

中国科学院指定考研参考书

第3版

# 高等数学导论

中国科学技术大学高等数学教研室 编

下册

GAODENG  
SHUXUE  
DAOLUN

中国科学技术大学出版社

## 中国科学院指定考研参考书目

责任编辑 林诗  
封面设计 刘俊霞

- ★《高等数学导论》(第3版)(上)、(下)
- ★《高等数学导论学习辅导》
- ★《线性代数》
- ★《复变函数》
- ★《数学物理方程》(第2版)
- ★《近世代数引论》
- ★《数值分析方法》
- ★《概率论与数理统计》(第2版)
- ★《力学》(基础物理教程丛书)
- ★《热学》(基础物理教程丛书)
- ★《电磁学》(基础物理教程丛书)
- ★《原子物理学》(基础物理教程丛书)
- ★《光学》(基础物理教程丛书)
- ★《应用光学》
- ★《流体力学》(修订版)
- ★《等离子体物理原理》
- ★《综合化学》——要点、例题、习题
- ★《无机化学》——要点、例题、习题(第2版)
- ★《物理化学》——概念辨析、解题方法
- ★《有机化学》(第2版)
- ★《有机化学》——习题与解答
- ★《高分子化学》
- ★《定量化学分析》
- ★《地球化学》
- ★《自动控制原理》
- ★《线性系统理论 and 设计》
- ★《信号与系统理论、方法和应用》
- ★《编译原理和技术》(第2版)
- ★《模拟集成电路》
- ★《十六位微型计算机原理、接口及其应用》(修订版)
- ★《微型计算机原理与接口技术》(第2版)
- ★《16位-32位微机组组成原理》
- ★《软件技术基础》
- ★《简明生物化学》
- ★《细胞生物学》
- ★《神经生理学》
- ★《现代生物学导论》
- ★《科技考古论丛》
- ★《自然辩证法原理》(第3版)

定价：30.00元

ISBN 978-7-312-02142-8



9 787312 021428 >

013/80=3

:3

2008

# 高等数学导论

第3版(下册)

中国科学技术大学高等数学教研室 编

中国科学技术大学出版社

2008·合肥



## 内 容 提 要

本“导论”是中国科学技术大学非数学专业通用的讲义,是在近 50 年的使用过程中,经过不断修订、充实而成的. 与同类书相比,其广度有所拓宽,论证定理、公式逻辑严谨,编排内容循序渐进,阐述概念联系实际,深入浅出. 为加深对概念、定理等的理解和掌握,书中编有丰富的例题,以及复习思考题、习题和总复习题.

本“导论”分上、下两册出版. 上册讲述单变量函数微积分与空间解析几何. 下册讲述多变量函数微积分、级数与常微分方程. 另配学习辅导一册.

本册内容包括多变量函数的微分学、多变量函数的积分学、场论、无穷级数、含参变量的积分、富里叶分析和线性微分方程,共 7 章.

本“导论”可作为理工科院校非数学专业或师范类院校数学专业的教材或教学参考书,也可供具有一定数学基础的读者自学.



## 第 3 版 序

本版按照中国科学技术大学改为四年制后对非数学专业学生应具备的数学基础的要求,结合第 2 版以来的教学实践和教学研究,在保留第 1 版和第 2 版特色的原则下修订而成.除对全书作全面的修订外,还对某些内容进行改写,使之更加精练.全书分上、下两册,教学约需 240 学时,内含习题课 20 学时.

广大读者与同行为本书的修订提供了很多宝贵的建议和意见.本次修订工作主要由杨孝先教授负责,并得到数学系领导陈发来、宋光天、梁进、张韵华教授的大力支持.对此,我们表示由衷的谢意.

因经验与水平的关系,本版一定还有错漏或不妥的地方,热忱期望读者与同行批评指正.又因时间紧迫,本次修订未经全部原编者审核,发现的有关问题由修订者负责.

编 者

2007 年 7 月



## 第 2 版序

《高等数学导论》第 1 版自 1988 年 9 月出版以来,已经历了 6 年的教学实践. 本次我们根据在教学过程中积累的第一手材料,并吸取了多次使用本书的同行们提出的极其宝贵的意见,将第 1 版的一些内容进行了修改. 另外,我们还根据当前国内外同类教材的发展动向加进了一些内容. 这样一来,就使本书的理论更系统、更完整. 第 2 版采用按章按节配备习题,并于每章末增加总复习题,以加强对基本概念和基础理论与方法的理解和提高读者的解题能力. 书末附有习题的答案.

参加第 2 版编写工作的有中国科学技术大学高等数学教研室的杨孝先、薛春华、陈秋桂,以及函数论教研室的顾新身等同志.

第 2 版由数学系副主任朱国城同志主审. 他认真地审阅了原稿,并提出了不少改进的意见. 此外,余红兵同志还提供了一些十分有意义的习题. 从而使本书在内容上、处理方法上以及总复习题上都增色许多. 对此编者们都表示衷心感谢.

限于编者水平,故教材中可能存在不妥之处,希望广大读者提出批评和指正.

编者

1994 年 1 月

## 第 1 版序

我怀着喜悦的心情,期待着“高等数学导论”的出版.

每当我和我的同事们在修订这部“导论”时,不免回忆起那些为“导论”的诞生和发展作出过卓越贡献的专家、教授和学者,他们的名字将永远铭刻在我们的心中.

“导论”的前身是“高等数学讲义”. 早在中国科学技术大学成立的初期,在原数学系系主任华罗庚教授,原高等数学教研室主任关肇直教授,副主任艾提教授及龚昇教授的亲切关怀和直接指导下,就已成立了以曾肯成教授为主笔的“讲义”编写小组. 他们根据当时高教部所颁发的高等数学大纲,结合我校的特点,陆续地编写出了供除数学系外其它各系通用的“高等数学讲义”. 这部讲义文笔生动,语言简练,深入浅出,通俗易懂,所以它一出现,就得到了外系师生的热烈欢迎和一致好评.

1977年,中国科学技术大学重新恢复了招生.“讲义”又先后经过了史济怀教授、徐澄波教授、蔡宗熹教授、钟立敏副教授、夏宗威副教授以及高等数学教研室许多教师的试教、修订、充实,逐渐形成了现在的“导论”.

这次出版的“导论”共分上、中、下三册和一本配套的习题集. 各册的内容分别为:单变量函数微积分;空间解析几何、多变量函数微积分及场论;级数与常微分方程.

尽管现在已经有了很多物理型的高等数学教程,但是“导论”仍有其独特之处.

由于高级中学的数学教材已经改革,函数的概念、极限论及微积分的算法作为教学内容之一已有比较详尽的叙述. 考虑到这些因素,“导论”已把现行教材的极限论补充得更加完善,使其不再

是中学极限论的简单重复,而是它的深化和发展.具体做法是:删去传统的初等函数一节,并以单调有界数列必有极限为公理建立起极限论.凡所涉及的定理如柯西收敛准则,闭区间连续函数的性质等都给以严格的论证.

高等数学的概念及方法都是从研究各种物质形态及各种运动形式的数量关系而产生的.例如,导数或积分的概念就是从速度、切线或曲边梯形的面积引入的;而第二型面积分,线积分各是从流体流过闭曲面的流量,力场对沿曲线运动的质点所作的功抽象而成的.“导论”除了注意从实际问题引入这些概念外,还对所涉及的各种定理及公式,例如勾通微分学与积分学的牛顿—莱布尼兹公式、高斯定理、重积分的计算公式等的物理背景或几何直观都作了说明,以消除微积分的神秘感.

在讲述微分方程时,一旦解已求得,“导论”又引导去讨论解的物理意义,以使读者认识到数学不仅是一些符号、公式的堆积,而且是解决物理、力学中所遇到的问题之有力武器.

关于场论的处理,“导论”则引进哈密顿算符 $\nabla$ 和外微分形式,这就使得梯度、散度、旋度及其各种公式统一于一体,便于记忆.

为了紧密配合“导论”,在“讲义”原有习题的基础上,又从历届研究生的试题,国内外高等数学竞赛题中精选了一批有意义的题目,进行分类、加工、充实,自成一习题集.

“导论”的其它特点在此就不一一赘述了.

正是由于“导论”保持了原有“讲义”的特色,而且还进行了切合实际的改革,所以它也受到兄弟院校师生的青睐.如有的院校采用这套教材进行教学,效果良好.因此“导论”的出版就是有价值的.

在使用这一教材的过程中,常庚哲、何琛、陶懋颀等教授;陈龙玄、杜锡录、顾新身、王天威、陈祖墀、张鄂堂、周永佩、张声雷、杨孝先、吴肇曼、李金平等副教授;缪柏其博士;曾宪立、尹业富、汪惠迪、陈群标、徐俊明、奚宏生等讲师,提出了许多建设性的意见,这

些意见我在定稿时已加以利用.

配套的习题集是由高等数学教研室陈秋桂讲师在校正了全部答案,并作了重新编排后完成的;我还要指出的是高等数学教研室的薛春华讲师,她也参加了“讲义”的修订工作.

由于水平所限,谬误与不妥之处实属难免,敬请读者批评指正.

陈登远

1987年10月于合肥

# 目 录

第 3 版序 .....	( I )
第 2 版序 .....	( III )
第 1 版序 .....	( V )
6 多变量函数的微分学 .....	( 1 )
6.1 多变量函数的极限与连续 .....	( 1 )
6.1.1 映射和多变量函数 .....	( 1 )
6.1.2 平面点集的一些概念 .....	( 4 )
6.1.3 平面点列极限与二元函数极限 .....	( 5 )
6.1.4 二元函数的连续性 .....	( 9 )
6.1.5 区域上定义的连续函数的性质 .....	( 11 )
* 6.1.6 $n$ 维欧氏空间, $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 映射的连续性 .....	( 12 )
* 6.1.7 连续函数性质定理的证明 .....	( 19 )
复习思考题 .....	( 21 )
习题 6.1 .....	( 22 )
6.2 多元函数的偏微商与全微分 .....	( 26 )
6.2.1 偏微商 .....	( 26 )
6.2.2 全微分 .....	( 28 )
6.2.3 高阶偏微商 .....	( 30 )
6.2.4 函数值的近似计算 .....	( 34 )
6.2.5 误差估计 .....	( 35 )
复习思考题 .....	( 37 )
习题 6.2 .....	( 37 )
6.3 复合函数的微分法 .....	( 41 )
6.3.1 复合函数微商的链式法则 .....	( 41 )

