases}x^2+z^2=9\\y=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周；

(6) 曲线 $\begin{cases}y=kx\\z=0\end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周.

4. 画出下列各组曲面所围成的立体图形：

(1) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}+z=1,\ x=0,y=0,z=0$；

(2) $z=x^2+y^2,x=0,y=0,z=0,x+y-1=0$；

(3) $z=\sqrt{x^2+y^2},x^2+y^2+z^2=R^2$；

(4) $x^2+y^2=2x,z=0,z=1$；

(5) $x^2+y^2+z^2=R^2,\ x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$；

(6) $z=xy,x^2+y^2=2x,z=0$.

5. 考察曲面 $x^2-y^2-z^2=9$ 在下列平面上的截痕：

(1) $z=0$；　　　(2) $x=0$；

(3) $y=0$；　　　(4) $x=5$.

6. 考察曲面 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{4}=1$ 在下列平面上的截痕：

(1) $x=2$；　　　(2) $y=0$；

(3) $y=5$；　　　(4) $z=2$.

7. 一动点 $P(x,y,z)$ 到原点的距离等于它到平面 $z=4$ 的距离，试求此动点 P 的轨迹，并判定它是什么曲面.

8. 一动点 $P(x,y,z)$ 到点 $(1,0,0)$ 的距离等于它到平面 $z=4$ 距离的一半，求动点 P 的轨迹，并判定它是什么曲面.

9. 建立通过两曲面 $x^2+y^2+4z^2=1$ 和 $x^2=y^2+z^2$ 的交线，而母线平行于 z 轴的柱面方程.

10. 已知一球面经过点 $(0,-3,1)$ 且与 Oxy 平面交成圆周 $\begin{cases}x^2+y^2=16\\z=0\end{cases}$，试求其方程.

11. 建立单叶双曲面 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{5}=1$ 与平面 $x-2z+3=0$ 的交线在 Oxy 平面上的投影柱面.

12. 问在 Oxy 平面中方程 $xy=h$（h 是或正，或负，或为零的常数）表示怎样的曲线？在空间坐标系中方程 $xy=z$ 表示什么曲面？试用截口法研究它的图形.

5.5　空间坐标变换

在上一节中，我们讨论了一些特殊的三元二次方程所表示的曲面，但对一般的三元二次方程能表示哪些曲面，只有利用坐标变换，才能得以解决. 在这一节，我们先考察坐标的平移与旋转，然后对柱坐标与球坐标作一简单介绍. 对于一般的三元二次方程，这里不再详细讨论了. 事实上，利用坐标系的平移与旋转，所有二次曲面的方程都可以化成上一节的各种标准形式.

5.5.1 坐标系的平移

所谓空间坐标系的平移，就是只移动坐标系的原点，而不改变坐标轴的方向与各轴上的单位尺度.

设给定空间两个直角坐标系 $Oxyz$ 与 $O'x'y'z'$（图 5.45），它们相应的坐标轴平行且同向. 设原点 O' 在坐标系 $Oxyz$ 中的坐标为 (a,b,c)，则空间一点 P 就可以有两种坐标表示，在坐标系 $Oxyz$ 中为 (x,y,z)，在坐标系 $O'x'y'z'$ 中为 (x',y',z')，由于

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P},$$

或

$$x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=(a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k})+(x'\boldsymbol{i}+y'\boldsymbol{j}+z'\boldsymbol{k}),$$

即可求得

$$x=x'+a,\ y=y'+b,\ z=z'+c.$$

这就是空间直角坐标系平移的坐标变换公式.

例 利用坐标系的平移，化简方程

$$4x^2+25y^2+4z^2-16x-50y-16z-43=0,$$

并指出它所表示的曲面.

解 利用配方得

$$4(x-2)^2+25(y-1)^2+4(z-2)^2-100=0,$$

将原点平移至 $(2,1,2)$，即令

$$x'=x-2,\ y'=y-1,\ z'=z-2,$$

代入上式得

$$4x'^2+25y'^2+4z'^2=100,$$

或

$$\frac{x'^2}{25}+\frac{y'^2}{4}+\frac{z'^2}{25}=1.$$

可见原方程表示中心在点 $(2,1,2)$ 的一个旋转椭球面.

5.5.2 坐标系的旋转

所谓空间坐标系的旋转就是坐标原点与单位尺度不变，而只

改变坐标轴的方向.

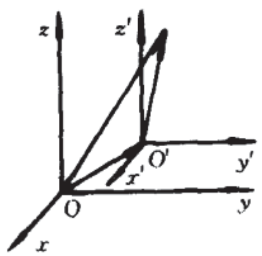


图 5.45

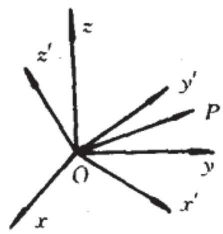


图 5.46

设给定具有公共原点的两个空间直角坐标系 $Oxyz$ 与 $Ox'y'z'$(图 5.46).坐标系 $Oxyz$ 的基本单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$;坐标系 $Ox'y'z'$ 的基本单位向量 $\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}'$.它们之间的夹角由下表给出:

	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}'$	α_1	β_1	γ_1
$\boldsymbol{j}'$	α_2	β_2	γ_2
$\boldsymbol{k}'$	α_3	β_3	γ_3

并且有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{i}' &= \cos\alpha_1\boldsymbol{i}+\cos\beta_1\boldsymbol{j}+\cos\gamma_1\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{j}' &= \cos\alpha_2\boldsymbol{i}+\cos\beta_2\boldsymbol{j}+\cos\gamma_2\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{k}' &= \cos\alpha_3\boldsymbol{i}+\cos\beta_3\boldsymbol{j}+\cos\gamma_3\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

又设空间任意一点 P 的坐标系 $Oxyz$ 中的坐标为(x,y,z),在坐标系 $Ox'y'z'$中的坐标为(x',y',z'),则有

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=x'\boldsymbol{i}'+y'\boldsymbol{j}'+z'\boldsymbol{k}'.$$

但是

$$\begin{aligned}x'\boldsymbol{i}'+y'\boldsymbol{j}'+z'\boldsymbol{k}' = {} & x'(\cos\alpha_1\boldsymbol{i}+\cos\beta_1\boldsymbol{j}+\cos\gamma_1\boldsymbol{k})\\ & +y'(\cos\alpha_2\boldsymbol{i}+\cos\beta_2\boldsymbol{j}+\cos\gamma_2\boldsymbol{k})\\ & +z'(\cos\alpha_3\boldsymbol{i}+\cos\beta_3\boldsymbol{j}+\cos\gamma_3\boldsymbol{k})\end{aligned}$$

$$= (x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3)\boldsymbol{i} + (x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3)\boldsymbol{j} + (x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3)\boldsymbol{k},$$

于是得到用坐标(x',y',z')表达坐标(x,y,z)的公式

$$x = x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3$$
$$y = x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3$$
$$z = x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3$$

同样也可以导出用坐标(x,y,z)表达坐标(x',y',z')的公式

$$x' = x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1,$$
$$y' = x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2,$$
$$z' = x\cos\alpha_3 + y\cos\beta_3 + z\cos\gamma_3,$$

它们都是空间直角坐标系旋转的坐标变换公式.

例 1 将直角坐标系 $Oxyz$ 绕 Oz 轴沿反时针方向旋转$\frac{\pi}{4}$得新坐标系 $Ox'y'z'$,试表示新旧坐标间的变换关系,并将方程 $xy=z$ 变换为新坐标系下的方程.

解 新旧坐标系坐标轴之间的夹角如下表示:

	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}'$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\boldsymbol{j}'$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\boldsymbol{k}'$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0

于是得旧坐标与新坐标的变换关系为

$$x = x'\cos\frac{\pi}{4} + y'\cos\frac{3\pi}{4} + z'\cos\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'),$$

$$y = x'\cos\frac{\pi}{4} + y'\cos\frac{\pi}{4} + z'\cos\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'),$$

$$z = x'\cos\frac{\pi}{2} + y'\cos\frac{\pi}{2} + z'\cos 0 = z'.$$

将这变换式代入到方程 $xy=z$ 得

$$\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = z'.$$

由上一节知道，这个新方程所表示的几何图形是一个马鞍面.

例 2 利用坐标系的旋转化简方程

$$5x^2 - 3y^2 + 3z^2 + 8yz - 5 = 0,$$

并指出它是什么曲面.

解 将坐标系 $Oxyz$ 绕 Ox 轴沿反时针方向旋转角 φ，则有

$$x = x',\ y = y'\cos\varphi - z'\sin\varphi,\ z = y'\sin\varphi + z'\cos\varphi.$$

若把这个坐标变换式代入到所给方程中，由平面解析几何学知道，可选取适当的旋转角 φ，使在新的方程中不含 $y'z'$项. 在此有

$$\mathrm{tg}2\varphi = -\frac{4}{3} \quad \left(\frac{\pi}{2} < 2\varphi < \pi\right),$$

于是得

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}},\ \sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

从而有坐标变换

$$x = x',\ y = \frac{y' - 2z'}{\sqrt{5}},\ z = \frac{2y' + z'}{\sqrt{5}},$$

代入原方程给出

$$x'^2 + y'^2 - z'^2 = 1.$$

这是沿 Oz'轴而立的单叶旋转双曲面.

例 3 利用坐标变换化简方程

$$45x^2 + 45y^2 - 8z^2 - 54xy + 36\sqrt{2}x$$
$$- 108\sqrt{2}y + 32z + 184 = 0$$

并指出它是什么曲面.

解 先利用坐标系的旋转,消去方程中的 xy 项. 由于 x^2 与 y^2 的系数相等,可将坐标系 $Oxyz$ 绕 Oz 轴沿反时针方向旋转$\frac{\pi}{4}$得到新坐标系 $Ox'y'z'$,于是有坐标变换

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\ y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}},\ z=z'.$$

将变换式代入到原方程并整理得

$$9x'^2+36y'^2+4z'^2-36x'-72y'+16z'+92=0,$$

配方后给出

$$9(x'-2)^2+36(y'-1)^2-4(z'-2)^2+36=0.$$

若将原点再平移至(2,1,2)得新坐标系 $O''x''y''z''$,于是有

$$x''=x'-2,\ y''=y'-1,\ z''=z'-2.$$

从而所给方程可化简成

$$9x''^2+36y''^2-4z''^2=-36,$$

或写成

$$\frac{x''^2}{4}+\frac{y''^2}{1}-\frac{z''^2}{9}=-1$$

它表示一个双叶双曲面.

5.5.3 柱坐标与球坐标

为要确定平面上点的位置,除用直角坐标(x,y)外,有时还要用极坐标(r,φ),并由此简化所要讨论的问题. 同样,为要确定空间一点的位置,除了前面采用的直角坐标(x,y,z)外,有时也要应用柱坐标或球坐标. 下面我们就从较简单的柱坐标开始论述.

设给定空间直角坐标系 $Oxyz$,若在坐标平面 Oxy 上取以原点为极点,x 轴的正半轴为极轴的极坐标系,则空间一点 M 的位置可由 M 在平面 Oxy 上投影 M' 与它的立标 z 所确定(图 5.47). 设点 M' 的极坐标为(r,φ),因而点 M 的空间位置决定了一个三数组(r,φ,z). 反之,给定一个三数组(r,φ,z),它对应着空间的一点

M,我们就把这样的三个数组称为点 M 的柱坐标,记为 $M(r,\varphi,z)$. 它有如下的几何意义.

坐标 r 是点M 到 z 轴的距离;φ 是通过点M 与 z 轴的半平面与坐标面 Ozx 所构成的角;z 是点 M 的直角坐标的立标. 由此可见,r,φ,z 在空间中的变化范围是

$$0\leqslant r\leqslant+\infty,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ -\infty<z<+\infty.$$

在直角坐标系中,每个点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$可以看作是三张平面 $x=x_0,y=y_0,z=z_0$ 的交点. 同样在柱坐标系中每个点 $M_0(r_0,\varphi_0,z_0)$也可看作是三张坐标曲面 $r=r_0,\varphi=\varphi_0,z=z_0$ 的交点. 这些坐标曲面分别是半径 r_0 且以 z 轴为轴的圆柱面;以 z 轴为边并与坐标平面 Ozx 构成角 φ_0 的半平面及过点$(0,0,z_0)$且平行于坐标平面 Oxy 的平面(图 5.48).

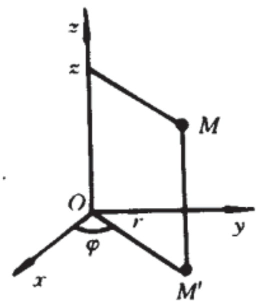


图 5.47

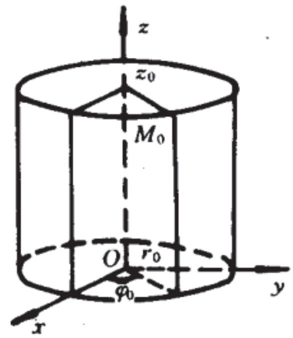


图 5.48

容易看出,空间一点 M 的直角坐标与柱坐标的关系为

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=z.$$

于是以原点为心、半径为 R 的球面在柱坐标系下的方程为

$$r^2+z^2=R^2.$$

现在再来考察空间一点 M 的球坐标. 它是由如下的三数组(r,θ,φ)构成.