6.3.2	微分的运算,一阶全微分形式的不变性	(44)
6.3.3	复合函数的全微商,偏微商记号的用法	(46)
6.3.4	复合函数的高阶微商	(48)
	复习思考题	(51)
	习题 6.3	(51)
6.4	隐函数的微分法	(54)
6.4.1	多元方程所确定的隐函数及其微商	(54)
6.4.2	方程组所确定的隐函数组及其微商	(58)
	复习思考题	(62)
	习题 6.4	(62)
6.5	向量值函数的求导,空间曲线的切向量和 空间曲面的法向量	(65)
6.5.1	一元向量值函数及其微商	(65)
6.5.2	简单曲线与逐段光滑曲线,空间曲线的切向量	(67)
6.5.3	二元向量值函数的偏微商,空间曲面的法向量	(70)
6.5.4	隐式曲面的法向量,两隐式曲面交线的切向量	(73)
* 6.5.5	$\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的映射,雅可比矩阵,雅可比行列式及其性质	(77)
	复习思考题	(78)
	习题 6.5	(79)
6.6	多元函数的泰勒公式与极值	(81)
6.6.1	二元函数的泰勒公式	(81)
6.6.2	多元函数的极值	(85)
* 6.6.3	最小二乘法	(92)
6.6.4	条件极值	(95)
6.6.5	例	(99)
	复习思考题	(104)
	习题 6.6	(104)
	复习题	(106)

<b>7 多变量函数的积分学</b> .....	(109)
<b>7.1 二重积分</b> .....	(109)
7.1.1 二重积分概念的导出 .....	(109)
7.1.2 二重积分的定义与可积函数 .....	(111)
7.1.3 二重积分的性质 .....	(112)
7.1.4 直角坐标系下二重积分的累次积分法 .....	(113)
7.1.5 极坐标系下二重积分的累次积分法 .....	(122)
7.1.6 二重积分的一般曲线坐标代换 .....	(128)
7.1.7 广义二重积分 .....	(134)
复习思考题 .....	(138)
习题 7.1 .....	(138)
<b>7.2 三重积分</b> .....	(142)
7.2.1 三重积分的概念 .....	(142)
7.2.2 直角坐标系下三重积分的累次积分法 .....	(144)
7.2.3 柱坐标下三重积分的计算 .....	(150)
7.2.4 球坐标下三重积分的计算 .....	(152)
7.2.5 三重积分一般的变量代换 .....	(155)
复习思考题 .....	(157)
习题 7.2 .....	(158)
<b>7.3 曲线弧长与第一型曲线积分</b> .....	(161)
7.3.1 空间曲线的弧长 .....	(161)
7.3.2 第一型曲线积分 .....	(164)
复习思考题 .....	(168)
习题 7.3 .....	(168)
<b>7.4 曲面面积与第一型曲面积分</b> .....	(169)
7.4.1 曲面的面积 .....	(169)
7.4.2 第一型曲面积分 .....	(174)
复习思考题 .....	(177)
习题 7.4 .....	(177)

7.5	重积分、线积分与面积分的应用	(179)
7.5.1	重心与转动惯量	(179)
7.5.2	物体的引力	(185)
	复习思考题	(188)
	习题 7.5	(188)
	复习题	(190)
8	场论	(193)
8.1	数量场的方向导数与梯度	(193)
8.1.1	场的概念	(193)
8.1.2	数量场的方向微商	(194)
8.1.3	梯度	(196)
	复习思考题	(201)
	习题 8.1	(201)
8.2	向量场的通量与散度	(202)
8.2.1	双侧曲面及其定侧	(202)
8.2.2	向量场的通量	(206)
8.2.3	第二型曲面积分	(210)
8.2.4	散度	(216)
8.2.5	高斯定理	(217)
	复习思考题	(224)
	习题 8.2	(224)
8.3	向量场的环量与旋度	(228)
8.3.1	向量场沿有向曲线的积分及其计算	(228)
8.3.2	第二型曲线积分	(230)
8.3.3	环量与旋度的概念	(236)
8.3.4	格林定理与斯托克斯定理	(238)
8.3.5	旋度的计算	(247)
	复习思考题	(250)
	习题 8.3	(250)

8.4	保守场和无源场	(254)
8.4.1	保守场和势函数	(255)
8.4.2	无源场与向量势	(263)
	复习思考题	(268)
	习题 8.4	(269)
8.5	哈密顿算符及其运算公式	(271)
8.5.1	算符 $\nabla$ 作用在一个场上的运算	(272)
8.5.2	算符 $\nabla$ 作用在两个场乘积上的运算	(273)
8.5.3	高斯公式与斯托克斯公式的其它形式	(276)
	习题 8.5	(277)
8.6	外微分形式	(279)
8.6.1	外微分形式的外积	(279)
8.6.2	外微分形式的外微分	(281)
8.6.3	一般的斯托克斯定理	(283)
	习题 8.6	(284)
8.7	梯度、散度与旋度在正交曲线坐标系下的表达式	(285)
8.7.1	曲线坐标的概念	(285)
8.7.2	梯度的表达式	(288)
8.7.3	散度的表达式	(289)
8.7.4	旋度的表达式	(291)
	习题 8.7	(293)
	复习题	(294)
9	无穷级数	(296)
9.1	数项级数	(296)
9.1.1	无穷级数的基本概念	(296)
9.1.2	正项级数	(300)
9.1.3	交错级数	(309)
9.1.4	级数收敛的一般判别法	(311)

9.1.5	绝对收敛与条件收敛	(314)
	复习思考题	(321)
	习题 9.1	(321)
9.2	函数项级数	(323)
9.2.1	函数项级数的收敛概念	(323)
9.2.2	函数项级数的一致收敛性及判别法	(325)
9.2.3	一致收敛级数的性质	(333)
	复习思考题	(337)
	习题 9.2	(338)
9.3	幂级数与泰勒展开式	(339)
9.3.1	幂级数的收敛半径	(339)
9.3.2	幂级数的性质	(343)
9.3.3	函数的泰勒展开式	(347)
9.3.4	初等函数的泰勒展开式	(350)
9.3.5	幂级数的运算	(353)
	复习思考题	(355)
	习题 9.3	(355)
9.4	级数的应用	(356)
9.4.1	幂级数应用于近似计算	(356)
9.4.2	司特林公式	(358)
9.4.3	连续函数的多项式逼近	(362)
9.4.4	隐函数存在定理	(367)
	习题 9.4	(371)
	复习题	(372)
<b>10</b>	<b>含参变量的积分</b>	<b>(375)</b>
10.1	广义积分的收敛性判别	(375)
10.1.1	无穷区间积分的收敛判别法	(375)
10.1.2	收敛性的精细判别法	(380)
10.1.3	无界函数积分的收敛判别法	(386)

复习思考题 .....	(388)
习题 10.1 .....	(389)
10.2 含参变量的常义积分.....	(390)
10.2.1 含参变量的常义积分的性质 .....	(390)
10.2.2 积分限依赖于参变量的积分的性质 .....	(394)
习题 10.2 .....	(397)
10.3 含参变量的广义积分.....	(398)
10.3.1 积分的一致收敛概念 .....	(398)
10.3.2 一致收敛积分的性质 .....	(402)
10.3.3 几个重要的积分 .....	(409)
习题 10.3 .....	(413)
10.4 欧拉积分.....	(415)
10.4.1 $\Gamma$ 函数的性质 .....	(415)
10.4.2 B 函数的性质 .....	(417)
习题 10.4 .....	(422)
复习题.....	(423)
<b>11 富里叶分析</b> .....	(425)
11.1 周期函数的富里叶级数.....	(425)
11.1.1 周期函数、三角函数的正交性 .....	(426)
11.1.2 富里叶级数 .....	(427)
11.1.3 偶函数与奇函数的富里叶级数 .....	(430)
11.1.4 任意周期的情形 .....	(433)
11.1.5 有限区间上的函数的富里叶级数 .....	(436)
11.1.6 富里叶级数的复数形式 .....	(442)
11.1.7 贝塞尔不等式 .....	(444)
11.1.8 富里叶级数的收敛性 .....	(447)
复习思考题 .....	(454)
习题 11.1 .....	(455)
11.2 广义富里叶级数.....	(457)

11.2.1	么正函数系	(457)
11.2.2	广义富里叶级数及平方平均收敛	(460)
	复习思考题	(463)
	习题 11.2	(463)
11.3	富里叶变换	(464)
11.3.1	富里叶积分	(464)
11.3.2	富里叶变换	(467)
11.3.3	富里叶变换的性质	(471)
	复习思考题	(475)
	习题 11.3	(475)
	复习题	(476)
<b>12</b>	<b>线性微分方程</b>	(478)
12.1	微分方程解的存在性与唯一性定理	(478)
12.1.1	皮卡(Picard)逐次逼近法,微分方程解的存在性 与唯一性定理	(478)
12.1.2	欧拉(Euler)折线法	(485)
12.1.3	解的延拓	(486)
12.1.4	解对初值的连续性与可微性	(488)
	习题 12.1	(490)
12.2	二阶线性微分方程的一般理论	(491)
12.2.1	线性齐次方程解的结构	(492)
12.2.2	线性非齐次方程解的结构	(500)
12.2.3	应用幂级数求解方程	(503)
	习题 12.2	(509)
12.3	二阶常系数线性微分方程	(510)
12.3.1	常系数线性齐次方程	(510)
12.3.2	常系数线性非齐次方程	(512)
12.3.3	欧拉(Euler)方程	(517)
	习题 12.3	(519)

12.4	质点的振动	(521)
12.4.1	自由简谐振动	(521)
12.4.2	自由阻尼振动	(522)
12.4.3	无阻尼的强迫振动	(524)
12.4.4	有阻尼的强迫振动	(526)
	习题 12.4	(528)
12.5	$n$ 阶线性微分方程	(529)
12.5.1	$n$ 阶线性方程解的结构	(529)
12.5.2	$n$ 阶常系数线性方程的求解	(530)
	习题 12.5	(532)
12.6	微分方程组	(533)
12.6.1	一般概念	(533)
12.6.2	消元升阶法	(537)
12.6.3	第一积分法	(543)
12.6.4	线性方程组解的结构	(549)
12.6.5	代数求解法	(551)
	习题 12.6	(559)
	<b>习题参考答案</b>	<b>(561)</b>

## 6 多变量函数的微分学

### 6.1 多变量函数的极限与连续

#### 6.1.1 映射和多变量函数

我们已经学过(单值)映射的概念. 所谓映射  $f: D \rightarrow B$  是指这样的一种对应关系: 对于集合  $D$  中的每一个元素  $x$ , 在集合  $B$  中都有且仅有一个元素  $y$  与之对应. 称  $D$  为映射  $f$  的定义域, 常用记号  $\mathcal{D}(f)$  来表示; 用表达式  $y=f(x)$  来表示映射  $f$  的对应关系; 并称集合  $B$  的子集

$$f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$$

为映射  $f$  的值域, 值域还常用记号  $\mathcal{R}(f)$  来表示. 在关系式  $y=f(x)$  中, 称  $y$  为  $x$  (在映射  $f$  下) 的象, 称  $x$  为  $y$  的(一个)原象. 一般, 一个象点可以有两个或两个以上的原象, 即对于值域中的元素  $y$ , 集合

$$f^{-1}(y) = \{x \mid f(x) = y, x \in D\}$$

未必是独点集. 如果在映射  $f$  下每个象点都只有一个原象, 则称  $f$  是可逆的, 这时对于任意  $y \in \mathcal{R}(f)$ ,  $f^{-1}(y)$  都是独点集, 于是关系式  $x=f^{-1}(y)$  确定了一个从  $\mathcal{R}(f)$  到  $\mathcal{D}(f)$  的映射, 称为  $f$  的逆映射. 易证, 一个映射是可逆映射的充要条件是任意两个不同元素的象是不同的(证明留作习题).

到目前为止, 我们遇到过的映射类型已经不少了. 例如一元函数是某实数集到实数的映射, 向量的加法及向量的向量积都是两上向量的有序组到向量的映射, 而向量的数量积则是两个向量的

有序组到数的映射. 此外, 函数  $x(t)$  在闭区间  $[a, b]$  上的定积分可看成是闭区间上可积函数到数的映射, 其定义域是

$$\{x \mid x = x(t), x(t) \text{ 在 } [a, b] \text{ 可积}\},$$

我们称这种从抽象的(函数)集合到数的映射为泛函. 求导运算也可以看成是一种映射, 例如运算  $\frac{d}{dt}$ , 它的定义域是

$$\{x \mid x = x(t), \text{ 在 } x(t) \text{ 的定义域内至少有一点 } t_0, \text{ 使得 } x'(t_0) \text{ 存在}\},$$

映射的关系式是

$$\frac{d}{dt}x = x'(t),$$

其象  $x'(t)$  也是函数,  $x'(t)$  的定义域是  $x(t)$  的可微点集, 这种从抽象的(函数)集合到抽象的(函数)集合的映射称为算子.

在实际中我们还常会遇到这样的对应关系: 一个量的数值是由多个变量的一组值来确定的. 例如向量  $r$  的模

$$|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

是由它的横、纵、立坐标  $x, y$  和  $z$  的值来确定的; 两质点间的引力大小

$$f = \frac{GMm}{r^2}$$

是由两质点的质量  $M, m$  和它们间的距离  $r$  所确定的; 椭圆抛物面上点的立坐标

$$z = ax^2 + by^2$$

是由它的横坐标  $x$  和纵坐标  $y$  所确定的; 某学生学了  $n$  门课程, 设第  $i$  门课程的学分为  $m_i$ , 成绩为  $x_i$  (百分制,  $i=1, 2, \dots, n$ ), 那么该生的平均成绩(加权平均值)

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

是由该生各门课的成绩  $x_1, x_2, \dots, x_n$  所确定的. 这类对应关系也称为函数关系, 由此我们引进多元函数的概念.

**定义** 设在某一变化过程中存在  $n+1$  个变量  $y, x_1, x_2, \dots, x_n$ , 如果依照一定的规律  $f$ , 使对于变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  在其变化范围内的每一组值, 都有变量  $y$  的一个确定的值与之对应, 则称变量  $y$  是变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的  $n$  元函数, 记作

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

称  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为自变量,  $y$  为因变量, 并称自变量的变化范围为函数的定义域.

由定义可见,  $n$  元函数就是从以  $n$  个实数的有序组为元素的集合到实数的映射.

当  $n \geq 2$  时, 因为  $n$  元函数的自变量有多个 ( $n$  个), 所以称为多变量函数.

**例 表达式**

$$u = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$$

给出了一个三元函数, 它的定义域是坐标满足不等式  $x^2 + y^2 + z^2 < 1$  的点的全体, 也即是以原点为心的单位球面的内部, 而  $n$  元函数

$$y = \sqrt{r^2 - (x_1 - a_1)^2 - (x_2 - a_2)^2 - \dots - (x_n - a_n)^2}$$

的定义域是由不等式

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 \leq r^2$$

所确定的, 如果把  $x_1, x_2, \dots, x_n$  看成“ $n$  维空间”中的点的坐标, 那么上面函数的定义域可以看成是  $n$  维空间中以点  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  为中心,  $r$  为半径的(超)球体(含超球面  $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 = r^2$  上的全部点).

下面我们将用较大的篇幅来讨论二元函数, 其原因有二: 一是二元函数比较简单, 而且一般  $n$  元函数的讨论方法与主要结论都与二元函数相类同; 二是二元函数有比较直观的几何意义. 设  $z = f(x, y)$  是定义在集合  $D$  上的二元函数, 当点  $(x, y)$  在  $D$  中变化时, 以  $(x, y, f(x, y))$  为坐标的点(一般)就在空间中描出一张曲

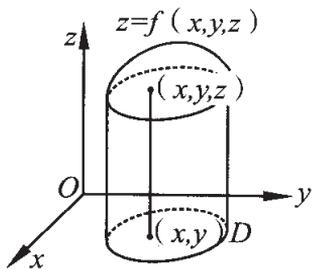


图 6.1

面,我们称这张曲面,即点集

$$G = \{(x, y, z) \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$

为函数  $z = f(x, y)$  的图形(图 6.1).

### 6.1.2 平面点集的一些概念

二元函数的定义域是以两个数的有序组为元素的一个集合,在平面上取定一个直角坐标系后,两个数的有序组与平面上的点一一对应.因此,二元函数的定义域可看成平面上的一个点集.

平面上两点  $M_1(x_1, y_1)$ 、 $M_2(x_2, y_2)$  间的远近程度用两点间的距离来表示,它是许多数学概念的基础,为便于这些概念推广到一般的“距离空间”中去,我们引进记号  $\rho(M_1, M_2)$ ,用  $\rho(M_1, M_2)$  表示  $M_1$  与  $M_2$  的距离,在平面上,

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

设  $\delta > 0$ ,我们称平面上以点  $M_0$  为圆心,  $\delta$  为半径的圆的内部为点  $M_0$  的  $\delta$  邻域,记作  $O(M_0, \delta)$ ,即

$$O(M_0, \delta) = \{M \mid \rho(M, M_0) < \delta, M \text{ 在平面上}\}.$$

设  $E$  是一个平面点集,如果存在一个正数  $L$ ,使得  $E \subset O(0, L)$ ,则称  $E$  是有界点集.

平面上任意给定一个点集  $E$  之后,就可以利用邻域的概念,将平面上的点分成三类.设  $M$  是平面上的任意一点,如果存在  $\delta > 0$ ,使得  $O(M, \delta) \subset E$ ,则称  $M$  为集  $E$  的内点;如果存在  $\delta > 0$ ,使得  $O(M, \delta) \cap E = \emptyset$ ,则  $M$  的某  $\delta$  邻域内不含有  $E$  的点,则称  $M$  为  $E$  的外点;如果  $M$  既不是  $E$  的内点,又不是  $E$  的外点,则称  $M$  是  $E$  的边界点(图 6.2).若  $M$  是  $E$  的边界点,则对于任意的  $\delta > 0$ ,因  $M$  不是内点,所以  $O(M, \delta)$  中含有非  $E$  的点,又因  $M$  不是外点,所以  $O(M, \delta)$  中必含有  $E$  的点;反过来,若  $M$  的任意  $\delta$  邻域中都同时含有  $E$  和非  $E$  的点,则  $M$  必不是  $E$  的内点,也不是  $E$  的外点,即  $M$

必是  $E$  的边界点. 因此,  $M$  是  $E$  的边界点的充要条件是  $M$  的任意  $\delta$  邻域中必同时含有  $E$  和非  $E$  的点.

现在来讨论  $E$  和  $E$  的余集的边界点之间的关系. 因为  $E$  的内点一定是  $E$  的余集的外点, 而  $E$  的外点必是  $E$  的余集的内点, 所以  $E$  的余集的边界点一定是  $E$  的边界点, 另外, 点集  $E$  总可看成它的余集之余集, 故  $E$  的边界点也一定是  $E$  的余集的边界点. 这样, 我们就证明了任一点集和它的余集有公共的边界点集.

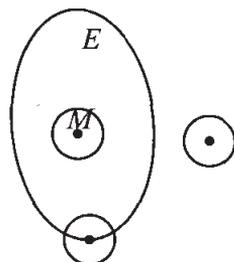


图 6.2

若点集  $G$  中的点都是  $G$  的内点, 则称  $G$  为开集. 若点集  $F$  的边界点都是  $F$  中的点, 则称  $F$

为闭集. 利用点集和其余集有公共的边界点集的事实, 容易弄清开集与闭集间的联系. 设  $G$  是开集, 则  $G$  只含有内点, 言下之意就是  $G$  不含有任何边界点, 所以  $G$  的余集必含有它自身的全部边界点, 从而开集( $G$ )的余集必是闭集; 反过来, 设  $F$  是闭集, 则  $F$  含有其全部的边界点, 从而  $F$  的余集不含有任何边界点, 言下之意就是  $F$  的余集只含有它的内点, 所以闭集( $F$ )的余集必是开集.

若  $G$  是开集, 且对于  $G$  中的任意两点, 都存在一条完全属于  $G$  的折线, 把这两点连接起来, 则称  $G$  是一个开区域或连通的开集, 或简称为区域. 一个开区域与它的边界点集之并集称为闭区域. 易见, 闭区域是闭集.

### 6.1.3 平面点列极限与二元函数极限

**定义 1** 设  $\{M_n\}$  是平面点列, 如果存在一点  $M_0$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} (M_n, M_0) = 0$ , 则称  $\{M_n\}$  是收敛的, 并称  $M_0$  是点列  $\{M_n\}$  的极限, 记作  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M_0$ .

在平面直角坐标系下, 若记  $M_n$  的坐标为  $(x_n, y_n)$ , 记  $M_0$  的坐标为  $(x_0, y_0)$ , 显然有

$$\begin{aligned} \begin{matrix} |x_n - x_0| \\ |y_n - y_0| \end{matrix} &\leq \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = \rho(M_n, M_0) \\ &\leq |x_n - x_0| + |y_n - y_0| \end{aligned} \quad (*)$$

由此易得：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M_0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0,$$

后者称为按坐标收敛,这就是说,平面点列收敛的充要条件是它按坐标收敛.

类似于基本数列(柯西数列),可定义平面上的基本点列如下:

**定义 2** 设  $\{M_n\}$  是平面点列,如果对于任意的  $\epsilon > 0$ ,存在  $N$ ,当  $n, m > N$  时就有  $\rho(M_n, M_m) < \epsilon$ ,则称  $\{M_n\}$  为基本点列或柯西点列.

利用不等式(\*)易证以下定理:

**定理 1** (完备性)平面点列  $\{M_n\}$  收敛的充要条件是:该点列是基本点列.

**定理 2** (列紧性)有界的平面点列必含有收敛子列.

我们以证明定理 2 为例,来说明(\*)式的用法. 设  $\{M_n\}$  是有界点列,则存在  $L$ ,使得  $\rho(0, M_n) < L$ ,即

$$\sqrt{x_n^2 + y_n^2} < L,$$

利用(\*)式左半,得  $|x_n| < L$  和  $|y_n| < L$ ,利用实数的列紧性可知,在有界数列  $\{x_n\}$  中,存在子列  $\{x_{n_i}\}$ ,使得  $\{x_{n_i}\}$  收敛. 由于  $|y_n| < L$ ,所以更有  $|y_{n_i}| < L$ ,利用实数的列紧性,在  $\{y_{n_i}\}$  中可取出收敛子列  $\{y_{m_i}\}$ ,因  $\{m_i\}$  是  $\{n_i\}$  的子列,故  $\{x_{m_i}\}$  是  $\{x_{n_i}\}$  的子列,从而  $\{x_{m_i}\}$  也是收敛的. 记  $\{x_{m_i}\}$  和  $\{y_{m_i}\}$  的极限分别为  $x_0$  和  $y_0$ ,则

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |x_{m_i} - x_0| = \lim_{i \rightarrow \infty} |y_{m_i} - y_0| = 0,$$

利用(\*)式右半得  $\lim_{i \rightarrow \infty} \rho(M_{m_i}, M_0) = 0$ ,即  $\{M_n\}$  的子列  $\{M_{m_i}\}$  收敛.