坐标 r 为点 M 的原点的距离;θ 是有向线段 OM 与 z 轴正向的夹角;而 φ 是通过 z 轴及点M 的半平面与坐标平面Ozx 所作成

的角(图 5.49). 因此在空间中这些坐标的变化范围是

$$0 \leqslant r < +\infty,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

在球坐标系下坐标曲面为 $r=r_0$, $\theta=\theta_0$, $\varphi=\varphi_0$. 它们分别是以原点为心、半径为 r_0 的球面;以原点为顶点、z 轴为轴的圆锥面,以 z 轴为边并与坐标平面 Ozx 作成角 φ_0 的半平面(图 5.50).

从图 5.49 容易得出空间一点 M 的直角坐标 (x,y,z) 与球坐标 (r,θ,φ) 的关系为

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta.$$

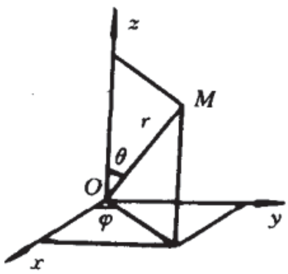


图 5.49

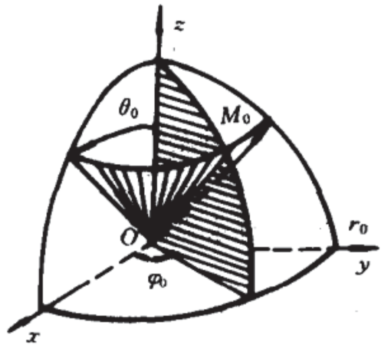


图 5.50

由此可得,柱面 $x^2+y^2=a^2$ 在球坐标系下的方程为

$$r\sin\theta = a.$$

而球面 $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$ 在球坐标系下的方程则是

$$r = 2a\cos\theta.$$

如果在上述变换中令 $r=a$ 就得以 θ,φ 为独立变数的球面方程

$$x = a\sin\theta\cos\varphi,\ y = a\sin\theta\sin\varphi,\ z = a\cos\theta.$$

它称为球面的参数方程,θ,φ 称为参数.

习题 5.5

1. 用坐标系平移将原点移至 $(2,4,-1)$ 时,问下列各点:$A(-3,4,1)$,B

(2,−3,−5),$C(6,7,-3)$的新坐标为何?

2. 用坐标系平移将原点移至$O'(1,2,3)$时,下列各方程将产生怎样的改变:

(1) $3x-5y+6z=1$;

(2) $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{2}$;

(3) $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$;

(4) $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx-7x-8y-9z+19=0$.

3. 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中取向量

$$\boldsymbol{i}'=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right),\ \boldsymbol{j}'=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right),$$

$$\boldsymbol{k}'=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

为新坐标系 $Ox'y'z'$ 的基本单位向量.求点 $A(0,1,0)$,$B(1,0,-1)$的新坐标和平面 $3x-y-2z+1=0$ 的新方程.

4. 试利用坐标系旋转,消去方程 $x^2-y^2-z^2+2yz+2x+y-8=0$ 中的 yz 项.

5. 利用坐标系的一般变换,化简下列方程,并指出它们是什么曲面:

(1) $5x^2+y^2+2z^2-4zx+\sqrt{5}x-2y+2\sqrt{5}z+7=0$;

(2) $2x^2+6y^2+2z^2+8xy-4x-8y+3=0$;

(3) $3x^2+5y^2-3z^2+8xz-2x+14z-13=0$.

总 复 习 题

1. 设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$,$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$,

(1) 写出 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 不共线的条件;

(2) 写出 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 不共面的条件;

(3) 求以三向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为三边的四面体的体积;

(4) 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 不共面,x 是任一个空间向量,求数 λ,μ,γ,使得 $\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}$,并证明这样的数 λ,μ,ν 是唯一的.

2. 设直线

$$l_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-3}{0},$$

$$l_2:\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-1}{1}.$$

(1) 证明 l_1 与 l_2 是异面直线;

(2) 求 l_1 与 l_2 的距离;

(3) 试求一个平面,使它与 l_1 及 l_2 都平行,且与 l_1、l_2 等距离.

3. 设有一个四面体,过一个顶点的三条棱长分别为 1,1 和 2,并在该顶点处,长为 1 的两条棱的夹角 60°,其余两个顶角分别是 120°和 150°,求四面体体积.

4. (1) 求点 $M(x_1,y_1,z_1)$关于点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$的对称点;

(2) 求点 $M_1(2,1,2)$关于直线$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}$的对称点的坐标;

(3) 求点$(2,-3,-3)$关于平面 $x+y+2z=5$ 的对称点的坐标.

5. 求 Oyz 平面上的直线 $y-2z+1=0$ 绕 Oyz 平面上的直线 $y=z$ 旋转所得旋转曲面的方程.

6. 设 $l:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$

(1) 求 l 绕 z 轴旋转所得旋转曲面的方程;

(2) 求旋转面和平面 $z=0$、$z=1$ 所围旋转体的体积.

参考答案

习题 1.1 1. $\sup E=1$, $\inf E=0$; 无 $\max E$ 与 $\min E$. 2. $\sup F$ 是 E 的上界. 3. (1) 0;1. (2) -5;1.25. 5. (1) $\frac{1}{4}<x<\frac{9}{4}$; (2) $x>1$ 或 $x<-3$; (3) $\frac{1}{6}<x<\frac{1}{4}$. 6. (1) $\frac{n}{n+1}$; (2) $1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$; (3) $\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}$. 12. (1) $\frac{4}{3}$; (2) 0; (3) 4; (4) $-\frac{1}{2}$. 13. (1) $\frac{1}{2}$; (2) $\frac{4}{3}$; (3) 1; (4) 3; (5) $\frac{1}{3}$; (6) $\frac{1}{1-q}$; (7) $\frac{1}{2}$. 14. (1) $\frac{a+b}{2}$; (2) $\frac{1}{2}$; (3) $\frac{1}{5}$; (4) $-\frac{1}{4}$. 15. (1) 0; (2) 0; (3) 2; (4) 1; (5) 1; (6) 1. 19. 1. 24. (1) 0; (2) 0; (3) $1-\sqrt{1-c}$; (4) $\sqrt{a}$; (5) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 28. (1) e; (2) e^{-1}; (3) e^{-1}; (4) e^{-1}; (5) e^2. 29. (1) 收敛; (2) 收敛; (3) 发散.

习题 1.2 6. (1) -1; (2) 1; (3) $\frac{1}{2}mn(n-m)$; (4) -1; (5) 0; (6) 0; (7) 0; (8) $\frac{3}{2}$; (9) $\frac{\sin 2}{2}$. 7. (1) $\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}$; (2) $\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}$. 8. $f(0+0)=1$; $f(0-0)=-1$. 10. (1) $\frac{2}{5}$; (2) 4; (3) 1; (4) 1; (5) $-\sin a$; (6) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; (7) $-\cos^2 a$; (8) 0; (9) e^{-2}; (10) e^3; (11) e^{-1}. 13. $a=1, b=-1$. 16. (1) $+\infty$; (2) $+\infty$. 22. (1) 1 级; (2) 3 级; (3) $\frac{1}{3}$级; (4) $\frac{1}{5}$级; (5) 2 级; (6) 1 级. 24. (1) $\frac{m}{n}$; (2) a; (3) 1; (4) $\frac{1}{3}$; (5) $\frac{1}{n}$; (6) $\frac{1}{4\sqrt{2}}$; (7) $\frac{1}{8}$; (8) $\frac{1}{4n}$; (9) $\frac{1}{4}$; (10) 1.

习题 1.3 4. (1) $x=2$ 是无穷间断点,为第二类间断; (2) $x=0$ 是可去间断点,定义 $y(0)=3$; (3) $x=0$ 是可去间断点,定义 $y(0)=0$; (4) $x=\frac{k\pi}{2}$

$+\frac{\pi}{4}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$都是无穷间断点，$x=0$ 是可去间断点，定义 $y(0)=2$；(5) $x=0$ 是可去间断点，定义 $y(0)=e$；(6) $x=\pm1$ 是无穷间断点；$x=0$ 是可去间断点，定义 $y(0)=0$；(7) $x=a$ 是第一类不可去间断点，(8) $x=0$ 是第一类不可去间断点；(9) $x=1$ 是第二类间断点；(10) $x=0$ 是第二类间断点. 5. (1) 连续；(2) 在 $x=-1$ 处间断；(3) 连续；(4) 当 $A=4$ 时连续，当 $A\neq4$ 时，在 $x=2$ 处间断；(5) 连续；(6) $x=-1$ 处间断；(7) $x=1$ 处间断；(8) 当 $a=0$ 时连续，当 $a\neq0$ 时在 $x=0$ 处间断；(9) 连续；(10) 当 $a=1$ 时连续，当 $a\neq1$ 时在 $x=0$ 处间断. 6. $a=1$. 9. (1) e^x；(2) $\frac{1}{e}$；(3) $\ln a$；(4)2；(5) e^β；(6) e^2；(7)1；(8) 1；(9) $\frac{\pi}{2}$；(10) $e-1$. 10. (1) 1 级；(2) 1 级；(3) 1 级.

总复习题

2. **证：** 采用反证法. 假定当 $\alpha\neq2k\pi,k=0,\pm1,\cdots$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\cos n\alpha=l$. 令 $S=\frac{\cos\alpha+\cos2\alpha+\cdots+\cos n\alpha}{n}$. 由习题 1. 1 的 18 知：有 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=l$. 由于 $\sin\frac{\alpha}{2}\neq0$，应用三角函数的加法定理，有

$$S_n=\frac{-\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2n\sin\frac{\alpha}{2}}$$

故有 $0=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=l=\lim\limits_{n\to\infty}\cos n\alpha$. 但是若在恒等式：$\cos2n\alpha=2\cos^2n\alpha-1$ 中，令 $n\to\infty$，有 $0=-1$，这显然是矛盾的. 从而证明了数列$\{\cos n\alpha\}$发散.

3. 因为 $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(n-k+1)a_k=\frac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n}$.

4. **证：** 由假设知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=l$，即对任给的正数 ε，总存在自然数 k，当 $n>k$ 时有

$$\left|\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2},\quad \text{且 } y_n-y_{n-1}>0.$$

或

$$l-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_i-x_{i-1}}{y_i-y_{i-1}}<l+\frac{\varepsilon}{2},\ i=k+1,\ k+2,\cdots,n$$

于是有

$$l-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_n-x_k}{y_n-y_k}<l+\frac{\varepsilon}{2}$$

或

$$\left|\frac{x_n-x_k}{y_n-y_k}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

对固定的 k,由于$\{y_n\}$严格增加且无界,故有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_k-ly_k}{y_n}=0$$

即总存在自然数 L,当 $n>L$ 时,有 $\left|\frac{x_k-ly_k}{y_n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. 取 $N=\max(k,L)$,则对任给正数 ε,总存在 N,当 $n>N$ 时,有

$$\begin{aligned}\left|\frac{x_n}{y_n}-l\right|&=\left|\frac{x_k-ly_k}{y_n}+\left(1-\frac{y_k}{y_n}\right)\left(\frac{x_n-x_k}{y_n-y_k}-l\right)\right|\\&\leqslant\left|\frac{x_k-ly_k}{y_n}\right|+\left|\frac{x_n-x_k}{y_n-y_k}-l\right|<\varepsilon\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=l$$

5. 应用4. 的结果. 6. (1) $\frac{1-b}{1-a}$; (2) 0; (3) $\frac{1}{2}$; (4) $\frac{1}{4}$; (5) 0; (6) 1; (7) e; (8) e^5; (9) $\frac{1}{a}$. 8. (1) 收敛; (2) 收敛; (3) 收敛; (4) 收敛; (5) 发散; (6) 发散. 9. (1) $\frac{1}{2}$; (2) $\frac{1}{p}$. 11. (1) $x=1$ 处间断; (2) $x=0$ 处间断; (3) 连续. 13. 考虑函数 $f(x)=2x^4-6x^2+x+2$,且有 $f(-2)=8$, $f(-1)=-3$, $f(0)=2$, $f(1)=-1$, $f(2)=12$.

习题 2.1 1. (1) 25; 20.5; 20.05; 20.005. (2) 20. (3) 20. 2. (1) 95 克/厘米; (2) 35 克/厘米; (3) 185 克/厘米. 3. 3;0;12;6. 4. $\frac{4}{\pi}$; 1; 0. 5. (1) $-2,1$; (2) $-1,0$; (3) $-4,3$. 6. pe. 8. 点$(2,4)$. 9. $a=2,b=-1$. 10. $a=e^{x_0}$, $b=e^{x_0}(1-x_0)$. 11. (1) 连续但在点 $x=0$ 不可微; (2) 连续但在点 $x=1$ 不可微; (3) 在$(-\infty,+\infty)$内连续可微.

12. (1) $3ax^2+2bx+c$　　　(2) $\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}-\frac{a}{3\sqrt[3]{x^4}}$

(3) $\frac{16}{5}x^2 \cdot \sqrt[5]{x}$　　(4) $\frac{1}{(x+2)^2}$

(5) $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$　　(6) $\frac{15x^2+48x+82}{(5x+8)^2}$

(7) $\cos^3 x-\sin x\sin 2x$　　(8) $\sin x+\sin x\sec^2 x-\csc^2 x$

(9) $(\sin 2x\cos x-\sin^3 x)/(x^3+\mathrm{tg}x)-\sin^2 x\cos x(3x^2+\sec^2 x)/(x^3+\mathrm{tg}x)^2$

(10) $\frac{x^4(1.5\cos x+0.3x\sin x)+a}{(a+b)\cos^2 x}$

(11) $\frac{1-\ln x^a}{x^{a+1}}$　　(12) $a\left(\ln a\ln x+\frac{1}{x}\right)$

(13) $\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{\sin\sqrt{1-x^2}}=-\frac{(x+\mathrm{arc}\ \sin x)\cos x}{\sin^2 x}$

(14) $t^2 e^{-t}\left[(3-t)\mathrm{arc}\ \mathrm{tg}t+\frac{t}{1+t^2}\right]$

(15) $(a^2+b^2)x^{a-1}e^x\left[(x+a)\mathrm{arc}\ \mathrm{tg}x+\frac{x}{1+x^2}\right]$

(16) $\frac{-2}{x(1+\ln x)^2}$　　(17) $2x\log_3 x+\frac{x}{\ln 3}$

(18) $-\frac{10^x\ln 100}{(1+10^x)^2}$　　(19) $\frac{7}{8}x^{-\frac{1}{8}}$

(20) $\frac{2}{(1+x)^2}$

13. 交点(1,0)及(−1,0)的切线方程分别为 $2x-y-2=0$ 及 $2x-y+2=0$.