类似于一元函数的极限过程  $x \rightarrow x_0$ ,二元函数的极限过程  $M \rightarrow M_0$  的意义应当是  $\rho(M, M_0) > 0$  且  $\rho(M, M_0)$  无限变小的过程,类似于一元函数的单侧极限,在定义二元函数当  $M \rightarrow M_0$  的极限

时,我们也可以不必假定二元函数在整个  $M_0$  的某去心邻域内都有定义,但必须保证在  $M_0$  的任意去心  $\delta$  邻域内,都含有  $\mathcal{D}(f)$  中的点,为此,我们引进聚点的概念:

**定义 3** 设  $D$  是平面点集,  $M_0$  是平面上的一点. 如果对于任意的  $\delta > 0$ ,  $M_0$  的  $\delta$  邻域内总含有不等于  $M_0$  的  $D$  中的点,即  $(O(M_0, \delta) - \{M_0\}) \cap D \neq \emptyset$  (任意  $\delta > 0$ ), 则称  $M_0$  为  $D$  的一个聚点或极限点.

例如非空开集的内点和边界点都是它的聚点,闭区域的任意一点都是这个闭区域的聚点.

**定义 4** 设  $D$  是二元函数  $f(M)$  的定义域,  $M_0$  是  $D$  的一个聚点,如果存在数  $a$ ,使得对于任意的  $\epsilon > 0$ ,都存在  $\delta > 0$ ,当  $0 < \rho(M, M_0) < \delta$  且  $M \in D$  时,就有

$$|f(M) - a| < \epsilon$$

成立,则称函数  $f(M)$  当  $M$  趋于  $M_0$  时是收敛的,并称  $a$  为当  $M$  趋于  $M_0$  时  $f(M)$  的极限,记作

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = a.$$

在直角坐标系下,记  $M, M_0$  的坐标分别为  $(x, y)$  和  $(x_0, y_0)$ ,那么以上极限还可以写成

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = a \quad \text{或} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = a.$$

二元函数的上述极限又称为二重极限.

二重极限有十分形象的几何解释. 设  $f(M)$  当  $M$  趋于  $M_0$  时以  $a$  为极限,那么不论事先给定两张多么近的平行平面  $z = a - \epsilon$  和  $z = a + \epsilon$ ,必可找到一个以  $M_0$  为心,  $\delta$  为半径的圆,使得在这个去心邻域内  $z = f(x, y)$  的图形全部落在这两个平行平面之间.

以下阐述三个问题. 一是邻域问题. 设  $\delta > 0$ ,我们称集合

$$\{(x, y) \mid |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta\}$$

为点  $(x_0, y_0)$  的一个方形邻域,而称  $(x_0, y_0)$  的  $\delta$  邻域为圆形邻域,那么一点的任何圆形邻域内必套有方形邻域. 同时,一点的任

何一个方形邻域中也必套有圆形邻域,因此,在极限定义中的限制条件  $0 < \rho(M, M_0) < \delta$  可改为

$$|x - x_0| < \delta_1, |y - y_0| < \delta_1, (x, y) \neq (x_0, y_0),$$

其中  $\delta_1$  可取成  $\frac{1}{\sqrt{2}}\delta$ . 二是极限过程问题. 因为平面集合远比直线上的点集复杂,所以可以考虑多种极限过程下二元函数的极限问题,例如极限过程  $(x, y) \rightarrow (-\infty, +\infty)$ ,  $(x, y) \rightarrow (x_0, \infty)$  等等,此外,其极限值也可以是  $+\infty$ ,  $-\infty$  和  $\infty$  等形式. 例如,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow -\infty}} f(x, y) = \infty$$

的意义是,任给  $E > 0$ ,存在  $L > 0$ ,当  $x > L$ 、 $y < -L$  且  $(x, y) \in D(f)$  时,就有  $|f(x, y)| > E$  成立. 三是累次极限的问题. 设  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  附近除去直线  $x = x_0$  和  $y = y_0$  上的点外都有定义,我们先固定  $y \neq y_0$ ,考虑极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ ,如果对于充分接近于  $y_0$ ,但又不等于  $y_0$  的  $y$  值,以上极限都收敛,则可记其极限为  $\varphi(y)$ ,因而又可以考虑极限  $\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y)$ ,这就是累次极限

$$\lim_{y \rightarrow y_0} (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)),$$

同样还可考虑累次极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)).$$

关于累次极限是否可以交换次序的问题以及累次极限与二重极限的关系问题,在数学上也都有有一些专门的讨论,在这里就不再多说了.

例 试证

$$(1) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^2} = 0;$$

$$(2) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \text{ 不存在};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right) = 0.$$

证 利用不等式

$$2x^2|y| \leq x^4 + y^2$$

可得

$$\left| \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^2} \right| \leq \frac{1}{2} |y|,$$

显然  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{2} |y| = 0$ , 由极限的夹逼性质, (1) 得证. 为证(2), 我

们让  $(x, y)$  沿着抛物线  $y = kx^2$  接近  $(0, 0)$  点, 这时

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y = kx^2}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \cdot kx^2}{x^2 + (kx^2)^2} = \frac{k}{1+k^2},$$

当分别取  $k$  的值为  $-1$  和  $1$  时, 即让  $(x, y)$  沿着不同的抛物线接近于  $(0, 0)$  时, 其极限值分别为  $-\frac{1}{2}$  和  $\frac{1}{2}$  不等, 所以(2)得证. 至于(3), 因当  $x \neq 0$  时左端的内层极限为零, 所以再取外层极限仍为零, 同理可证(3)式中间的累次极限值也是零, (3)得证.

从上例的(2)和(3)可见, 二重极限不存在时, 其累次极限还可以是存在的.

由于二元函数和一元函数的极限概念相类似, 所以可将有关一元函数极限的性质搬到二元函数中来, 例如极限值的唯一性, 在某点收敛必在该点的一个邻域内有界, 夹逼性质及极限的四则运算等.

#### 6. 1. 4 二元函数的连续性

**定义** 设二元函数  $f(M)$  的定义域是  $D$ ,  $M_0 \in D$  且  $M_0$  是  $D$  的一个聚点, 如果

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$$

成立, 则称  $f(M)$  在  $M_0$  处连续.

如果我们把函数和极限都看成是运算, 那么  $f(M)$  在  $M_0$  处连续相当于函数运算和极限运算可以交换次序, 即

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(\lim_{M \rightarrow M_0} M).$$

此外,函数在一点连续还有以下性质:设  $M_0$  是函数  $f(M) + g(M)$  的定义域的内点,又设  $f(M)$  和  $g(M)$  都在  $M_0$  连续,那么  $f(M) + g(M)$ 、 $f(M) - g(M)$ 、 $f(M) \cdot g(M)$  也在  $M_0$  连续,如果还有条件  $g(M_0) \neq 0$ ,则  $f(M) \div g(M)$  也在  $M_0$  连续.关于复合函数的连续性,有以下定理:

**定理 1** 设  $(u_0, v_0)$  是  $f(u, v)$  的定义域的内点,  $f(u, v)$  在  $(u_0, v_0)$  连续,又设  $(x_0, y_0)$  是  $\varphi(x, y)$  和  $\psi(x, y)$  的连续点,且  $u_0 = \varphi(x_0, y_0)$ ,  $v_0 = \psi(x_0, y_0)$ ,则复合函数

$$f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$$

在  $(x_0, y_0)$  连续.

证明略.

如果一个函数在一个集合的每一点都连续,就可以说这个函数在此集合上连续,或说它为该集合上的连续函数.今后我们常会遇到开区域和闭区域上的连续函数.

**例 1**  $z = x$  和  $z = y$  作为二元函数,都是全平面上的连续函数,  $z = c$  (常数)也是全平面上的连续函数.上述函数通过有限次加、减、乘的运算可得二元多项式,所以二元多项式函数也在全平面上连续.两个二元多项式的商称为二元有理分式,二元有理分式的定义域是使分母不为零的点  $(x, y)$  的全体,有理分式函数在其定义域内是连续的.

**例 2** 函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{e^{x^2+y^2}-1} & \text{当 } x^2+y^2 < 1 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } x^2+y^2 = 1 \text{ 时} \\ c & \text{当 } x^2+y^2 > 1 \text{ 时} \end{cases}$$

在圆周  $x^2 + y^2 = 1$  以外的点处都是连续的.设  $(x_0, y_0)$  在圆周上,即  $x_0^2 + y_0^2 = 1$ ,我们来讨函数在  $(x_0, y_0)$  处的连续性.因为

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (x,y) \text{ 在圆内}}} f(x,y) = e^{-\infty} = 0,$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (x,y) \text{ 在圆周上}}} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} 0 = 0,$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (x,y) \text{ 在圆外}}} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} c = c,$$

所以当  $c=0$  时,有

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = 0 = f(x_0, y_0),$$

即  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  连续, 由  $(x_0, y_0)$  的任意性, 当  $c=0$  时,  $f(x, y)$  在圆周上连续, 进而有, 当  $c=0$  时,  $f(x, y)$  在全平面连续.

当  $c \neq 0$  时,  $f(x, y)$  在圆周上每一点都不连续. 但是我们仍可以说  $f(x, y)$  是圆内或圆外的连续函数, 此外, 因

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ x^2+y^2 \leq 1}} f(x,y) = 0 = f(x_0, y_0) \quad (\text{当 } x_0^2 + y_0^2 = 1 \text{ 时}),$$

我们还说  $f(x, y)$  是闭区域  $x^2 + y^2 \leq 1$  上的连续函数(参看 6. 1. 6 定义 5).

### 6. 1. 5 区域上定义的连续函数的性质

与一元连续函数一样, 二元连续函数也有零值定理和最大值定理等一些性质, 现分别叙述如下:

**定理 1** 设  $D$  是平面区域,  $f(M)$  在  $D$  连续,  $M_1$  与  $M_2$  是  $D$  内任意两点,  $f(M_1) \cdot f(M_2) < 0$ , 则必存在  $M_0 \in D$ , 使得  $f(M_0) = 0$ .

证明见 6. 1. 7.

**推论** 设  $D$  是平面区域,  $f(M)$  在  $D$  连续,  $M_1$  与  $M_2$  是  $D$  内任意两点,  $r$  是介于  $f(M_1)$  与  $f(M_2)$  之间的任意数, 则必存在  $M_0 \in D$ , 使得  $f(M_0) = r$ .

**证** 当  $r$  的值等于  $f(M_1)$  与  $f(M_2)$  之一时, 结论自明. 当  $r \neq f(M_1)$  且  $r \neq f(M_2)$  时, 只须对  $g(M) = f(M) - r$  用定理 1, 便可证明本推论.

**定理 2** 设  $D$  是平面上的有界闭区域,  $f(M)$  在  $D$  连续, 则必存在  $M_1 \in D$  和  $M_2 \in D$ , 使得对  $D$  中的任意点  $M$ , 都有

$$f(M_1) \leq f(M) \leq f(M_2).$$

我们分别称  $f(M_1)$  和  $f(M_2)$  为函数在  $D$  上的最小值和最大值.

证明见 6.1.7.

**定义** 设  $f(M)$  在平面点集  $E$  上有定义, 如果对于任意的  $\epsilon > 0$ , 都存在与  $M$  无关的  $\delta > 0$ , 使得当  $M_1, M_2$  都属于  $E$  且  $\rho(M_1, M_2) < \delta$  时, 就有

$$|f(M_1) - f(M_2)| < \epsilon$$

成立, 则称函数  $f(M)$  在集合  $E$  上一致连续.

可以证明, 集合上一致连续函数必在该集上连续.

**定理 3** 有界闭区域上的连续函数必在该闭区域上一致连续.

证明见 6.1.7.

### \* 6.1.6 $n$ 维欧氏空间, $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 映射的连续性

在直角坐标系下, 平面和空间中的点或向量, 都可以用它的坐标来表示, 即用两个或三个实数的有序组来表示. 今推广到  $n$  个实数构成的有序组, 记

$$\mathbf{R}^n = \{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \mid \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \text{ 都是实数}\},$$

称  $\mathbf{R}^n$  为  $n$  维(实)空间. 这样, 通常空间就是  $\mathbf{R}^3$ . 当  $\mathbf{R}^3$  的元素  $(x, y, z)$  表示点时, 常写成大写英文字母, 如  $M = (x, y, z)$  等, 当  $\mathbf{R}^3$  中元素表示向量时, 常用粗体小写字母表示, 如  $\mathbf{r}, \mathbf{v}$  等, 如  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ,  $\mathbf{v} = (P, Q, R)$  等. 在  $\mathbf{R}^n$  中, 常用一个粗体小写字母表示一个元素, 如  $\mathbf{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ,  $\mathbf{y} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$  和  $\mathbf{z} = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$  等.  $\mathbf{R}^n$  中的元素也称为  $\mathbf{R}^n$  中的点, 同时也可以看成是一个( $n$  维)向量. 当把  $\mathbf{R}^n$  中的元素看成向量时, 类似于  $\mathbf{R}^3$ , 我们引进加法和数乘运算: 对任意两个向量  $\mathbf{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ,  $\mathbf{y} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ , 规定  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots, \xi_n + \eta_n)$  为  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{y}$  的加法运算, 对

任意向量  $x$  和任意的数  $c$ , 规定数乘运算  $cx = (c\xi_1, c\xi_2, \dots, c\xi_n)$ , 则在以上两种运算下,  $\mathbf{R}^n$  成为一个向量空间.

其次可把直角坐标系下  $\mathbf{R}^3$  中两点距离公式和向量的模的公式推广到  $\mathbf{R}^n$  中去. 设  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ,  $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$  为  $\mathbf{R}^n$  中任意两个元素, 称

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \eta_i)^2}$$

为  $x$  与  $y$  的距离, 称

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \xi_i^2}$$

为  $x$  的模. 显然

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

在空间中, 任意三点间的距离必满足三角不等式,  $\mathbf{R}^n$  中的距离是否也具备这个性质呢? 答案是肯定的. 为证明这件事, 我们需要下面的引理:

**引理(柯西不等式)** 设  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  为  $2n$  个实数, 则有

$$\left| \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \xi_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n \eta_i^2},$$

且式中等号成立的充要条件是数组  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  与数组  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  成比例, 即存在不全为零的常数  $\lambda$  和  $\mu$ , 使得等式  $\lambda \xi_i = \mu \eta_i$  对  $i = 1, 2, \dots, n$  同时成立.

**证** 令  $\mu = \sqrt{\sum_{i=1}^n \xi_i^2}$ ,  $\lambda = \sqrt{\sum_{i=1}^n \eta_i^2}$ , 我们先对  $\lambda$  和  $\mu$  的值进行讨论. 由于它们都是非负的, 所以只可能有以下两种情况: 或者  $\lambda$  和  $\mu$  都是正数, 或者  $\lambda$  和  $\mu$  中至少有一个为零.

先设  $\lambda = 0$ , 由  $\lambda$  的定义式得  $\eta_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ . 这时显然柯西不等式两边都是零值, 因而柯西不等式中等号成立; 显然还有  $0 \cdot \xi_i = 1 \cdot \eta_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , 即  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  与  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  成比

例. 同时, 当  $\mu = 0$  时柯西不等式取等号且  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  与  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  成比例. 这样, 我们证明了在  $\lambda$  和  $\mu$  中至少有一个为零的情况下, 不等式取等号且  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  与  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  成比例.

当  $\lambda$  和  $\mu$  都是正数时, 通过简单的计算可得

$$\sum_{i=1}^n (\lambda \xi_i - \mu \eta_i)^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 - 2\lambda\mu \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i + \mu^2 \sum_{i=1}^n \eta_i^2,$$

$$\sum_{i=1}^n (\lambda \xi_i + \mu \eta_i)^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 + 2\lambda\mu \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i + \mu^2 \sum_{i=1}^n \eta_i^2,$$

以上两式左端都非负, 故

$$\lambda^2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \mp 2\lambda\mu \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i + \mu^2 \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \geq 0,$$

$$\lambda^2 \mu^2 \mp 2\lambda\mu \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i + \mu^2 \lambda^2 \geq 0,$$

$$\pm \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i \leq \lambda\mu,$$

即

$$\left| \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \xi_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n \eta_i^2}.$$

这样, 在任何情况下, 柯西不等式都成立. 剩下还要证明不等式中取等号的充要条件. 当  $\lambda$  和  $\mu$  都为正数时, 由于上面的推理可逆,

故在这种情况下, 柯西不等式中等号成立的充要条件是  $\sum_{i=1}^n (\lambda \xi_i -$

$\mu \eta_i)^2$  和  $\sum_{i=1}^n (\lambda \xi_i + \mu \eta_i)^2$  之中至少有一个为零, 这等价于(这里用到

$\lambda$  和  $\mu$  都是正数的条件) 数组  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  与数组  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  成比例. 而在  $\lambda$  和  $\mu$  之中至少有一个为零时, 我们已经证明了柯西不等式取等号且数组  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  与数组  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  成比例. 因此, 不论在什么情况下, 柯西不等式取等号的充要条件是  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  与  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  成比例.

附注:所谓  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  与  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  成比例,用线性代数的说法,就是向量  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  与向量  $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$  线性相关. 两个向量线性相关,它们的方向必相同或相反,记  $\mu$  和  $\lambda$  分别为  $x$  和  $y$  的模,则  $\lambda x + \mu y$  和  $\lambda x - \mu y$  之中必有一个是零向量. 本引理的证明就是以计算  $\lambda x$  与  $\mu y$  的模的平方为出发点而作出的.

利用引理易得: **$\mathbf{R}^n$  中三角不等式成立.**事实上,设  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n), z = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$  为  $\mathbf{R}^n$  中的任意三个元素,由引理可得

$$-2 \sum_{i=1}^n (\xi_i - \zeta_i)(\eta_i - \zeta_i) \leq 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \zeta_i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (\eta_i - \zeta_i)^2},$$

上式两边同加  $\sum_{i=1}^n (\xi_i - \zeta_i)^2 + \sum_{i=1}^n (\eta_i - \zeta_i)^2$ , 整理可得

$$\sum_{i=1}^n (\xi_i - \eta_i)^2 \leq \left( \sqrt{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \zeta_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (\eta_i - \zeta_i)^2} \right)^2,$$

它等价于

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \eta_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \zeta_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (\eta_i - \zeta_i)^2},$$

即

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z).$$

引进了线性运算(加法和数乘)和距离后的集合  $\mathbf{R}^n$ , 称为  $n$  维欧氏空间, 或简称为  $n$  维空间.

我们知道, 极限是分析性质的核心, 连续、微分、积分都是用极限关系来定义的, 而距离又是定义极限的基础, 利用距离的概念, 可将一元函数的极限概念推广到  $n$  维空间中来, 不仅如此, 还易把这些概念推广到一般的“距离空间”中去, 科学技术的发展, 要求我们去研究和解决越来越多的各类距离空间中的有关问题, 所以我们尽管不作具体的讨论, 在这里引进距离空间的概念是有益的.

**定义 1** 设  $X$  是非空集合. 若对于  $X$  中的任意一对元素  $x$  和  $y$ , 都给定了一个实数  $\rho(x, y)$  与它们对应, 且这个对应关系满足以

下三个条件:

(1) 正定性,即对于  $X$  中的任意一对元素  $x$  和  $y$ , 都有  $\rho(x, y) \geq 0$ ; 又  $\rho(x, y) = 0$  当且仅当  $x = y$ ;

(2) 对称性,即对于  $X$  中的任意一对元素  $x$  和  $y$ , 都有  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ ;

(3) 三角不等式成立,即对于任意  $x, y, z \in X$ , 都有

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z),$$

则称  $\rho(x, y)$  为  $X$  上  $x$  与  $y$  的距离, 称  $X$  按照距离  $\rho$  构成一个距离空间(或度量空间), 记作  $(X, \rho)$ , 或简记作  $X$ , 并称  $X$  中的元素为点.

通过前面的讨论, 可得下面的定理:

定理 1 设

$\mathbf{R}^n = \{x \mid x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \text{ 都是实数}\}$ , 在  $\mathbf{R}^n$  中的任意两个元素  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  和  $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ , 定义  $\rho(x, y)$  如下:

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\eta_i - \xi_i)^2},$$

则  $(\mathbf{R}^n, \rho)$  构成一个距离空间. 常把  $(\mathbf{R}^n, \rho)$  仍简记为  $\mathbf{R}^n$ .

前面定义的  $n$  元函数, 就是  $\mathbf{R}^n$  中的子集到  $\mathbf{R}$  的映射, 而  $\mathbf{R}^n$  的子集到  $\mathbf{R}^m$  的映射, 将被称为  $n$  元  $m$  维向量值函数.

$\mathbf{R}^n$  中有了距离的概念后, 与平面点集一样, 可以平行地定义邻域, 有界集, 点集的内点、外点、边界点, 开集, 闭集等概念. 为给出区域的定义, 我们引进两点的直线的概念. 设  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  和  $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$  是  $\mathbf{R}^n$  中的任意两点, 称集合

$$\{z \mid z = (t\xi_1 + (1-t)\eta_1, t\xi_2 + (1-t)\eta_2, \dots, t\xi_n + (1-t)\eta_n), 0 \leq t \leq 1\}$$

为连接  $x$  和  $y$  的直线段. 有了线段的概念, 便可仿照 6.1.2, 写出开区域和闭区域的定义(作练习).