14. 点$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{16}\right)$及(−1,1)

15. (1) $\frac{2}{3\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)^4}}$

(2) $\sin^{\alpha-1}x\ln^{\beta-1}x\left(\alpha\cos x\ln x+\frac{\beta}{x}\sin x\right)$

(3) $\frac{2\ln x}{3x\sqrt[3]{(1+\ln^2 x)^2}}$

(4) $\frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}\left[\mathrm{arc}\ \mathrm{tg}\varphi^3+3\varphi(1+\varphi^2)\frac{1}{1+\varphi^6}\right]$

(5) $-\frac{x\arcsin x}{(1+x^2)^{3/2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}-\frac{1}{1-x^2}$

(6) 0

(7) $\frac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

(8) $5^x(1+\ln 5^x)$

(9) $\left[27\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}\cdot\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}})^2}\right]^{-1}$

(10) $-\sin 2x\cos(\cos 2x)$

(11) $\cos x\cos(\sin x)\cos[\sin(\sin x)]$

(12) $-\frac{15x^2}{1+x^6}\sin(\mathrm{arc\ tg}x^3)\cos^4(\mathrm{arctg}x^3)\cos[\cos^5(\mathrm{arc\ tg}x^3)]$

(13) $2\left(\frac{1}{a^2}\sec^2\frac{x}{a^2}\mathrm{tg}\frac{x}{a^2}+\frac{1}{b^2}\sec^2\frac{x}{b^2}-\mathrm{tg}\frac{x}{b^2}\right)$

(14) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}e^{\sqrt{x^2+1}}$

(15) $a^x e^{\sin\mathrm{tg}x}(\ln a+\sec^2 x\cos\mathrm{tg}x)$

(16) $\frac{2}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}e^{\cos\frac{1}{x^2}}\left(1+\cos\frac{1}{x^2}\right)$

(17) $\frac{x+1}{8\sqrt{x^2+2x}\cdot\sqrt{1-2x-x^2}\cdot\sqrt[4]{(\arcsin\sqrt{x^2+2x})^3}}$

(18) $-\frac{2}{1+x^2}\mathrm{sgn}\,x(x\neq 0)$ (19) $\frac{6}{x\ln x\ln(\ln^3 x)}$

(20) $\frac{1}{\cos x}$ (21) $-\frac{1}{\cos x}$ (22) $\frac{1}{1+x^2}$

(23) $\frac{\mathrm{sgn}x}{\sqrt{1-x^2}}(x\neq 0)$ (24) $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$

(25) $x^{x^x+x-1}[x\ln x(\ln x+1)+1]+x^x(\ln x+1)$

$+x^{a^x}\cdot a^x\left(\ln a\ln x+\frac{1}{x}\right)$

(26) $(\sin x)^{\cos x-1}(\cos^2 x-\sin^2 x\ln\sin x)$

(27) $(\mathrm{tg}ax)^{\mathrm{ctg}\frac{x}{b}}\cdot\left(-\frac{1}{b}\csc^2\frac{x}{b}\ln\mathrm{tg}\,ax+\frac{2a}{\sin 2ax}\mathrm{ctg}\frac{x}{b}\right)$

(28) $(\ln x)^{x-1}x^{\ln x-1}(x+2\ln^2 x+x\ln x\ln\ln x)$

(29) $2x\ \mathrm{sgn}(\cos x^2)$　　(30) $-\dfrac{2x(\sin x^2+\cos x^2)}{\sqrt{\sin 2x^2}}$

(31) $\dfrac{4x}{\arccos^3(x^2)\cdot\sqrt{1-x^4}}$　　(32) $\dfrac{1}{a+b\cos\varphi}$

(33) $\sqrt{a^2-x^2}$　　(34) $\dfrac{1}{2(1+x^2)}$

(35) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$　　(36) $\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}$

(37) $\dfrac{1}{2\varphi\sqrt{\varphi-1}\arccos\dfrac{1}{\sqrt{\varphi}}}$　　(38) $\dfrac{12t^5}{(1+t^{12})^2}$

(39) $\dfrac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}$

(40) $\sqrt[3]{\dfrac{1-x^2+x^4}{1+x^2+x^4}}\cdot\dfrac{4x(x^4-1)}{3(1-x^2+x^4)(1+x^2+x^4)}$

16. (1) $x'(y)=\dfrac{e^{-x}}{x+1}$　　(2) $x'(y)=-(1+x^2)$

(3) $x'(y)=\dfrac{-1}{2(e^{-x}-e^{-2x})}$　　(4) $x'(y)=\dfrac{1}{1-y^2}$

17. (1) $3x^2 f'(x^3)$

(2) $\sin 2x[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)]$

(3) $f'(e^x+x^e)(e^x+ex^{e-1})$

(4) $\cos\{f[\sin f(x)]\}f'[\sin f(x)]\cos f(x)f'(x)$

(5) $f'\{f[f(\sin x+\cos x)]\}f'[f(\sin x+\cos x)]f'(\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x)$

(6) $e^{f(x)}[e^x f'(e^x)+f(e^x)f'(x)]$

18. (1) 切线：$y=2a$，法线：$x=a\pi$

(2) 切线：$4x+2y-3=0$，法线：$2x-4y+1=0$

(3) 切线：$4x+3y-12a=0$，法线：$3x-4y+6a=0$

19. (1) $\dfrac{\varphi(x)\varphi'(x)+\psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}$

(2) $\dfrac{\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}}{\varphi^2(x)\cdot\psi(x)}\cdot[\varphi(x)\psi'(x)-\varphi'(x)\psi(x)\ln\psi(x)]$

(3) $2\left[\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]^{\ln\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}}\ln\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}\cdot\dfrac{\varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{\varphi(x)\cdot\psi(x)}$

(4) $\dfrac{\varphi'(x)+\varphi(x)^{\psi(x)-1}[\varphi(x)\psi'(x)\ln\varphi(x)+\varphi'(x)\psi(x)]}{1+[1+\varphi(x)+\varphi(x)^{\psi(x)}]^2}$

22. $P_n=\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$

$$Q_n=\frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}$$

25. (1) $n>0$ (2) $n>1$ (3) $n>2$

27. 8度/分　28. 0.64厘米/分　29. 4π 米^2/秒

习题 2.2　1. $\Delta y=0.0404$　$dy=0.04$

2. $\Delta y=130$; 4; 0.31; 0.0301; $dy=30$; 3; 0.3; 0.003; $\Delta y-dy\to 0$. $(\Delta x\to 0)$.

3. (1) $\dfrac{dx}{x-2\pi}$; (2) $\dfrac{x\ln 5}{(1+x^4)\sqrt{\text{arc tg}x^2}}5^{\sqrt{\text{arctg}x^2}}dx$;

(3) $\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; (4) $x\sin x dx$; (5) $\dfrac{dx}{x^2-a^2}$

(6) $8x\text{tg}(1+2x^2)\sec^2(1+2x^2)dx$

4. $\dfrac{\pi}{360}$. 7. (1) 1.002; (2) 0.4849; (3) 0.03; (4) 2.7455.

8. (1) $ds=\dfrac{4f}{3l}df$; (2) $df=\dfrac{3l}{4f}ds$. 9. 1470cm^3; 0.4%. 10. $\dfrac{2}{3}$%.

11. 0.03355克.

习题 2.3

1. (1) $2(2x^2-1)e^{-x^2}$

(2) $\dfrac{1}{(1-x^2)^2}\left(3x+\dfrac{1+2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\text{arc sin}x\right)$

(3) $a^x(2+4x\ln a+x^2\ln^2 a)$

(4) $\dfrac{2a\cos x}{a^2+x^2}-\dfrac{2ax\sin x}{(a^2+x^2)^2}-\sin x\,\text{arctg}\dfrac{x}{a}$

(5) $2\text{arctg}x+\dfrac{2x}{1+x^2}$;　　(6) $-\dfrac{2}{x}\sin(\ln x)$

2. (1) $\dfrac{uu''-u'^2}{u^2}-\dfrac{vv''-v'^2}{v^2}$

(2) $\dfrac{(u^2+v^2)(uu''+vv'')+(u'v-uv')^2}{(u^2+v^2)^{3/2}}$

3. (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{t}{2}, \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1+t^2}{4t}$;

(2) $\frac{dy}{dx}=\text{ctg}\,\frac{t}{2}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-1}{a(1-\cos t)^2}$;

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\varphi+\varphi\cos\varphi}{\cos\varphi-\varphi\sin\varphi}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2+\varphi^2}{a(\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)^3}$

(4) $\frac{dy}{dx}=-\text{tg}\varphi$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{3a\cos^4\varphi\sin\varphi}$

6. (1) $y''=2[f'(x^2)+2x^2f''(x^2)]$

$y'''=4x[3f''(x^2)+2x^2f'''(x^2)]$

(2) $y''=(e^x+1)^2f''(e^x+x)+e^xf'(e^x+x)$

$y'''=(e^x+1)^3f'''(e^x+x)+3e^x(e^x+1)f''(e^x+x)+e^xf'(e^x+x)$

(3) $y''=\frac{f(x)f''(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)}$

$y'''=\frac{1}{f^3(x)}\{f^2(x)f'''(x)-3f(x)f'(x)f''(x)+2[f'(x)]^3\}$

(4) $y''=a^2e^{f(ax+b)}[f'^2(ax+b)+f''(ax+b)]$

$y'''=a^3e^{f(ax+b)}[f'^3(ax+b)+3f'(ax+b)f''(ax+b)+f'''(ax+b)]$

8. (1) $e^x(x^2+100x+2450)$; (2) $\frac{28!\ (x+30)}{(1+x)^{30}}$

(3) $(x^2-379)\sin x-40x\cos x$

(4) $\frac{197!!\ (399-x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}$

(5) $(-1)n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$

(6) $e^x\left[\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{x^{k+1}}\right]$

(7) $\frac{2(-1)^n\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$; (8) $f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & \text{当 } n=2m\\ [(2m-1)!]^2, & \text{当 } n=2m+1\end{cases}$

9. (1) $dy=e^xdx$; $d^2y=e^x(dx)^2$

(2) $dy=e^xdx$; $d^2y=e^x[(dx)^2+d^2x]$

10. (1) $ud^2v+2dudv+vd^2u$

(2) $\frac{v(vd^2u-ud^2v)-2dv(vdu-udv)}{v^3}$

11. $d^3y=e^u[(u')^3+3u'u''+u''']dx^3$

12. (1) $d^2y=\cos x d^2x-\sin x dx^2$

(2) $d^2y=e^t(\cos e^t-e^t\sin e^t)dt^2$

习题 2.5 1. $-56+21(x-4)+37(x-4)^2+11(x-4)^3+(x-4)^4$

2. $f(-1)=143$, $f'(0)=-60$, $f''(1)=26$

3. $x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1+2\sin^2\theta x}{\cos^4\theta x}$, $0<\theta<1$

4. $x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}\cdot\dfrac{9\theta x+6\theta^3x^3}{(1-\theta^2x^2)^{7/2}}$, $0<\theta<1$

5. $-[1+(x+1)+(x+1)^2+\cdots+(x+1)^n]$

$+(-1)^{n+1}\dfrac{(x+1)^{n+1}}{[-1+\theta(x+1)]^{n+2}}$, $0<\theta<1$

6. $2+\dfrac{x-4}{4}-\dfrac{(x-4)^2}{64}+\dfrac{(x-4)^3}{512}-\dfrac{5(x-4)^4}{128[4+\theta(x-4)]^{7/2}}$, $0<\theta<1$

7. $1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\dfrac{e^{\theta x}-e^{-\theta x}}{2(2n+1)!}x^{2n+1}$, $0<\theta<1$

8. $\dfrac{2}{2!}x^2-\dfrac{2^3}{4!}x^4+\dfrac{2^5}{6!}x^6-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$

$+(-1)^n\dfrac{2^{2n}}{(2n+1)!}\sin 2\theta x\cdot x^{2n+1}$, $0<\theta<1$

10. 0.8209. 11. (1) 0.3090; 10^{-4}. (2) 3.1072; 10^{-4}. (3) 0.1826; 10^{-3}. 12. $|x|\leqslant 0.22$. 13. 1.64869. 14. 0.985.

习题 2.6 1. (1) 2; (2) 2; (3) $\dfrac{\alpha}{\beta}$; (4) $-\dfrac{1}{2}$; (5) 2; (6) $-\dfrac{1}{3}$; (7) $\dfrac{1}{6}$; (8) $\dfrac{1}{2}$; (9) 1; (10) 3; (11) 2; (12) $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$; (13) 1; (14) $\dfrac{1}{a}$; (15) $\dfrac{1}{3}$; (16) $-\dfrac{e}{2}$; (17) 1; (18) $\dfrac{1}{2}$; (19) 1; (20) e^{-1}; (21) 1; (22) 1; (23) $e^{-\frac{1}{6}}$; (24) k; (25) 1; (26) $-\dfrac{1}{3}$; (27) $e^{-\frac{2}{\pi}}$; (28) 0; (29) 0; (30) $e^{-\frac{1}{2}}$; (31) $\dfrac{1}{2}$; (32) -2.

2. (1) 0,不能用洛比达法则,不是未定式;

(2) 0,不能用洛比达法则;

(3) 1,不能用洛比达法则;

(4) 1,不能直接用洛比达法则.

3. (1) $x^{\alpha}(\alpha>0)$比$(\ln x)^{k}(k>0)$更高级的无穷大量,$(x\to+\infty)$;

(2) $e^{\sqrt{x}}$比$x^{\alpha}(\alpha>0)$更高级的无穷大量,$(x\to+\infty)$;

(3) x^{x} 比 e^{x} 更高级的无穷大量,$(x\to+\infty)$;

(4) $\ln\sin\dfrac{a}{x}$与$\ln\sin\dfrac{b}{x}$是$x\to+\infty$的同级无穷大量.

4. (1) $\dfrac{1}{2}$; (2) 1; (3) -1; (4) $\dfrac{1}{2^{7}}$; (5) 0.

习题 2.7

5. (1) 极大 $y(0)=0$; 极小 $y(1)=-1.33$.

(2) 极大 $y(0)=4$; 极小 $y(-2)=\dfrac{8}{3}$.

(3) 极大 $y(0)=\sqrt[3]{a^{4}}$; 极小 $y(\pm a)=0$.

(4) 极小 $y(0)=0$.

(5) 极大 $y(\pm1)=e^{-1}$;极小 $y(0)=0$.

(6) 极小 $y(-\ln\sqrt{2})=2\sqrt{2}$.

(7) 极大 $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$.

(8) 极大 $y(e)=e^{\frac{1}{e}}$. (9) 无极值.

(10) 极大 $y(0)=0$; 极小 $y\left(\dfrac{2}{5}\right)=-\dfrac{108}{3152}$.

(11) 极小 $y(3)=0$. (12) 无极值.

(13) 极大 $y\left(\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}$; 极小 $y\left(\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}$, $k=0, \pm1, \pm2, \cdots$.

(14) 极小 $y(e)=e$.

(15) 极大 $y(1)=1$;极小 $y(0)=y(2)=0$. (16) 无极值.

(17) 极大 $y(-\sqrt{2})=\dfrac{4+3\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}}$;极小 $y(\sqrt{2})=\dfrac{4-3\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}}$.

6. (1) $\max y=13$; $\min y=4$.

(2) $\max y=2$; $\min y=-12$.

(3) $\max y=10$; $\min y=6$.

(4) $\max y=\dfrac{\pi}{2}$; $\min y=-\dfrac{\pi}{2}$.

(5) $\max y=\frac{3}{5}$；$\min y=-1$.

(6) 无最大值；$\min y=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$.

(7) $\max y=\frac{\pi}{4}$；$\min y=0$.

(8) 无最大值；$\min y=-\frac{1}{e}$.

8. (1) 有一实根，范围$(3,+\infty)$.

(2) 当$a>\frac{1}{e}$时，无实根；

当$0<a<\frac{1}{e}$时，有二个实根，分别在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$，$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$内；当$a=\frac{1}{e}$时，只有$x=e$一个实根.

9. 边长为1厘米. 10. 高为$\frac{20}{\sqrt{3}}$厘米. 12. $1\frac{27}{43}$小时. 13. $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=1$.
14. 桶底半径为1米，高为1.5米. 15. 离甲城$50-\frac{100}{\sqrt{6}}$公里处. 16. 2.4米.
17. $(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$.

习题 2.8 1. (1) 在$(-\infty,0)$内呈凸形，在$(0,+\infty)$内呈凹形；$x=0$是扭转点.

(2) 在$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$内呈凹形，在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$内呈凸形；$x=\frac{1}{2}$是扭转点.

(3) 处处呈凹形，无扭转点.

(4) 在$(0,1)$内呈凸形，在$(1,+\infty)$内呈凹形；$x=1$是扭转点.

(5) 在$(-\infty,-3)$和$(-1,+\infty)$内呈凹形；在$(-3,-1)$内呈凸形；$x=-3$和$x=-1$是扭转点.

(6) 在$(2k\pi,(2k+1)\pi)$内呈凸形，在$((2k+1)\pi,(2k+2)\pi)$内呈凹形；$x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$是扭转点.

(7) 在$(-1,1)$内呈凹形，在$(-\infty,-1)$和$(1,+\infty)$内呈凸形；$x=-1$，和$x=1$是扭转点.

(8) 在$(-\infty,-3a)$和$(0,3a)$内呈凹形，在$(-3a,0)$和$(3a,+\infty)$内呈凸形；$x=-3a$，$x=0$，$x=3a$是扭转点.

(9) 在$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$和$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$内呈凹形，在$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$内呈凸形；

$x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$是扭转点.

(10) 在$(0,ae^{\frac{3}{2}})$内呈凸形,在$(ae^{\frac{3}{2}},+\infty)$内呈凹形; $x=ae^{\frac{3}{2}}$是扭转点.

2. (1) 扭转点为:$(1,4)$和$(1,-4)$;

(2) 扭转点为:当$t=k\pi+\frac{3\pi}{4}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时.

4. $a=-\frac{3}{2}$, $b=\frac{9}{2}$. 5. $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$. 6. $\alpha=-\frac{20}{3}$, $\beta=\frac{4}{3}$. 还有扭转点为:$(-2,-2.5)$,$(0,0)$. 9. (1) $y=0$, $x=1$, $x=2$; (2) $x=0$, $y=x+3$; (3) $x=-\frac{1}{e}$, $y=x+\frac{1}{e}$; (4) $y=2x\pm\frac{\pi}{2}$; (5) $x+y=0$; (6) $y=\pm\frac{b}{a}x$; (7) $x=1$, $y=3x+1$; (8) $y=-1$, $2x+y+1=0$; (9) $y=x$; (10) $y=0$. 10. (1) $y=\frac{1}{2}x+e$; (2) $x+y+a=0$; (3) $x=2$, $2x+8y+1=0$, $6x-40y+9=0$.

习题 2.9 1. (1) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; (2) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; (3) $\frac{6|x|}{(1+9x^4)^{3/2}}$; (4) $\frac{16\sqrt{5}}{25}$; (5) 0; (6) $\frac{5\sqrt{2}}{6a}$; (7) $\frac{1}{6}$; (8) $\frac{2}{\pi a}$; 2. $\frac{1}{4}$.

3. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\ln2,\right)$, $R=\frac{3}{2}\sqrt{3}$. 4. $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

6. $a=3,-3$; $b=-3,9$; $c=1,-5$. 7. $y=-x^5-0.6x^4+45x^3+0.1x^2$.

总复习题

5. $f_+'(0)=1$, $f_-'(0)=0$. 6. (1) e^2; (2) $+\infty$; (3) $e^{\frac{1}{3}}$; (4) 0.

7. (1) 极小值 $y(0)=0$; 极大值 $y(2)=4e^{-2}$; (2) 极小值 $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $y\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-3$, 极大值 $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}$, $y\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}$, (3) 极小值 $y\left(\frac{1}{2k}\ln\frac{b}{a}\right)=2\sqrt{ab}$,无极大值;

(4) 极小值 $y\left(2n\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{2n\pi+\frac{\pi}{4}}$,

极大值 $y\left[(2n+1)\pi+\frac{\pi}{4}\right]=-\sqrt{2}e^{(2n+1)\pi+\frac{\pi}{4}}$, $n=0,\pm2,\cdots$.

8. 高为$\frac{4}{3}$,最大体积为$\frac{32}{81}\pi$.

习题 3.1 1. (1) $\frac{2}{5}x^{5/2}+x+C$ (2) $\sqrt{\frac{2h}{g}}+C$ (3) $-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}-e^x$ $+\ln|x|+C$ (4) $\frac{4}{7}x^{7/4}+4x^{-\frac{1}{4}}+C$ (5) $\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+C$

(6) $\arcsin x+\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$ (7) $\frac{4^x}{\ln 4}+2\frac{6^x}{\ln 6}+\frac{9^x}{\ln 9}+C$

(8) $x-\operatorname{arc\,tg}x+C$ (9) $\operatorname{tg}x-x+C$ (10) $x-\sin x+C$

(11) $\sin x-\cos x+C$ (12) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}x+\frac{x}{2}+C$

2. (1) $\int|x|\,dx=\begin{cases}\frac{x^2}{2}+C, & x\geqslant 0\\ -\frac{x^2}{2}+C, & x<0\end{cases}$

(2) $\int e^{-|x|}dx=f(x)+C$，其中 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0\\ 1, & x=0\\ -e^{-x}+2, & x>0\end{cases}$

(3) $\int\max(1,x^2)dx=f(x)+C$，其中 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}, & x<-1\\ x, & -1\leqslant x<1\\ \frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}, & x\geqslant 1\end{cases}$

(4) $\int(1+|x|)^2dx=f(x)+C$，其中

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}-x^2+x, & x<0\\ x, & x=0\\ \frac{x^3}{3}+x^2+x, & x>0\end{cases}$$

3. (1) $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$ (2) $\ln|x^2-3x+8|+C$

(3) $-\ln|\cos x|+C$ (4) $-\ln(1+\cos x)+C$

(5) $\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C$ (6) $\ln(3+\sin x+\cos x)+C$

4. (1) $\frac{1}{202}(2x-3)^{101}+C$ (2) $-\frac{T}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi_0\right)+C$

(3) $-\sin\frac{1}{x}+C$ (4) $e^{\sin x}+C$

(5) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+C$ (6) $-2\cos\sqrt{x}+C$

(7) $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$ (8) $\sec x+C$

(9) $\frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg}x)^2+C$ (10) $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}+C$

(11) $\ln|\ln(\ln x)|+C$ (12) $\frac{2}{3}(1+3\operatorname{tg}\varphi)^{\frac{1}{2}}+C$

(13) $\frac{1}{3}(1+x)^{3/2}-\frac{1}{3}(x-1)^{3/2}+C$

5\. (1) $-\sqrt{1-x^2}+C$ (2) $\frac{1}{4}(\sqrt[3]{1+x^3})^4+C$

(3) $\frac{1}{4}\ln(x^4+\sqrt{x^8-4})+C$ (4) $\sqrt{3x^2-5x+6}+C$

(5) $\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{2}}\right)+C$ (6) $\frac{2}{\sqrt{\cos x}}+C$

(7) $\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}+C$ (8) $\frac{1}{2}\left(\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{2}\right)^2+C$

(9) $\frac{2}{3}(\operatorname{arc\,sin}x)^{3/2}+C$ (10) $(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x})^2+C$

(11) $(a-b)\ln\left|\sin\frac{x}{a-b}\right|+C$ (12) $e^{e^x}+C$

(13) $\frac{1}{4}e^{2x^2}+C$ (14) $\frac{1}{4}(e^x+1)^4+C$

(15) $\frac{2}{3}\sqrt{[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^3}+C$

(16) $\frac{1}{2}a^2\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$

(17) $\frac{1}{a^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}+C$ (18) $\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}+C$

(19) $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}+C$

(20) $-\frac{1}{9x}\sqrt{x^2+9}+C$ (21) $-\frac{(4-x^2)^{3/2}}{12x^3}+C$

(22) $\operatorname{arc\,sin}\frac{1}{\sqrt{21}}(2x-1)+C$

6. (1) $-\mathrm{ctg}x-x+C$ (2) $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$

(3) $-\mathrm{ctg}x+\mathrm{tg}x+C$ (4) $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C$

(5) $\frac{1}{2(n-m)}\sin(n-m)x-\frac{1}{2(m+n)}\sin(m+n)x+C$

(6) $\frac{3}{5}\sin\frac{5}{6}x+3\sin\frac{x}{6}+C$ (7) $\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{20}\sin 5x+\frac{1}{28}\sin 7x+C$

(8) $x-\ln(e^x+1)+C$ (9) $\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C$

(10) $-\frac{1}{3}\sqrt{2-x^2}(x^2+4)+C$ (11) $-\frac{1}{1+\mathrm{tg}x}+C$

7. (1) $-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$

(2) $-e^{-x}(x+1)+C$

(3) $\frac{1}{5}\left(x^2\sin 5x+x\cos 5x-\frac{2}{25}\sin 5x\right)+C$

(4) $\frac{a^x}{\ln a}\left(x^2-\frac{2x}{\ln a}+\frac{2x}{\ln^2 a}\right)+C$

(5) $x\,\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x+C$

(6) $\frac{1}{2}(x^2\,\mathrm{arc\ tg}x-x+\mathrm{arc\ tg}x)+C$

(7) $\frac{1}{3}(x^3+1)\ln(1+x)-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}+C$

(8) $(x+1)\mathrm{arc\ tg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$

(9) $\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\arcsin x+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}+C$

(10) $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+C$ (11) $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C$

(12) $x\,\mathrm{tg}x+\ln|\cos x|+C$ (13) $\frac{1}{3}\sqrt{1+2x}(x-1)+C$

(14) $-\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+C$

(15) $-\cos x\ln|\mathrm{tg}x|+\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C$