与平面点集一样, 我们来给出集合的聚点的定义, 设  $E$  是  $\mathbf{R}^n$

中的点集,  $x_0$  是  $\mathbf{R}^n$  中的一点, 如果对于任意的  $\delta > 0$ ,  $(O(x_0, \delta) - \{x_0\}) \cap E \neq \emptyset$ , 即  $x_0$  的任意  $\delta$  邻域中都含有不等于  $x_0$  的  $E$  中的点, 则称  $x_0$  是  $E$  的聚点或  $E$  的极限点. 由定义可知,  $x_0$  不是  $E$  的聚点的意义是, 存在  $\delta > 0$ , 使得  $(O(x_0, \delta) - \{x_0\}) \cap E = \emptyset$ . 从定义可得, 开集的内点和边界点都是开集的聚点; 闭区域的点都是它自己的聚点, 而且它没有其它的聚点; 有限集没有聚点. 如果  $x \in E$  且  $x$  不是  $E$  的聚点, 则称  $x$  是  $E$  的孤立点. 从聚点的定义还容易明白, 在  $\mathbf{R}^n$  中, 集合的内点必是它的聚点, 而外点必不是它的聚点, 至于边界点, 则还可以分成两类, 其一是集合的孤立点, 容易论证, 在  $\mathbf{R}^n$  中, 集合的边界点, 如果不是该集的孤立点, 那么必是它的聚点.

与平面点列的收敛定义一样, 可以规定  $\mathbf{R}^n$  中点列收敛的意义. 设  $\{x_m\}$  是  $\mathbf{R}^n$  中的点列, 如果存在  $x_0 \in \mathbf{R}^n$ , 使得  $\rho(x_m, x_0) \rightarrow 0 (m \rightarrow \infty)$ , 则称点列  $\{x_m\}$  是收敛的, 并记  $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x_0$ , 称  $x_0$  为  $\{x_m\}$  的极限.

设  $x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \dots, \xi_n^{(m)})$ ,  $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)})$ , 显然

$$\begin{aligned} |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(0)}| &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(0)})^2} = \rho(x_m, x_0) \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(0)}| \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (*) \end{aligned}$$

这相当于 6.1.3 中的 (\*) 式, 由此可得  $\mathbf{R}^n$  中点列收敛的充要条件是它按坐标收敛.

现在来给出柯西列的定义. 设  $\{x_m\}$  是  $\mathbf{R}^n$  中的点列, 如果对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 都存在  $N$ , 使得当  $i, j > N$  时就有  $\rho(x_i, x_j) < \varepsilon$ , 则称  $\{x_m\}$  为基本列或柯西列. 与平面的情形一样, 利用 (\*) 式可以证明以下定理:

**定理 2(完备性)**  $\mathbf{R}^n$  中点列收敛的充要条件是这个点列是基本列.

**定理 3(列紧性)**  $\mathbf{R}^n$  中的有界点列必含有收敛子列.

与 6.1.3 类似,可给出  $n$  元  $m$  维向量值函数的极限的定义和  
在一点连续的定义:

**定义 2** 设  $f:D \rightarrow \mathbf{R}^m, D \subset \mathbf{R}^n, y = f(x), x_0$  是  $f$  的定义域  
 $D$  的聚点,若存在  $a \in \mathbf{R}^m$ ,使得对于任意的  $\varepsilon > 0$ ,都存在  $\delta > 0$ ,当  
 $0 < \rho(x, x_0) < \delta$  且  $x \in D$  时,就有

$$\rho(f(x), a) < \varepsilon$$

成立,则称  $f(x)$  当  $x$  趋于  $x_0$  时是收敛的,称  $a$  是  $f(x)$  的极限,  
记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a.$$

**定义 3** 设  $f:D \rightarrow \mathbf{R}^m, D \subset \mathbf{R}^n, x_0 \in D$  且  $x_0$  是  $D$  的聚点,如  
果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  成立,则称  $f(x)$  在  $x_0$  连续.我们还约定,如果  
 $x_0$  是  $D$  的孤立点,就说  $f(x)$  在  $x_0$  连续.如果  $f(x)$  在  $D$  上处处连  
续,则称  $f(x)$  是连续的.

在许多问题中,常会遇到要扩大或缩小映射的定义域的问题,  
为此,我们引进映射的延拓和限制的概念.

**定义 4** 设  $f:D \rightarrow B$  是一个映射,  $P \subset D, \tilde{f}:P \rightarrow B$ ,且对于  
任意  $x \in P$ ,都有  $\tilde{f}(x) = f(x)$ ,则称映射  $\tilde{f}$  是映射  $f$  在  $P$  上的限  
制,而称映射  $f$  是映射  $\tilde{f}$  在  $D$  上的延拓,并记

$$\tilde{f} = f|_P.$$

有了映射的限制的概念,就可以给出一个映射在其定义域的  
子集上的连续性的定义:

**定义 5** 设  $f:D \rightarrow \mathbf{R}^m, D \subset \mathbf{R}^n, P$  是  $D$  的子集,如果  $f|_P$  是  
连续的,则称  $f$  在  $P$  上连续.

有了以上准备,我们可以叙述复合向量值函数的连续性的  
定理:

**定理 4** 设  $f:D \rightarrow \mathbf{R}^m, D \subset \mathbf{R}^n, g:G \rightarrow \mathbf{R}^n, G \subset \mathbf{R}^l$ ,且  $g(G) \subset$   
 $D$ . 如果  $g$  在  $x_0 (\in G)$  连续,  $f|_{g(G)}$  在  $y_0 = g(x_0)$  连续,则  $f(g(x))$   
在  $x_0$  连续.若  $G_1 \subset G, g$  在  $G_1$  连续,  $f$  在  $g(G_1)$  连续,则  $f(g(x))$

在  $G_1$  连续.

此外, 6.1.5 中的定理 1 和定理 2, 对  $n$  元函数仍然适用. 对于  $n$  元  $m$  维向量值函数, 可类似于 6.1.4, 引进一致连续的概念:

**定义 6** 设  $f(x)$  在  $E \subset \mathbf{R}^n$  上有定义,  $f(x)$  的值域是  $\mathbf{R}^m$  中的点集. 如果对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 都存在  $\delta > 0$ , 使得当  $x_1, x_2$  都属于  $E$  且  $\rho(x_1, x_2) < \delta$  时, 都有  $\rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$  成立, 则称  $f(x)$  在  $E$  上一致连续.

**定理 5** 设  $f$  是  $\mathbf{R}^n$  的某集合到  $\mathbf{R}^m$  的映射, 且  $f(x)$  在某有界闭区域上连续, 则  $f(x)$  在该闭区域上一致连续.

定理 5 中的“有界闭区域”可以改成“有界闭集”, 结论仍成立.

这些定理的证明与二元函数相应定理的证明类似, 这里从略.

#### \* 6.1.7 连续函数性质定理的证明

6.1.5 定理 1 的证明: 我们首先指出, 如果连接  $M_1$  和  $M_2$  的线段完全在  $D$  内, 则在连接线段上必存在一点  $M_0(x_0, y_0)$ , 使得  $f(x_0, y_0) = 0$ . 事实上, 线段  $M_1M_2$  上点  $M(x, y)$  满足参数方程

$$\begin{cases} x = tx_1 + (1-t)x_2 \\ y = ty_1 + (1-t)y_2 \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1),$$

所以二元函数  $f(M)$  在线段  $M_1M_2$  上的点  $M$  的值只依赖于参变量  $t$ . 记

$$\varphi(t) = f(tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2),$$

则  $\varphi(t)$  是闭区间  $[0, 1]$  上的连续函数, 且有

$$\varphi(0) = f(x_1, y_1), \varphi(1) = f(x_2, y_2), \varphi(0) \cdot \varphi(1) < 0.$$

由一元函数的零值定理可知, 存在  $t_0 \in (0, 1)$ , 使得  $\varphi(t_0) = 0$ . 记  $x_0 = t_0x_1 + (1-t_0)x_2, y_0 = t_0y_1 + (1-t_0)y_2$ , 则  $M_0(x_0, y_0)$  在线段  $M_1M_2$  上且  $f(x_0, y_0) = \varphi(t_0) = 0$ .

在一般情况下, 由区域的定义可知, 存在完全属于  $G$  的折线将  $M_1$  和  $M_2$  连接起来. 设此折线是  $P_0P_1 \cdots P_k, P_0 = M_1, P_k = M_2$ , 如

果在  $P_0, P_1, \dots, P_k$  中存在  $P_i$ , 使得  $f(P_i) = 0$ , 则定理结论已经成立; 如果  $f(P_i)$  全不为零, 因  $f(P_0)$  与  $f(P_k)$  异号 (其乘积等于  $f(M_1) \cdot f(M_2) < 0$ ), 所以必存在  $i, 1 \leq i \leq k$ , 使得  $f(P_{i-1}) \cdot f(P_i) < 0$ , 再利用上面已证明的结论可知, 在  $P_{i-1}P_i$  的连线上有一点  $M_0$ , 使  $f(M_0) = 0$ . 总之,  $f(M)$  必在  $D$  内达到零值.

为证明另外两个定理, 我们需要以下引理:

**引理** 设  $X$  是距离空间,  $F$  是  $X$  中的闭集, 点列  $\{M_n\} \subset F$ , 且在  $X$  中  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M_0$ , 则  $M_0 \in F$ .

**证** 因  $F$  是闭集, 故  $F^c = X - F$  是开集. 为证  $M_0 \in F$ , 只须证  $M_0 \notin F^c$ . 用反证法, 假设  $M_0 \in F^c$ , 由于  $F^c$  是开集, 故  $M_0$  是  $F^c$  的内点, 从而存在  $\delta > 0$ , 使得在  $M_0$  的  $\delta$  邻域  $O(M_0, \delta)$  内全是  $F^c$  的点, 因此  $O(M_0, \delta) \cap F = \emptyset$ . 另一方面,  $\{M_n\} \subset F$ , 且  $M_n \rightarrow M_0 (n \rightarrow \infty)$ , 故对以上的  $\delta > 0$ , 存在  $N$ , 当  $n > N$  时,  $\rho(M_n, M_0) < \delta$ , 即  $n > N$  时,  $M_n \in O(M_0, \delta)$ . 由  $\{M_n\} \subset F$  得知,  $O(M_0, \delta) \cap F \neq \emptyset$ , 这与  $O(M_0, \delta) \cap F = \emptyset$  相矛盾, 矛盾证明了  $M_0 \notin F^c$ , 从而  $M_0 \in F$ .