(16) $\frac{1}{2}(x^2-1)\ln\frac{1+x}{1-x}+x+C$

(17) $\frac{1}{a^2+b^2}(a\,\mathrm{ch}ax\sin bx-b\,\mathrm{sh}ax\cos bx)+C$

(18) $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$

(19) $\frac{1}{2}\left(\mathrm{arc\ tg}x-\frac{x}{1+x^2}\right)+C$

(20) $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$

(21) $\frac{x-2}{x+2}e^x+C$ (22) $-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin^2 x}+\mathrm{ctg}x\right)+C$

(23) $x-\frac{\mathrm{arc\ tg}e^x}{e^x}-\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C$

8. (1) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C$ (2) $\mathrm{arc\ tg}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arc\ tg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$

(3) $\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln|1+x|+C$

(4) $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+2}+C$

(5) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C$

(6) $\frac{4}{2-x}-\frac{11}{2(x-2)^2}+C$ (7) $x+\frac{1}{x}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C$

(8) $\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\mathrm{arc\ tg}x+C$

(9) $\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2(x+1)}+C$

(10) $\frac{1}{2}\ln\frac{(x+2)^4}{|(x+1)(x+3)^3|}+C$

(11) $\frac{1}{4}\frac{x+2}{x^2+4x+6}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\mathrm{arc\ tg}\frac{x+2}{\sqrt{2}}+C$

(12) $\frac{1}{x^2(x^2+1)}+\ln\sqrt{x^2+1}+C$

9. (1) $2[\sqrt{1+x}-\ln(1+\sqrt{1+x})]+C$

(2) $\frac{\sqrt{2+4x}}{6}(x-1)+C$ (3) $2(\sqrt{x}-\mathrm{arc\ tg}\sqrt{x})+C$

(4) $x+\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|+C$

(5) $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$

(6) $\sqrt{t^2+1}\left[\frac{3}{5}(t+1)^2-2(t^2+1)+3\right]+C$，$t=\sqrt[3]{x}$

(7) $\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C$

(8) $\sqrt{4x^2+2x-3}+2\ln|(4x+1)-\sqrt{(4x+1)^2-13}|+C$

(9) $\frac{1}{4}(2x-1)\sqrt{3+4x-4x^2}+\arcsin\frac{2x-1}{2}+C$

(10) $\frac{3}{2(2t+1)}+\ln\frac{t^4}{|2t+1|^3}+C$，其中 $t=x+\sqrt{x^2+x+1}$

10. (1) $F(x)=\begin{cases}\operatorname{arc\,sec}x+C, & x>1\\ -\operatorname{arc\,sec}x+C, & x<-1\end{cases}$

(2) $F(x)=\begin{cases}-\operatorname{arc\,csc}x+C, & x>1\\ \operatorname{arc\,csc}x+C, & x<-1\end{cases}$

(3) $F(x)=\begin{cases}-\arcsin\frac{1}{x}+C, & x>1\\ \arcsin\frac{1}{x}+C, & x<-1\end{cases}$

(4) $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2-1}+C$

11. (1) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C$ 或 $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}+1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C$

(2) $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x+\varphi}{2}\right|+C$,其中 $\varphi=\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(3) $\operatorname{tg}x-\sec x+C$ 或 $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+C$

(4) $\ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$　　(5) $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C$

(6) $\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$

(7) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)+\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\right]+C$

(8) $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+C$

(9) $\frac{1}{8}\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$

12. (1) $\frac{1}{6}\ln\frac{(2+\cos x)^2(1-\cos x)}{(1+\cos x)^3}+C$

(2) $x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x)+C$

(3) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sin^2 x+C$　　(4) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{2}}+C$

(5) $\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C$

(6) $-\frac{8}{3}\operatorname{ctg}^3 2x-8\operatorname{ctg}2x+C$

13. (1) $2[\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})]+C$

(2) $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+C$　　(3) $\operatorname{tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$

(4) $\ln|\cos x+\sin x|+C$　　(5) $\ln(e^x+e^{-x})+C$

(6) $(-1)^{n+1}\cos x+2n$, $n\pi<x\leqslant(n+1)\pi$, $n=0,\ \pm1,\pm2,\cdots$

(7) $\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{4}\right|\operatorname{sgn}\left(\cos\frac{x}{2}\right)+C$

(8) $\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$

(9) $F(x)=$

$$\begin{cases}\frac{1}{3}(x+x^2)^{3/2}-\frac{1+2x}{8}\sqrt{x+x^2}+\frac{1}{16}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right| \\ +C, \qquad\qquad\qquad x\geqslant0 \\ -\frac{1}{3}(x+x^2)^{3/2}+\frac{1+2x}{8}\sqrt{x+x^2}-\frac{1}{16}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right| \\ +C, \qquad\qquad\qquad x\leqslant-1\end{cases}$$

(10) $\frac{2}{3}[(x-1)^{3/2}+(x-2)^{3/2}]+C$

(11) $\frac{1}{3}[x^3+(x^2-1)^{3/2}]+C$

(12) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}\left(\ln^2 x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9}\right)+C$

(13) $-e^{\frac{1}{x}}+C$　　(14) $\text{arc tg}(\ln x)+C$

(15) $\frac{x}{4}+\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 4x+\frac{1}{24}\sin 6x+C$

(16) $\frac{1}{3}(x^3-1)e^{x^3}+C$　　(17) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$

(18) $\frac{1}{3}\text{tg}^3 x+C$　　(19) $\ln|1+\text{ctg}x|-\text{ctg}x+C$

(20) $\ln|\text{tg}x+2+\sqrt{\text{tg}^2 x+4\text{tg}x+1}|+C$

(21) $\frac{1}{4}\ln \text{ch}2x+C$　　(22) $\frac{1}{3}\text{ch}^3 x-\text{ch}x+C$

(23) $-x\text{cth}x+\ln|\text{sh}x|+C$

(24) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\text{sh}2x+\frac{1}{32}\text{sh}4x+C$

(25) $\frac{x\text{arc sin}x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+C$

(26) $\frac{1}{\ln 4}\ln\left|\frac{1+2^x}{1-2^x}\right|+C$　　(27) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac{1}{2}\text{arctg}x+C$

(28) $2\sqrt{x+1}[\ln(x+1)-2]+C$

(29) $x\ln(1+x^2)-2x+2\text{arctg}x+C$

(30) $\frac{1}{2}\text{arc sin}x-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+C$

(31) $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}+C$

(32) $-\frac{1}{1+\text{tg}x}+C$

(33) $2\sqrt{x}-2\sqrt{1-x}\,\text{arc sin}\sqrt{x}+C$

(34) $-\ln(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x})+C$

(35) $a\left[x\text{arctg}x-\frac{1}{2}\pi(x^2+1)\right]-\frac{1}{2}(a-b)(\text{arc tg}x)^2+C$

(36) $x\text{arc tg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\text{arc tg}x)^2+C$

(37) $\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{\text{arc tg}x}{x}+C$　　(38) $F(x)+C$,其中

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\text{arc tg}\,\dfrac{x^2-1}{\sqrt{2}x}-\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x<0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\text{arc tg}\,\dfrac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x>0\end{cases}$$

或$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\text{arc tg}\sqrt{2}\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+\text{arc tg}\sqrt{2}\left(x+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\right]+C$

(39) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|+C$

(40) $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[\text{arc tg}\sqrt{2}\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right.$

$\left.+\text{arctg}\sqrt{2}\left(x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]+C$

(41) $\dfrac{1}{4}\ln|x|-\dfrac{1}{24}\ln(x^6+4)+C$

(42) $\dfrac{1}{10}\ln\dfrac{x^{10}}{x^{10}+1}+\dfrac{1}{10(x^{10}+1)}+C$

(43) $\dfrac{1}{7}\ln\dfrac{|x|^7}{(1+x^7)^2}+C$　　(44) $\text{arc tg}x+\dfrac{1}{3}\text{arc tg}(x^3)+C$

习题 3.2　1. a) $m\approx\dfrac{T_1-T_0}{n}\sum_{k=1}^{n}v\left(T_0+k\dfrac{T_1-T_0}{n}\right)$;

b) $m=\int_{T_0}^{T_1}v(t)\mathrm{d}t$.

2. 内接 $20-\dfrac{4}{n}$,外接 $20+\dfrac{4}{n}$,绝对误差$\dfrac{4}{n}$.

6. (1) e−1 (2) $\dfrac{1}{2}$ (3) 1 (4) 156 (5) ln2 (6) 2ln2−1

7. (1) $\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x}$ 或 $\int_1^2\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$　(2) $\int_0^1\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ (3) $\int_0^1 x^p\mathrm{d}x$

(4) $\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x$　(5) $\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

习题 3.3　1. (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}x\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\mathrm{d}x$　(2) $\int_1^2\ln x\mathrm{d}x>\int_1^2(\ln x)^2\mathrm{d}x$

(3) $\int_3^4 \ln x dx < \int_3^4 (\ln x)^2 dx$ (4) $\int_0^1 e^x dx > \int_0^1 e^{x^2} dx$

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx$

4. (1) $3 < I < 5$ (2) $\frac{\pi}{9} < I < \frac{2\pi}{3}$ (3) $\frac{4\pi}{3} < I < 4\pi$

(4) $e^{-100}\ln 2 < I < \ln 2$

7. (1) 0 (2) 0 (3) 0 8. (1) $2x\sqrt{1+x^4}$ (2) $\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x^2}$ (3) $e^{-x^2} - \frac{1}{2x^2\sqrt{\ln x}}$ (4) 0 9. (1) $\frac{dy}{dx} = \mathrm{ctg}t$ (2) $\frac{dy}{dx} = -t^2$

10. 当 $x=1$ 时为极小点，$\left(y(1) = -\frac{17}{12}\right)$，

拐转点：$\left(2, -\frac{4}{3}\right)$ 和 $\left(\frac{4}{3}, -\frac{112}{81}\right)$

12. (1) 1 (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{\pi^2}{4}$ (4) 0 (5) $\frac{1}{2}$ (6) e

13. (1) 2 (2) $e-1$ (3) $\frac{\pi}{3}$ (4) $\frac{1}{5}\ln\frac{4}{3}$ (5) 1 (6) 1

(7) 1 (8) 2 (9) $|x|$ (10) 2 (11) $F(x) = \begin{cases} -L, & \text{当 } x < -L \\ x, & \text{当 } |x| \leqslant L \\ L, & \text{当 } x > L \end{cases}$

14. $F(x) = \begin{cases} -x-1, & -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ x-1, & 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$

$$\frac{dF}{dx} = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant x < 0 \\ \text{不存在}, & x = 0 \\ 1, & 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

16. (1) 负 (2) 正 (3) 负 (4) 正

18. (1) $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$ (2) π (3) $\frac{1}{5}(2e^{\pi}+1)$ (4) $\ln\frac{e+\sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}}$

(5) $x\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) - a\ln(1+\sqrt{2})a - \sqrt{x^2+a^2} + \sqrt{2}a$

(6) $\frac{1}{2}a^2[\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2}+1)]$ (7) $6-2e$

(8) $\frac{2}{\sqrt{5}}\text{arc tg}\frac{1}{\sqrt{5}}$.

19. (1) $\frac{8}{15}$ (2) $\frac{35}{128}\pi$ (3) $\frac{256}{693}$ (4) $\frac{8}{35}$ (5) $\frac{5}{16}\pi$ (6) $\frac{3}{16}\pi$

(7) $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ (8) $\frac{1}{16}\pi a^4$ 24. (1) 0 (2) $1-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$ (3) 0 (4) $\frac{3\pi}{2}$

(5) $\int_{-1}^{1}x^n\sqrt{1-x^2}\,dx=\begin{cases}0 & n\text{为奇数},\\ \frac{(n-1)!!}{(n+2)!!}\pi, & n\text{为偶数}\end{cases}$

25. $\pi^2/4$ 27. (1) $\frac{\pi}{2}$ (2) $\frac{9-4\sqrt{3}}{36}\pi+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$ (3) $\frac{\pi}{4}$ (4) $\frac{1}{6}$

(5) $\frac{3}{8}\ln 2-\frac{225}{1024}$ (6) $\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}$ (7) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}-1)$ (8) π (9) 0 (10) $\frac{\pi}{4}$ (11) $\frac{1}{6}$ (12) 0 28. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

31. (1) $\frac{a+b}{2}$ (2) $\left[\left(\frac{e}{a}\right)^a\left(\frac{b}{e}\right)^b\right]^{\frac{1}{b-a}}$

习题 3.4 1. 3.1416 2. 0.9573 3. 0.74683 4. 1.37039

习题 3.5 1. (1) 4.5 (2) $\frac{4}{3}a^3$ (3) πab (4) $\frac{32}{3}\sqrt{6}$ (5) ln2 (6) $e+e^{-1}-2$ (7) $\frac{16}{3}$ (8) $3\pi a^2$ (9) $\pi a^2, \frac{3}{8}\pi a^2$ (10) $\frac{8}{15}$ (11) $\frac{3}{2}\pi a^2$ (12) a^2

2. (1) $a\ln\frac{a+b}{a-b}-b$ (2) $\frac{a}{2}(e^{\frac{b}{a}}-e^{-\frac{b}{a}})$ (3) $6a$

(4) $a\left[1+\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(\sqrt{2}+1)\right]$

(5) $\frac{a}{2}[2\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\ln(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1})]$

(6) $p[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$

3. (1) $\frac{4}{3}\pi abc$ (2) $\frac{16}{3}a^3$

5. (1) $\frac{\pi^2}{2}, 2\pi^2$ (2) $\frac{8\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$ (3) $5\pi^2a^3$ (4) $2\pi^2a^2b$

6. (1) 2π (2) $\pi(e-1)$ (3) $2\pi\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^4}\right)$ (4) $\pi(\ln 2)^2$

7. (1) $4\pi R^2$ (2) $2\pi a^2+\frac{2\pi ab^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$

(3) $\frac{\pi}{4}a^2(e^2-e^{-2}+4)$ (4) $\frac{12}{5}\pi a^2$ (5) $\frac{32}{5}\pi a^2$

8. (1) $1-3e^{-2}$ (2) $\frac{1}{2}$ 9. $6\times10^4\pi$ 吨·米 10. $708\frac{1}{3}$吨

11. $\frac{a^2b}{6}$；2倍 12. (m_0-9)克 14. 156.25米

习题 3.6 1. (1) 发散； (2) 发散； (3) 当 $k>1$ 收敛，$k\leqslant1$ 发散； (4) 发散； (5) 收敛； (6) 当 $k>0$ 时收敛于$\frac{k}{k^2+b^2}$，当 $k\leqslant0$ 时发散； (7) 收敛于$\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$； (8) π (9) 收敛； (10) 发散； (11) 发散； (12) 发散； (13) 发散； (14) 收敛于 1.

2. (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{a}$ (3) π (4) $\frac{1}{2}$ (5) $\frac{1}{2}$ (6) $\ln\frac{1+\sqrt{a^4+1}}{a^2}$

(7) $n!$ (8) $\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2a^{2n-1}}$ (9) $\frac{\pi}{2}$ (10) $7\frac{2}{7}$

(11) $\frac{8}{3}$ (12) π (13) $-\ln 2$ (14) $\frac{(m-1)!!}{m!!}\frac{\pi}{2}$，当 m 为偶数，$\frac{(m-1)!!}{m!!}$，当 m 为奇数； (15) $2\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ (16) $(-1)^n n!$

总复习题

1. (1) $\frac{1}{m}\ln\left(\frac{x^m}{x^m+1}\right)+C$ (2) $\frac{1}{2}\arccos\frac{1+x^2}{\sqrt{2}x^2}+C$

(3) $\frac{2-x}{3(1-x)^2}-\sqrt{1-x^2}+C$ (4) $-\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+C$

(5) $\frac{1}{ab}(bx-\ln|a+e^{bx}|)+C$

(6) 当 $r=1$ 时，$\frac{x}{2}+C$，当 $r\neq1$ 时，$\frac{x}{2}-\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{r+1}{r-1}\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right)+C$

4. 0 6. $\frac{2}{k+2}\cdot\pi a^{k+2}$；为外接圆柱体体积 πa^{k+2} 的$\frac{2}{k+2}$倍.

习题 4.1 3. $x\frac{dy}{dx}=y-x$.

4. $\frac{d^2\theta}{dt^2}+k\frac{d\theta}{dt}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$,初始条件:

(1) $t=0$ 时,$\theta=0$, $\frac{d\theta}{dt}=\omega$ (2) $t=0$ 时,$\theta=\theta_0$, $\frac{d\theta}{dt}=0$

5. 设 t 时刻漏斗内的水面高度为 x,它下降的运动方程为:

$$\left[r^2x^{-1/2}+2x^{1/2}r\left(\frac{R-r}{H}\right)+\left(\frac{R-r}{H}\right)^2x^{3/2}\right]dx=-0.62r^2\sqrt{2g}dt,$$

其中 $r=0.3$ 厘米,$R=12$ 厘米,$H=20$ 厘米,$g=980$ 厘米/秒^2.

习题 4.2 1. (1) $x=Ce^{\arctan y}$ (2) $y=C|x|^{1-a}e^{-\frac{a}{2}x^2}$ (3) $y=\text{arc ctg}(\pm\sqrt{\text{tg}^2x+C})$ (4) $y=\sqrt[3]{3(x-x^2)+C}$ (5) $y=\frac{1}{1-Cx}$ 2. (1) $y=1$ (2) $y=6-\frac{35x}{1+6x}$ 3. $xy=6$ 4. $\ln\left|\frac{\theta-\theta_1}{\theta_0-\theta_1}\right|=k_0\left(t+\frac{a}{2}t^2\right)$

5. $x=a(1-e^{-kt})$ 6. (1) ≈0.467 公里/小时 (2) 85.2 米

7. (1) $y=\frac{x(2+Cx^3)}{1-Cx^3}$ (2) $y^2=x^2\ln(x^2)+Cx^2$ (3) $y=Ce^{y/x}$

(4) $e^{-\frac{y}{x}}=-\ln|x|+C$ (5) $3x+y+2\ln|1-x-y|=C$ (6) $(x+y-1)^3=C(y-x-3)$ (7) $y(y-2x)^3=C(y-x)^2$ (8) $x^2-y^2=Cy^3$

8. $x^2=2Cy+C^2$ 或 $y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$

9. (1) $y=(1+x^2)(x+C)$ (2) $y=x^2(Ce^{2y}+1)$ (3) $x=Ce^{2y}+\frac{y^2}{2}+\frac{y}{2}+\frac{1}{4}$ (4) $x=Ce^{\sin y}-2(1+\sin y)$

(5) $3\sqrt{y}=C\sqrt[4]{|x^2-1|}+x^2-1$

(6) $y=\frac{1}{\pm\sqrt{Ce^{x^2}+1}}$ (7) $x=\frac{1}{Ce^{-y^2/2}-y^2+2}$

10. $y=Cx\pm\frac{a^2}{2x}$

11. $I=\frac{E(R\sin at-aL\cos at)}{R^2+a^2L^2}+Ce^{-\frac{R}{L}t}$

12. (1) $y=xe^{1-x}$ (2) $\frac{x+y}{x^2+y^2}=1$ (3) $y=\frac{\pi-1-\cos x}{x}$

(4) $y=\sin x-1+2e^{-\sin x}$.

13. (1) $4(x^2+y)^3=(2x^3+3xy+C)^2$(提示:令 $u=\sqrt{x^2+y}$)

(2) $x^2-y^4=Cy^6$(提示:$u=x^2$)

(3) $4x+8\sin y+9\ln|4x+3-8\sin y|=C$(提示:令 $u=\sin y$)

(4) $y=\arcsin(x-1+Ce^{-x})$(提示:令 $u=\sin y$)

(5) $(x+C)\cos y=\ln x$(提示:令 $u=\cos y$)

14. (1) $\varphi(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 及 $y=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4x^2}{C-x^4}$

(2) $\varphi(x)=e^x$ 及 $y=e^x+\dfrac{xe^x}{Ce^x+1}$

习题 4.3 1. (1) $y=C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2$

(2) $y=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}C_1x^2+C_2$　　(3) $y=(C_1x-C_1^2)e^{\frac{x}{C_1}+1}+C_2$

(4) $y=\dfrac{C_1}{4}(x+C_2)^2+\dfrac{1}{C_1}$　　(5) $y=C_1e^{\frac{x}{a}}+C_2e^{-\frac{x}{a}}$

(6) $y^2+C_1=(x+C_2)^2$　　(7) $y=C_1e^x-\dfrac{1}{2}x^2-x+C_2$

(8) $e^y+C_1=(x+C_2)^2$

2. (1) $y=2+\ln\dfrac{x^2}{4}$　　(2) $y=\sqrt{2x-x^2}$

(3) $y=\pm(2x-2)^{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{x}{5}+\dfrac{2}{15}\right)+1$;3. $v\approx11.2$ 千米/秒　4. 0.00082 秒.

5. (1) 若取向上的方向为 y 轴的正向,则上抛和下落运动方程分别为:

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg-kv^2,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg+kv^2$$

(2) $V=\sqrt{\dfrac{mgv_0^2}{mg+kv_0^2}}$

总复习题

1. (1) $y=\ln\left(\dfrac{1}{2}e^{2x}+C\right)$　　(2) $y=\dfrac{1}{1-Cx}$

(3) $y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$　　(4) $x^2+2xy-y^2-4x+8y=C$

(5) $x-2y+\ln|x+y|=C$

(6) $y=\frac{1}{m+a}e^{mx}+Ce^{-ax}$, $m+a\neq0$; $y=e^{-ax}(x+C)$, $m+a=0$

(7) $x=Cy^3+\frac{1}{2}y^2$　　(8) $(1+x^2)(y^2+1)=Cx^2$

(9) $y^2(Cx^2-2x^3)=1$　　(10) $(xy-1)(3Cx^4-2x)=3x$

2. (1) $y=\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$

(2) $\mathrm{arc\ tg}\,\frac{y}{x}+\ln(x^2+y^2)=\frac{\pi}{4}+\ln 2$

(3) $y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}(2+x\sqrt{1-x^2}+\mathrm{arc\ sin}x)$

(4) $y=-\ln(1-x)$

3. (1) $y=\mathrm{arc\ tg}\,\frac{x+y}{a}+C$

(2) $y^2=x(\ln y^2+C)$(提示:将 y 作为自变量)

(3) $y=\ln[1+Ce^{(-e^x)}]$ (提示:令 $u=e^y$)

(4) $\mathrm{tg}\,\frac{y}{2}=Ce^{-x}-x+1$ $\left(提示:令 u=\mathrm{tg}\,\frac{y}{2}\right)$

(5) $x+\mathrm{ctg}\,\frac{x-y}{2}=C$ (提示:令 $u=x-y$)

4. 令 $y=C(x)x, y'=C(x)+xC'(x)$代入原方程可得

$$x\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}=g(C)$$

或有

$$\int\frac{\mathrm{d}C}{g(C)}=\ln|x|+C_1$$

求出 $C(x)$后就可得到齐次方程 $y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$的通解.

6. (1) $y=\frac{1}{6}x^3-\sin x+C_1x+C_2$

(2) $y=(1+C_1^2)\ln|x+C_1|-C_1x+C_2$

(3) $y=\pm\frac{2}{3C_1}\sqrt{(C_1x-1)^2}+C_2$

(4) $y=C_1(x+C_2)^{\frac{2}{3}}$

(5) $y=\frac{x+C_1}{x+C_2}$　　(6) $y=C_1\sqrt{x^2+C_2}$

7. (1) $y=\frac{4}{(x+4)^2}$　　　　(2) $y=+\sqrt{2x-x^2}$

8. (1) $\varphi(x)=-x^2$, $y=-x^2+\frac{3x^2}{1+Cx^3}$

(2) $\varphi(x)=-1$, $y=-1-\frac{xe^{2x}}{C-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{2x}}$

(3) $\varphi(x)=-\frac{1}{x}$, $y=-\frac{1}{x}-\frac{1}{Cx+x\ln|x|}$

习题 5.1　3. (1)$(a,b,-c)$;(2)$(-a,b,c)$;(3)$(a,-b,c)$.

4. (1)$(a,-b,-c)$; (2)$(-a,b,-c)$; (3) $(-a,-b,c)$; (4)$(-a,-b,-c)$.

5. $5\sqrt{2}$, $\sqrt{34}$, $\sqrt{41}$, 5.

6. $|AB|=3$, $|BC|=\sqrt{21}$, $|CA|=\sqrt{14}$.

7. $\left(0,0,1\frac{5}{9}\right)$

8. $(0,1,-2)$.

9. $(-3,7,0)$.

习题 5.2　2. $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$, $\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, $\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

5. $(1,8,5)$, $(16,0,-23)$.

6. 14; $\cos\alpha=\frac{2}{7}$, $\cos\beta=-\frac{3}{7}$, $\cos\gamma=\frac{6}{7}$.

7. $a^0=\left(\frac{3}{13},\frac{4}{13},-\frac{12}{13}\right)$.

8. $(1,-1,\pm\sqrt{2})$.

9. $\alpha=4$, $\beta=-1$.

10. (1)-6; (2)-61.

11. (1)38; (2)7; (3) -184; (4)9.

12. $\cos\theta=\frac{5}{21}$.

13. 6.

16. (1)24; (2) 60.

17. (1)3; (3)300.

18. (1)(5,1,7); (2))(20,4,28).

19. $|r|=\sqrt{\lambda^2a^2+\mu^2b^2+\gamma^2c^2}$.

20. 14.

21. 3.

22. (1)共面;(2)不共面.

23. 四点共面.

24. 共线.

25. $-\frac{3}{2}$.

29. $\frac{\pi}{3}$.

30. $V=25$.

31. $M(3\sqrt{2},3,-3)$.

32. $\overrightarrow{CA}=(-7,1,-7)$, $\angle A=25°56'49''$.

34. $\boldsymbol{x}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|^2}(\lambda\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

习题 5.3 2. $2x-y-z-6=0$.

3. $x-y-z=0$.

4. $x+y+z-2=0$.

5. $x+2y+2z-2=0$.

6. (1)$3x+3y+z-8=0$. (2)$3x+2y+6z-12=0$.

(3)$x-3y-2z=0$.

7. (1)平行; (2)相交; (3)重合; (4) 垂直.

8. $x+2z-5=0$.

9. $x+5=0$.

10. $x-z-1=0$.

11. (1)$\pi/3$; (2)$82°20'$; (3)$40°22'$.

12. (1)1; (2)0; (3)3.

13. (1)3; (2)6.5.

14. (1)同侧; (2)异侧.

15. $x+y-2z+1=0$.

16. $x-2y-z+4=0$ 及 $x+z-6=0$.

17. $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6},\frac{3-\sqrt{3}}{6},\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$.

18. $M_1(0,7,0)$和 $M_2(0,-5,0)$.

19. $M_1\left(0,\frac{73}{12},0\right)$和 $M_2\left(0,-\frac{73}{282},0\right)$.