**6.2.5 中的定理 2 的证明:** 先证  $f(M)$  在闭区域  $G$  有界. 用反证法, 假设  $f(M)$  在  $G$  无界, 则对于任意的自然数  $k$ , 存在  $M_k \in G$ , 使得  $|f(M_k)| > k$ , 得到点列  $\{M_k\}$ . 因  $\{M_k\} \subset G$ ,  $G$  是有界的, 所以  $\{M_k\}$  有界. 由平面点集的列紧性可知, 在  $\{M_k\}$  中存在收敛子列  $\{M_{k_j}\}, M_{k_j} \rightarrow M_0 (j \rightarrow \infty)$ . 因  $G$  是闭集, 由引理,  $M_0 \in G$ , 从而有  $\lim_{j \rightarrow \infty} f(M_{k_j}) = f(M_0)$ . 但  $|f(M_{k_j})| > k_j$ , 从而  $\lim_{j \rightarrow \infty} f(M_{k_j}) = \infty$ , 矛盾. 矛盾证明了  $f(M)$  在  $G$  上有界. 我们再来证明  $f(M)$  在  $G$  上必达到最大值. 设  $L = \sup\{f(M), M \in G\}$ , 由于  $f(M)$  在  $G$  有界, 故  $L$  是一定数. 由上确界的性质知, 存在点列  $\{P_k\} \subset G$ , 使得  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(P_k) = L$ . 由于  $G$  有界, 从而  $\{P_k\}$  有界, 利用列紧性, 在  $\{P_k\}$  中存在收敛子列  $\{P_{k_j}\}, P_{k_j} \rightarrow M_1 (j \rightarrow \infty)$ , 因  $G$  是闭集, 由引理,  $M_1 \in G$ . 再利用  $f(M)$  在  $G$  连续, 得  $\lim_{j \rightarrow \infty} f(P_{k_j}) = f(M_1)$ . 由

$\lim_{k \rightarrow \infty} f(P_k) = L$  及极限的唯一性得  $f(M_1) = L$ . 这就是说  $f(M_1)$  是  $f(M)$  在  $G$  上的上确界, 即  $f(M)$  在  $M_1$  达到最大值. 同理可证  $f(M)$  必在  $G$  上达到最小值.

6.2.5 中的定理 3 的证明: 设  $f(M)$  在平面的有界闭区域  $G$  上连续, 要证  $f(M)$  在  $G$  上一致连续. 用反证法, 假设  $f(M)$  在  $G$  上不一致连续, 则必存在  $\epsilon_0 > 0$ , 存在  $M_k'$  和  $M_k''$ , 一方面,  $\rho(M_k', M_k'') < \delta_k = \frac{1}{k}$ , 另一方面,  $|f(M_k') - f(M_k'')| \geq \epsilon_0$ . 因  $\{M_k'\} \subset G$ ,  $G$  是有界的, 利用列紧性可知,  $\{M_k'\}$  中必含有收敛子列  $\{M_{k_j}'\}$ ,  $\{M_{k_j}'\}$  收敛到某点  $M_0$ , 由引理,  $M_0 \in G$ . 再由

$$\begin{aligned} 0 &\leq \rho(M_{k_j}'', M_0) \leq \rho(M_{k_j}'', M_{k_j}') + \rho(M_{k_j}', M_0) \\ &\leq \frac{1}{k_j} + \rho(M_{k_j}', M_0) \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

从而得

$$\lim_{j \rightarrow \infty} M_{k_j}'' = M_0$$

因  $f(M)$  在  $G$  连续,  $M_0 \in G$ , 所以  $f(M)$  在  $M_0$  连续. 由  $\lim_{j \rightarrow \infty} M_{k_j}' = M_0$ ,  $\lim_{j \rightarrow \infty} M_{k_j}'' = M_0$ ,  $\{M_{k_j}'\} \subset G$ ,  $\{M_{k_j}''\} \subset G$ , 得

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f(M_{k_j}') = f(M_0) = \lim_{j \rightarrow \infty} f(M_{k_j}''),$$

从而

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (f(M_{k_j}') - f(M_{k_j}'')) = 0,$$

这与

$$|f(M_{k_j}') - f(M_{k_j}'')| \geq \epsilon_0$$

相矛盾, 矛盾证明了  $f(M)$  在  $G$  上一致连续.

### 复习思考题

1. 什么是映射? 什么是映射的定义域和值域? 试列举所学过的映射的一些例子.

2. 什么是象点? 什么是象点的原象? 一个象点的原象是否可

以有多个?什么是可逆映射和逆映射?

3. 什么是平面点集的内点、外点和边界点?什么是开集、闭集、区域和闭区域?

4. 什么是多元函数?试比较它与一元函数的异同.

5. 试述二元函数在闭区域的内点和边界点处的极限与连续的定义.

6. 什么是平面的完备性和列紧性?空间是否仍具有这些性质?

7. 有界闭区域上连续函数具有哪些性质?无界区域上连续函数是否也一定能达到最大值?如不一定,试举例说明之.

8. 试述一致连续的定义.一致连续的函数是否必是连续函数?

### 习题 6.1

1. 证明一个映射是可逆映射的充要条件是任意两个不同元素的象是不同的.

2. 设

$$D = \{(r, \theta) \mid r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi\},$$

映射  $r: D \rightarrow R^2$  是由关系式

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad ((r, \theta) \in D)$$

所定义,试证这个映射是可逆的,并写出其逆映射的表达式.(提示:将映射的值域分片.)

3. 设  $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ , 求  $f(0, 1), f(1, 1), f(x, x), f(y, x), f\left(1, \frac{y}{x}\right), f(t, s)$ .

4. 设  $f\left(x + y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2 (x \neq 0)$ , 求  $f(x, y)$ .

5. 确定并画出以下函数的定义域,并指出它们是否是区域,

是否是闭区域:

$$(1) z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+y^2}; \quad (2) z = \sqrt{\sin \sqrt{x^2+y^2}};$$

$$(3) z = \frac{\sqrt{x^2+y^2+2x}}{\sqrt{2x-x^2-y^2}}; \quad (4) u = \arcsin \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z};$$

$$(5) u = \sqrt{2az - x^2 - y^2 - z^2} (a > 0);$$

$$(6) u = \ln(1 - x^2 - y^2 - z^2).$$

6. 作出下列函数的图形:

$$(1) z = 1 - x - y; \quad (2) z = x^2 + y^2;$$

$$(3) z = xy; \quad (4) z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

7. 设  $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ , 又  $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ , 求  $F(t) = f(\cos t, \sin t)$ .

8. 设  $f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{当 } y \geq x \\ 0, & \text{当 } y < x \end{cases}$ , 又  $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ , 求  $F(t) = f(\cos t, \sin t)$ .

9. 设  $z = f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{y}{x}$ , 又  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ , 试把  $z$  表为  $(r, \theta)$  的函数.

10. 设  $f(x, y) = x^y, \varphi(x, y) = x + y, \psi(x, y) = x - y$ , 求  $f[\varphi(x, y), \psi(x, y)], \varphi[f(x, y), \psi(x, y)], \psi[\varphi(x, y), f(x, y)]$ .

11. 证明: 对于函数  $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$ , 有  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ , 但  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$  不存在.

12. 证明: 对于函数  $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$ , 有  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$ , 但两个累次极限都不存在.

13. 计算下列累次极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}, \lim_{y \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{x^y}{1 + x^y}, \lim_{y \rightarrow 0^+} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^y}{1 + x^y};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi x}{2x + y}, \lim_{y \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi x}{2x + y};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{xy} \tan \frac{xy}{1 + xy}, \lim_{y \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{xy} \tan \frac{xy}{1 + xy}.$$

14. 判断下列各题是否有极限,若有极限,求出其极限:

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|};$$

$$(2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \frac{\sin xy}{x};$$

$$(3) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left( \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) x^2;$$

$$(4) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{x^2}{x+y}};$$

$$(5) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2};$$

$$(6) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4};$$

$$(7) \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2) e^{-(x+y)};$$

$$(8) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$(9) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy + 1} - 1};$$

$$(10) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{xy + 1} - 1}{x + y};$$

$$(11) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)x^2 y^2};$$

$$(12) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + xy)^{\frac{1}{x+y}}.$$

15. 若  $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$ ,问沿着怎样的方向  $\varphi (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ ,下列极限存在且有限?

$$(1) \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{e^{x^2 - y^2}};$$

$$(2) \lim_{\rho \rightarrow +\infty} e^{x^2 - y^2} \sin 2xy.$$

16. 求下列函数的不连续点:

$$(1) u = \begin{cases} \frac{xy}{x - y}, & x \neq y \text{ 时;} \\ 0, & x = y \text{ 时.} \end{cases}$$

$$(2) u = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y}, & y \neq 0 \text{ 时}; \\ 0, & y = 0 \text{ 时}. \end{cases}$$

17. 研究下列函数的连续性:

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{当 } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{当 } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x+y}, & \text{当 } x+y \neq 0; \\ 0, & \text{当 } x+y = 0. \end{cases}$$

18. 证明函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{若 } x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & \text{若 } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在点 $(0, 0)$ 处分别对每一个变量 $x$ 或 $y$ (当另一个变量的值固定时)是连续的,但对这两个变量总体来说是不连续的.

19. 证明函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{若 } x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & \text{若 } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在点 $(0, 0)$ 沿着过此点的每一射线

$$x = t \cos \alpha, y = t \sin \alpha (0 \leq t < +\infty),$$

连续,即 $\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = f(0, 0)$ . 但此函数在点 $(0, 0)$ 并不连续.

\* 20. 试证 $\mathbf{R}^n$ 中点集 $E$ 的边界点如果不是 $E$ 的孤立点,那么一定是 $E$ 的聚点.

\* 21. 设 $D \subset \mathbf{R}^n$ ,  $D$ 是有界闭集,  $f: D \rightarrow \mathbf{R}^m$ 在 $D$ 连续,则 $f$ 必在 $D$ 上达到最大值.

\* 22. 在21题的条件下证明 $f$ 在 $D$ 上一致连续.

## 6.2 多元函数的偏微商与全微分

### 6.2.1 偏微商

**定义** 设  $z = f(x, y)$  是一个二元函数,  $M_0 = (x_0, y_0)$  是它的定义域中的一个固定的内点, 如果极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

收敛, 则称二元函数  $f(x, y)$  在  $M_0$  处关于  $x$  的偏导数存在, 并称其极限值为函数  $f(x, y)$  在  $M_0$  处对  $x$  的偏导数或偏微商, 记作

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{M_0}, \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}, \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M_0}, \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}, f'_x(x_0, y_0), f'_x(M_0);$$

同样, 定义极限

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

为函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处对  $y$  的偏导数或偏微商, 记作

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)}, \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)}, f'_y(x_0, y_0).$$

如果一个二元函数, 在区域  $G$  的每一点处对  $x$  的偏导数都存在, 那么在  $G$  的每一点  $(x, y)$  处, 可得一个值  $f'_x(x, y)$ , 即得到一个二元函数  $f'_x(x, y)$ , 称它为函数  $f(x, y)$  在  $G$  内对  $x$  的偏导函数. 一般,

$$f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

其中左边函数  $f'_x(x, y)$  的定义域是

$$\left\{ (x, y) \left| \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \text{ 收敛} \right. \right\},$$

而它的函数值  $f'_x(x, y)$  就是等号右端的极限值. 同样可定义  $f(x, y)$  对  $y$  的偏导函数  $f'_y(x, y)$ :

$$f_y'(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

由定义可知,为求二元函数  $f(x, y)$  对  $x$  的偏微商,只要把  $y$  看作常量,而对  $x$  求普通的单变量函数的微商就行了. 同样,求  $f_y'(x, y)$  时,也只要把  $x$  看成常量而对  $y$  求导即可. 因此,求二元函数的偏微商,并不需要任何新的方法.