20. (1)$2x-6y+2z-7=0$;

(2)$6x+3y+2z+7=0$ 及 $6x+3y+2z-7=0$;

(3)$6x+3y+2z-20=0$;

(4)$35y+12z=0$ 及 $3y-4z=0$.

21. (1)$x\pm\sqrt{26}y+3z-3=0$.

$x+3y-0$ 及 $3x-y=0$.

22. $d=\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$.

23. $\left(\frac{19}{11},-\frac{31}{11},\frac{41}{11}\right),r=3$.

24. (1)$\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+8}{5}$;

(2)$\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-4}{2}$;

(3)$\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}$;

(4)$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{1}$;

(5)$\begin{cases}\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{-3}\\ z=4\end{cases}$.

25. (1)$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}$;

(2)$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+3}{3}$.

26. $\frac{x+1}{-12}=\frac{y+4}{-46}=\frac{z-3}{1}$.

27. $x=t+1$, $y=-7t$, $z=-19t-2$.

28. (1)$(2,-3,6)$；(2)直线躺在平面内.

29. (1)$\varphi=79°1'$；(2)$\varphi=68°58'$.

30. (1)$d=\sqrt{5}$；(2)$d=25$；(3)$d=\frac{20}{13}$.

31. (1)交点$(1,0,-1)$；(2)交点$(-2,-1,5)$.

32. (1)$\varphi=\arcsin\frac{3}{133}$；(2)$\varphi=0$；(3)$\varphi=\frac{\pi}{2}$.

33. (1)$p=\sqrt{3}$；(2)$p=\frac{\sqrt{6}}{2}$；(3)$p=\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

34. (1)$p=7$；(2)$p=\frac{2\sqrt{26}}{13}$；(3)$p=1$.

35. $x+2y+3z=0$.

36. $2x+15y+7z+7=0$.

37. $x-8y+5z+5=0$.

38. $x+20y+7z-12=0$ 和 $x-z+4=0$.

39. $9x+11y+5z-16=0$.

40. $13x-14y+11z+51=0$.

41. $x+4y-z+1=0$，$13x-16y-51z+31=0$.

42. $\left(-\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

43. $(-5,2,4)$.

44. $(-12,-4,18)$.

45. $(0,3,1)$.

46. $\lambda=2$，交点$(3,1,0)$，$x-y-z=2$.

47. $3x-4y-5=0$ 和 $387x-164y-24z-421=0$.

48. $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+3}{6}$.

49. $\frac{x+3}{1}=\frac{y-5}{22}=\frac{z+9}{2}$.

50. $\begin{cases}x+y+z=0\\y-z-1=0.\end{cases}$

51. $x=3-t,y=-1+2t,z=0$；$y=-1+2t$，$z=5+8t$，$x=0$；$x=3-t$，$z=5+8t,y=0$.

52. $15x-3y-26z-6=0$.

53. $2x+y+2z\pm 2\sqrt[3]{3}=0$.

54. $\begin{cases}3x-14y-5z+16=0,\\5x-5y+17z-17=0.\end{cases}$

55. $\begin{cases}4x+3y-2z=0,\\x-6y-7z=0.\end{cases}$

56. $x+2y+1=0$.

57. $\dfrac{x+1}{48}=\dfrac{y}{37}=\dfrac{z-4}{4}$.

习题 5.4 2. (1)在坐标 Oxy 上表示直线,在空间表示垂直于 x 轴的平面;

(2)在坐标面 Oxy 上表示直线,在空间表示平面;

(3)在坐标面 Oxy 上表示圆,在空间表示平行于 z 轴的圆柱面;

(4)在坐标面 Oxy 上表示双曲线,在空间表示平行于 z 轴的双曲柱面;

(5)在坐标面 Oxy 上表示抛物线,在空间表示平行于 z 轴的一抛物柱面;

(6)在坐标面 Oxy 上表示一点,在空间表示平行于 z 轴的一条直线;

(7)在坐标面 Oxy 上表示两点,$\left(\pm\frac{2}{3}\sqrt{5},2\right)$,在空间表示分别通过 Oxy 面上这两点且平行于 z 轴的两条直线;

(8)在坐标面 Oxy 上表示两点$(4,\pm 3\sqrt{3})$,在空间表示分别通过 Oxy 面上这两点且平行于 z 轴的两条直线.

3. (1) $x^2+y^2-\dfrac{z^2}{4}=1$,旋转单叶双曲面;

(2) $\sqrt{y^2+z^2}=\sin x$;

(3) $4x^2+9y^2+9z^2=36$,旋转椭球面;

(4) $y^2+z^2=5x$,旋转抛物面;

(5) $x^2+y^2+z^2=9$,球面;

(6) $k^2x^2-y^2-z^2=0$,锥面.

7. $x^2+y^2=-8z+16$,旋转抛物面.

8. $3x^2+4y^2+4z^2=12$,旋转椭球面.

9. $5x^2-3y^2=1$,双曲柱面.

10. $x^2+y^2+(z+3)^2=25$,球面.

11. $x^2+20y^2-24x-116=0$,椭圆柱面.

习题 5.5 1. $A(-5,0,2)$, $B(0,-7,-4)$, $C(4,3,-2)$.

2. (1) $3x'-5y'+6z'+10=0$;

(2) $\dfrac{x'}{3}=\dfrac{y'}{4}=\dfrac{z'}{2}$;

(3) $x'^2+y'^2+z'^2-25=0$;

(4) $x'^2+y'^2+z'^2+x'y'+y'z'+z'x'-6=0$.

3. $A\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, $B(1,1,0)$;

$(5+\sqrt{2})x'+(5-\sqrt{2})y'+\sqrt{2}z'+2=0$.

4. $2x'^2-4z'^2+4x'+\sqrt{2}y'-\sqrt{2}z'-16=0$.

5. (1) $24x''^2+4y''^2+4z''^2=1$，椭球面；

(2) $2(\sqrt{5}+2)x''^2-(\sqrt{5}-2)y''^2+2z''^2=-1$，双叶双曲面；

(3) $x''^2+y''^2-z''^2 1=1$，单叶双曲面.

总复习题

1. (1) $(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2\neq 0$；或数组 a_1,a_2,a_3 和数组 b_1b_2,b_3 不成比例.

(2) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0$;

(3) $\dfrac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ 的绝对值；

(4) $\lambda=\dfrac{(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}}{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}}$, $\mu=\dfrac{(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}}{(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}}$, $v=\dfrac{(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}}{(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}}$.

2. (2) $\dfrac{2}{3}\sqrt{6}$; (3) $x+2y-z=0$.

3. $\dfrac{1}{6}\sqrt{\sqrt{3}-1}$.

4. (1) $(2x_0-x_1,2y_0-y_1,2z_0-z_1)$; (2) $\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{11}{5},2\right)$;

(3) $(6,1,5)$.

5. $9x^2+4y^2+4z^2-10yz+2y+2z-2=0$.

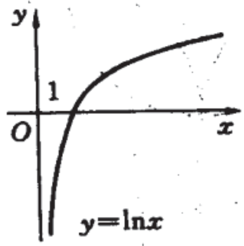
6. (1) $x^2+y^2=2z^2-2z+1$; (2) $\dfrac{2}{3}\pi$.

附 录

1. 希腊字母表

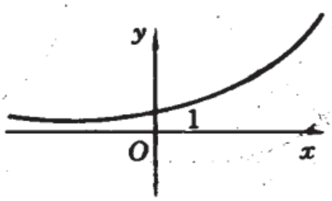
大 写	小 写	读 音	大 写	小 写	读 音
A	α	alpha	N	ν	nu
B	β	beta	Ξ	ξ	ksi
Γ	γ	gamma	O	o	omicron
Δ	δ	delta	Π	π	pi
E	ε	epsilon	P	ρ	rho
Z	ζ	zeta	Σ	σ	sigma
H	η	eta	T	τ	tau
Θ	θ	theta	Υ	υ	upsilon
I	ι	iota	Φ	φ	phi
K	κ	kappa	X	χ	chi
Λ	λ	lambda	Ψ	ψ	psi
M	μ	mu	Ω	ω	omega

2. 常用曲线图



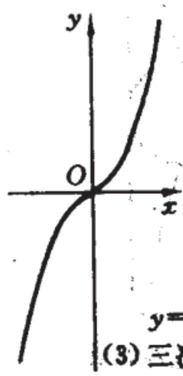
$y=\ln x$

(1) 对数曲线



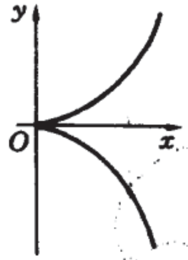
$y=e^x$

(2) 指数曲线



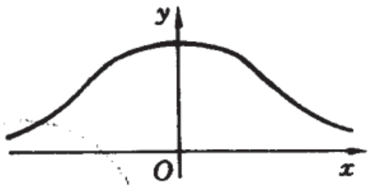
$y=ax^3$

(3) 三次抛物线



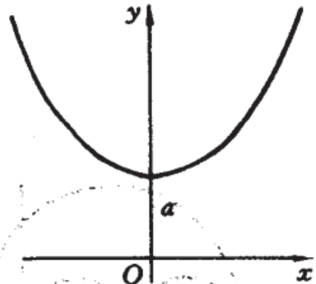
$y^2=ax^3$

(4)半三次抛物线



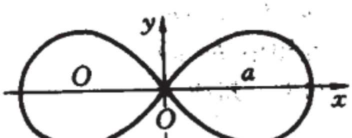
$y=e^{-x^2}$

(5)概率曲线



$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=a\cosh\frac{x}{a}$

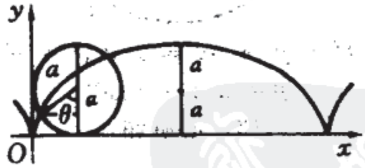
(6) 悬链线



$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$

$\rho^2=a2\cos 2\theta$

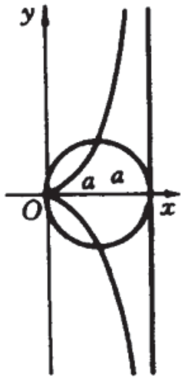
(7) 贝努里双纽线



$x=\operatorname{arcvers}\frac{x}{a}-\sqrt{2ay-y^2}$

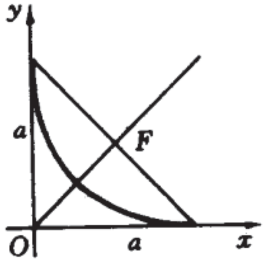
$\begin{cases}x=a(\theta\text{-}\sin\theta)\\y=a(1\text{-}\cos\theta)\end{cases}$

(8) 普通摆线



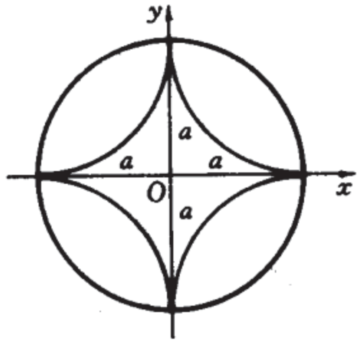
$y^2(2a-x)=x^2$

(9) 歧点蔓叶线



$x^{1/2}+y^{1/2}=a^{1/2}$

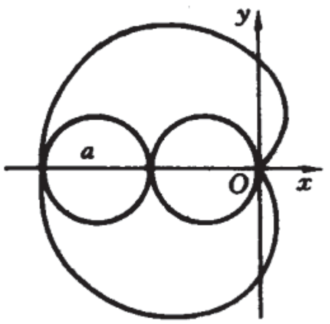
(10) 抛物线



$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$

$\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases}$

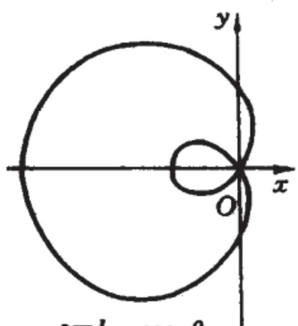
(11) 四歧点内摆线 (星形线)



$x^2 + y^2 + ax = a\sqrt{x^2 + y^2}$

$\rho = a(1 - \cos\theta)$

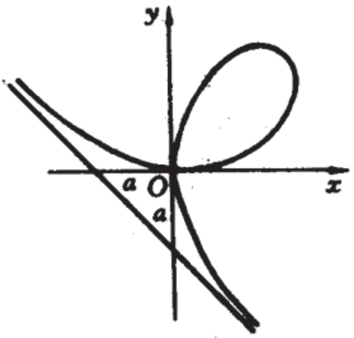
(12) 心脏纽



$\rho=b-a\cos\theta$

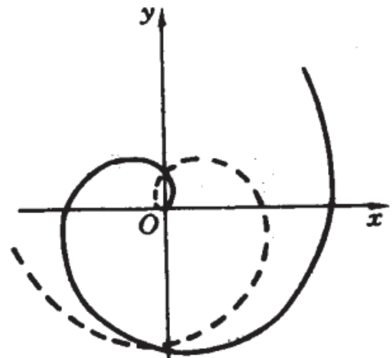
(在图中，$b<a$)

(13) 蜡线



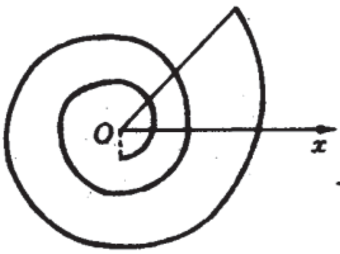
$x^3+y^3-3axy=0$

（14）笛卡尔叶形线



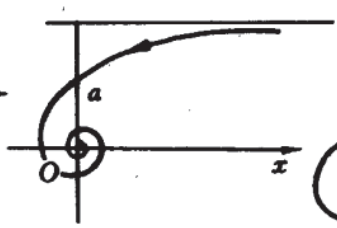
$\rho=a\theta$

（15）阿基米德螺线



$\rho=e^{a\theta}$或 $\ln\rho=a\theta$

（16）对数螺线或等角螺线

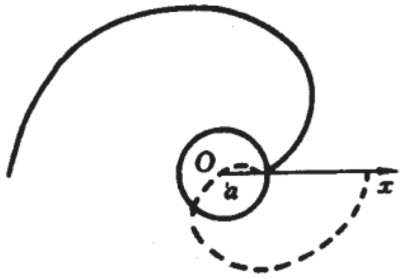


$\rho\theta=a$

（17）双曲螺线或倒螺线

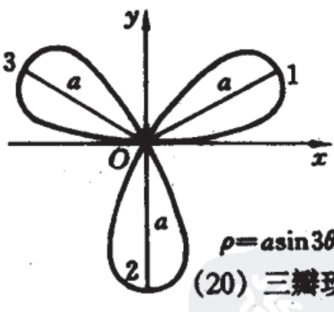
$\rho^2\theta=a^2$

（18）连锁螺线



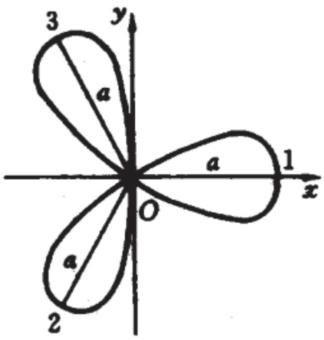
$(\rho-a)^2=4ac\theta$

（19）抛物螺线



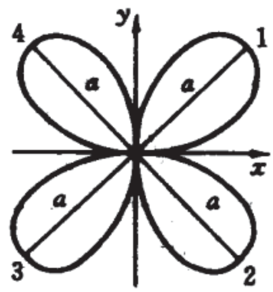
$\rho=a\sin3\theta$

（20）三瓣玫瑰线



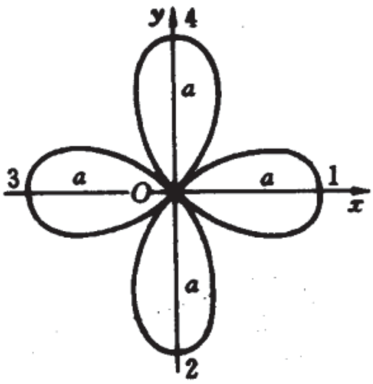
$\rho = a\cos 3\theta$

(21) 三瓣玫瑰张



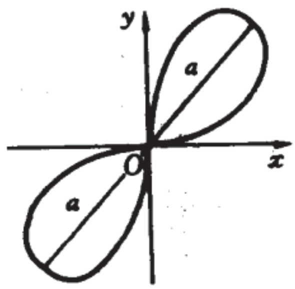
$\rho = a\cos 2\theta$

(22) 四瓣玫瑰线



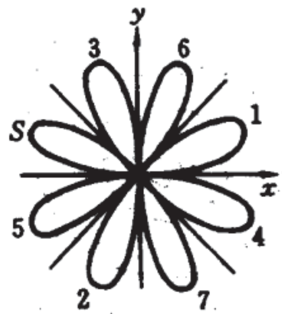
$\rho = a\cos 2\theta$

(23) 四瓣玫瑰线



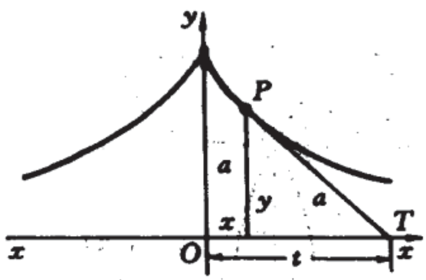
$\rho^2 = a^2\sin 2\theta$

(24) 二瓣玫瑰双纽线



$\rho = a\sin 4\theta$

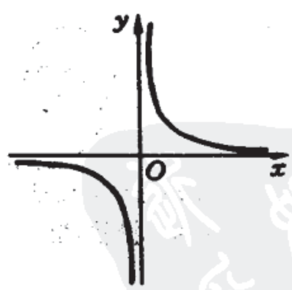
(25) 八瓣玫瑰线



$$x = a\,\mathrm{sech}^{-1}\frac{y}{a} - \sqrt{a^2 - y^2}$$

$$\begin{cases} x = t - a\tanh\dfrac{t}{a} \\ y = a\,\mathrm{sech}\dfrac{t}{a} \end{cases}$$

(26) 曳物线



$xy = a$

(27) 等轴双曲线

3. 简明积分表

含有 $a+bx$ 的积分

1. $\int (a+bx)^n \mathrm{d}x = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} + C \quad$ 当 $n \neq -1$

$$= \frac{1}{b}\ln|a+bx| + C \text{ 当 } n = -1$$

2. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{a+bx} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b^2}\ln|a+bx| + C$

3. $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{a+bx} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a+bx)^2 - 2a(a+bx) + a^2\ln|a+bx|\right] + C$

4. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2}\left(\frac{a}{a+bx} + \ln|a+bx|\right) + C$

5. $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(a+bx)^2} = \frac{x}{b^2} - \frac{a^2}{b^3(a+bx)} - \frac{2a}{b^3}\ln|a+bx| + C$

6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(a+bx)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a+bx}\right| + C$

7. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(a+bx)} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right| + C$

8. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(a+bx)^2} = \frac{1}{x(a+bx)} - \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right| + C$

含有 $\sqrt{a+bx}$ 的积分

9. $\int x\sqrt{a+bx}\,\mathrm{d}x = \frac{2(3bx-2a)(a+bx)^{3/2}}{15b^2} + C$

10. $\int x^2\sqrt{a+bx}\,\mathrm{d}x = \frac{2(15b^2x^2-12abx+8a^2)(a+bx)^{3/2}}{105b^3} + C$

11. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2(bx-2a)\sqrt{a+bx}}{3b^2} + C$

12. $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2(3b^2x^2-4abx+8a^2)\sqrt{a+bx}}{15b^3} + C$

13. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\frac{|\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}|}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}} + C \quad$ 当 $a > 0$

$$= \frac{2}{\sqrt{-a}} \text{arc tg} \sqrt{\frac{a+bx}{-a}} + C \quad 当 a < 0$$

14. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a+bx}} = -\frac{\sqrt{a+bx}}{ax} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}$

15. $\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x} dx = 2\sqrt{a+bx} + a\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}$

16. $\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{a+bx}}{x} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}$

含有 $a^2 \pm x^2$ 的积分

17. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1}{a} \text{arctg} \frac{x}{a} + C \qquad 当 n = 1$

$$= \frac{x}{2(n-1)a^2(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} \quad 当 n > 1$$

18. $\int \frac{x dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1}{2}\ln(a^2+x^2) + C \qquad 当 n = 1$

$$= \frac{1}{2(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}} + C \quad 当 n > 1$$

19. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

含有 $\sqrt{a^2-x^2}$ 的积分

20. $\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \text{arc sin} \frac{x}{a} + C$

21. $\int x\sqrt{a^2-x^2} dx = -\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2} + C$

22. $\int x^2\sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^4}{8} \text{arc sin} \frac{x}{a} + C$

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{arc sin} \frac{x}{a} + C$

24. $\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2} + C$

25. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

26. $\int (a^2-x^2)^{3/2}dx = \frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{3a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}+C$

27. $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C$

28. $\int \frac{x dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}+C$

29. $\int \frac{x^2 dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\arcsin\frac{x}{a}+C$

30. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C$

31. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2 x}+C$

32. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2x^2}-\frac{1}{2a^3}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C$

33. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx = \sqrt{a^2-x^2}-a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C$

34. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{a}+C$

含有$\sqrt{x^2\pm a^2}$的积分

35. $\int \sqrt{x^2\pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$

36. $\int x\sqrt{x^2\pm a^2}dx = \frac{1}{3}(x^2\pm a^2)^{3/2}+C$

37. $\int x^2\sqrt{x^2\pm a^2}dx = \frac{x}{8}(2x^2\pm a^2)\sqrt{x^2\pm a^2}-\frac{a^4}{8}\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$

38. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$

39. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \sqrt{x^2\pm a^2}+C$

40. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}|+C$

41. $\int (\sqrt{x^2 \pm a^2})^3 dx = \frac{x}{8}(2x^2 \pm 5a^2)\sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{3a^4}{8}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|+C$

42. $\int \frac{dx}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}} = \pm \frac{x}{a^2\sqrt{x^2 \pm a^2}}+C$

43. $\int \frac{x dx}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}+C$

44. $\int \frac{x^2 dx}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}+\ln|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}|+C$

45. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \mp \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{a^2 x}+C$

46. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{2a^2x^2}+\frac{1}{2a^3}\ln\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{|x|}+C$

47. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{2a^2x^2}+\frac{1}{2a^3}\text{arc cos}\frac{a}{x}+C$

48. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}dx = \sqrt{x^2+a^2} - a\ln\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{|x|}+C$

49. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx = \sqrt{x^2-a^2} - a\,\text{arc cos}\frac{a}{x}+C$

50. $\int \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x}\ln|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}|+C$

51. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a}\ln\frac{|x|}{a+\sqrt{x^2+a^2}}+C$

52. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\text{arc cos}\frac{a}{x}+C$

含有 $a+bx+cx^2$ 的积分

53. $\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\text{arc tg}\frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C$

当 $b^2 < 4ac$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln \left| \frac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}} \right| + C$$

当 $b^2 > 4ac$

54. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln |\, 2cx+b+2\sqrt{c(a+bx+cx^2)}\,| + C$$

当 $c > 0$

$$= -\frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{2cx+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + C$$

当 $c < 0$，$b^2 > 4ac$

55. $$\int \sqrt{a+bx+cx^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2cx+b}{4c} \sqrt{a+bx+cx^2} + \frac{4ac-b^2}{8a} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

56. $$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{c} \sqrt{a+bx+cx^2} - \frac{b}{2c} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

含有三角函数的积分

57. $$\int \sin^2 ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}(ax - \sin ax \cos ax) + C$$

58. $$\int \cos^2 ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}(ax + \sin ax \cos ax) + C$$

59. $$\int \sin^n x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x$$

60. $$\int \cos^n x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\,\mathrm{d}x$$

61. $$\int \mathrm{tg}\, x\,\mathrm{d}x = -\ln |\cos x| + C$$

62. $$\int \mathrm{ctg}\, x\,\mathrm{d}x = \ln |\sin x| + C$$

63. $$\int \mathrm{tg}^n x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \mathrm{tg}^{n-2} x\,\mathrm{d}x \quad (n > 1)$$

64. $$\int \mathrm{ctg}^n x\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{ctg}^{n-1} x}{n-1} - \int \mathrm{ctg}^{n-2} x\,\mathrm{d}x \quad (n > 1)$$

65. $$\int \sec x\,\mathrm{d}x = \ln |\sec x + \mathrm{tg}\, x| + C$$

66. $\int \csc x \mathrm{d}x = -\ln|\csc x + \operatorname{ctg} x| + C$

67. $\int \sec^n x \mathrm{d}x = \frac{\operatorname{tg} x \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x \mathrm{d}x \ (n > 1)$

68. $\int \csc^n x \mathrm{d}x = -\frac{\operatorname{ctg} x \csc^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} x \mathrm{d}x \ (n > 1)$

69. $\int \sec x \operatorname{tg} x \mathrm{d}x = \sec x + C$

70. $\int \csc x \operatorname{ctg} x \mathrm{d}x = -\csc x + C$

71. $\int \sin ax \sin bx \mathrm{d}x = -\frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + C \ (a \neq b)$

72. $\int \sin ax \cos bx \mathrm{d}x = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + C \ (a \neq b)$

73. $\int \cos ax \cos bx \mathrm{d}x = \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + C \ (a \neq b)$

74. $$\int \sin^m x \cos^n x \mathrm{d}x = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x \cos^{n-2} x \mathrm{d}x$$
$$= -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^n x \mathrm{d}x$$

75. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{a + b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + C \quad 当 a^2 > b^2$$
$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln\left|\frac{b + a\cos x + \sqrt{b^2 - a^2}\sin x}{a + b\cos x}\right| + C$$
当 $a^2 < b^2$

其他积分

76. $\int x e^x \mathrm{d}x = e^x(x-1) + C$

77. $\int x^n e^x \mathrm{d}x = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x \mathrm{d}x$

78. $\int \ln x \mathrm{d}x = x(\ln x - 1) + C$

79. $\int x^n \ln x \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln x - 1] + C$

80. $\int x \sin x \mathrm{d}x = \sin x - x\cos x + C$

81. $\int x\cos x\mathrm{d}x = \cos x + x\sin x + C$

82. $\int x^n \sin x\mathrm{d}x = - x^n \cos x + n\int x^{n-1}\cos x\mathrm{d}x$

83. $\int x^n \cos x\mathrm{d}x = x^n \sin x - n\int x^{n-1}\sin x\mathrm{d}x$

84. $\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C$

85. $\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} + C$

86. $\int \arcsin x\mathrm{d}x = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

87. $\int \mathrm{arc\ tg}\, x\mathrm{d}x = x\,\mathrm{arc\ tg}\, x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

88. $\int x^n \arcsin x\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\arcsin x - \int \dfrac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\right)$

89. $\int x^n\,\mathrm{arc\ tg}\, x\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\,\mathrm{arc\ tg}\, x - \int \dfrac{x^{n+1}}{1+x^2}\mathrm{d}x\right)$