例 1 设  $z = e^{xy} + \sqrt{x^2 + y^2}$ , 则当  $x^2 + y^2 \neq 0$  时有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

下面以  $f_x'(x_0, y_0)$  为例,来说明它的意义. 因为

$$k(x) = \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

是函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处沿  $x$  轴方向的平均变化率,所以其极限

$f_x'(x_0, y_0)$  就是  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  处沿  $x$  轴方向的变化率. 从几何上看,  $z = f(x, y)$  的图形是空间的一张曲面,  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  是曲面上一点,过此点作平行于坐标平面  $Oxz$  的平面  $y = y_0$ , 它与曲面的交线是平面  $y = y_0$  上的一条曲线  $z = f(x, y_0)$ , 而  $k(x) = \frac{z - z_0}{x - x_0}$  就是该曲线的割线与  $x$  轴正方向的夹角的正切值, 所以  $k(x)$  的极限值  $f_x'(x_0, y_0)$  就是该曲线在点  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  处的切线关于  $x$  轴的斜率(图 6.3).

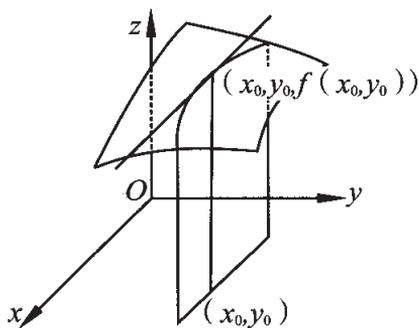


图 6.3

对一般  $n$  元函数  $y = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , 求  $\frac{\partial y}{\partial \xi_i}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 时, 只要把  $\xi_j$  ( $j \neq i$ ) 都看成常量, 于是  $y$  就看成单变量  $\xi_i$  的函数, 求得的微商就是  $\frac{\partial y}{\partial \xi_i} = f_{\xi_i}'(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  ( $1 \leq i \leq n$ ).

### 6.2.2 全微分

在 6.2.1 节中,我们曾定义一元函数  $y = f(x)$  的微分为

$$dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx,$$

其中  $dx = \Delta x$  是自变量  $x$  的任意改变量. 在那里,我们还指出这个微分所具有的两个基本性质,即它是  $\Delta x$  的线性函数并与函数的改变量  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$  之差是比  $\Delta x$  高级的无穷小量

$$\Delta y - dy = \Delta y - f'(x)\Delta x = o(\Delta x),$$

所以又说微分  $dy$  是改变量  $\Delta y$  的线性主部.

仿此可引入多元函数的微分概念.

**定义** 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x, y)$  具有两个一阶偏微商,若对于自变量  $x$  及  $y$  的任意改变量  $\Delta x$  及  $\Delta y$ ,相应函数的改变量  $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$  可以表成

$$\Delta z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + o(\rho),$$

其中  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ,  $o(\rho)$  是当  $\rho$  趋向零时比  $\rho$  高级的无穷小量,则称函数  $f(x, y)$  在点  $(x, y)$  处可微,而表达式  $f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$  就称为函数  $f(x, y)$  在点  $(x, y)$  处的全微分,记成

$$dz = df(x, y) = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y.$$

从定义可以看出,全微分  $dz$  是  $\Delta x$  及  $\Delta y$  的线性函数,并且它与(全)改变量  $\Delta z$  之差  $\Delta z - dz$  是一个比  $\rho$  高级的无穷小量,所以二元函数  $z = f(x, y)$  的全微分  $dz$  也是改变量  $\Delta z$  的线性主部.

显然,若函数  $f(x, y)$  在点  $(x, y)$  处可微,则当自变量的改变量  $\Delta x$  及  $\Delta y$  趋向零时,函数的改变量  $\Delta z$  亦趋向零,此即为  $f(x, y)$  在点  $(x, y)$  处是连续的;反之不真,事实上,连续而不可微的函数确实是存在的.

如果函数  $f(x, y)$  在一个平面区域  $G$  内逐点可微,就称  $f(x, y)$  是  $G$  内的可微函数.

我们知道,一元函数的微商存在就能保证这个函数是可微的.但对于二元函数这个结论并不成立,即仅设函数的两个偏微商存

在,函数还有可能不可微.这是因为偏微商仅表示函数在某一特定方向的变化率,还不足以反映它全面变化的性态.所以为了确定二元函数在一点处的可微性,通常要求函数满足比偏微商存在更强的条件,这就要导出下面的定理.

**定理** 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x, y)$  处具有连续的偏微商,即设  $f(x, y)$  在点  $(x, y)$  及其一个邻域中存在一阶偏微商  $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ , 并且这些偏微商在点  $(x, y)$  处连续,则函数  $f(x, y)$  就在该点可微.

**证** 考虑函数的改变量

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] \\ &\quad + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)],\end{aligned}$$

由一元函数的微分中值定理有

$$\begin{aligned}f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) \\ &= f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) \Delta x, \\ f(x, y + \Delta y) - f(x, y) &= f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y) \Delta y,\end{aligned}$$

其中  $\theta_1$  及  $\theta_2$  都是区间  $(0, 1)$  内的数. 令

$$\begin{aligned}f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) - f'_x(x, y) &= \varepsilon_1, \\ f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y) - f'_y(x, y) &= \varepsilon_2.\end{aligned}$$

于是算得

$$\Delta z = f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y.$$

因为  $f'_x(x, y)$  与  $f'_y(x, y)$  在点  $(x, y)$  是连续的,所以

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \varepsilon_1 = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \varepsilon_2 = 0.$$

而且

$$\frac{|\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y|}{\rho} = \frac{|\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \leq |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|,$$

故有

$$\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y = o(\rho),$$

如此得到

$$\Delta z = f_x'(x, y)\Delta x + f_y'(x, y)\Delta y + o(\rho).$$

这就是说, 函数  $f(x, y)$  在点  $(x, y)$  处可微.

若约定自变量  $x, y$  的任意改变量  $\Delta x, \Delta y$  等于它的微分  $dx, dy$ , 即令

$$dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y,$$

则函数  $z = f(x, y)$  的全微分就可写成

$$dz = f_x'(x, y)dx + f_y'(x, y)dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

**例** 求函数  $z = x^2 + 4xy^2 + y^4$  的全微分.

**解** 因偏微商

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 8xy + 4y^3$$

在全平面连续, 故所给函数在全平面可微, 且

$$dz = (2x + 4y^2)dx + (8xy + 4y^3)dy.$$

对于三个或更多变量的函数, 亦可建立完全类似的全微分概念. 例如可微的三元函数  $u = f(x, y, z)$  的全微分就定义为

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

并且它与函数的改变量

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

之差是一个比  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$  高级的无穷小量

$$\Delta u = du + o(\rho).$$

### 6.2.3 高阶偏微商

如果对区域  $G$  中的每一点, 函数  $z = f(x, y)$  的两个偏微商  $f_x'(x, y), f_y'(x, y)$  都存在, 那么这两个偏微商仍是区域  $G$  中的二元函数, 因此对它们还可以求偏微商. 如果这些偏微商存在, 就称它们是  $z = f(x, y)$  的二阶偏微商. 依照对变量求导的次序不

同,可以有四个二阶偏微商,分别记为

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}, & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\end{aligned}$$

或者记作

$$f_{xx}''(x, y), f_{xy}''(x, y), f_{yx}''(x, y), f_{yy}''(x, y),$$

其中第二第三两个偏微商又称函数的二阶混合偏微商.

同样可引入函数  $f(x, y)$  的三阶以至更高阶偏微商的概念.

例 1 函数  $z = x^3y^2 - 3xy^3 - xy + 1$  的两个偏微商是

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 - 3y^2 - y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y - 9xy^2 - x.$$

而四个二阶偏微商是

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 6xy^2, & \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} &= 6x^2y - 9y^2 - 1, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} &= 6x^2y - 9y^2 - 1, & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 2x^3 - 18xy.\end{aligned}$$

由这个例子可以看出,二元函数的两个二阶混合偏微商是相等的,即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

换句话说,二元函数先  $x$  后  $y$  求二阶偏微商与先  $y$  后  $x$  求二阶偏微商所得结果是相同的. 此事并非偶然,原因如下.

**定理** 若函数  $z = f(x, y)$  在区域  $G$  内有连续的二阶偏微商  $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$  和  $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ , 则对  $G$  内任意一点,这两个偏微商相等,即函数的二阶混合偏微商与求导的顺序无关.

**证** 在域  $G$  内任取一点  $(x, y)$  (图 6.4), 令

$$\begin{aligned}\Delta_x z &= f(x + \Delta x, y) - f(x, y), \\ \Delta_y z &= f(x, y + \Delta y) - f(x, y),\end{aligned}$$

则有

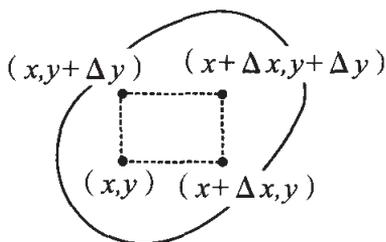


图 6.4

$$\begin{aligned}\Delta_x \Delta_y z &= \Delta_x [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] \\ &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) \\ &\quad - f(x + \Delta x, y) - f(x, y + \Delta y) \\ &\quad + f(x, y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_y \Delta_x z &= \Delta_y [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)] \\ &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) \\ &\quad - f(x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) \\ &\quad + f(x, y).\end{aligned}$$

所以

$$\Delta_x \Delta_y z = \Delta_y \Delta_x z.$$

当  $y$  和  $\Delta y$  固定时, 令

$$\varphi(x) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

连续应用一元微分中值定理可得

$$\begin{aligned}\Delta_x \Delta_y z &= \Delta_x \varphi(x) \\ &= \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \varphi'(x + \theta_1 \Delta x) \Delta x \\ &= [f_x'(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) - f_x'(x + \theta_1 \Delta x, y)] \Delta x \\ &= f_{xy}''(x + \theta_1 \Delta x, y + \theta_2 \Delta y) \Delta x \Delta y,\end{aligned}$$

其中  $\theta_1$  和  $\theta_2$  是区间  $(0, 1)$  中的数; 同样, 当  $x$  和  $\Delta x$  固定时, 令

$$\psi(y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y),$$

又可算得

$$\begin{aligned}\Delta_y \Delta_x z &= \Delta_y \psi(y) \\ &= \psi(y + \Delta y) - \psi(y) = \psi'(y + \theta_3 \Delta y) \Delta y \\ &= [f_y'(x + \Delta x, y + \theta_3 \Delta y) - f_y'(x, y + \theta_3 \Delta y)] \Delta y \\ &= f_{yx}''(x + \theta_4 \Delta x, y + \theta_3 \Delta y) \Delta x \Delta y,\end{aligned}$$

其中  $\theta_3$  和  $\theta_4$  也是区间  $(0, 1)$  中的数. 于是推得

$$f_{xy}''(x + \theta_1 \Delta x, y + \theta_2 \Delta y) = f_{yx}''(x + \theta_4 \Delta x, y + \theta_3 \Delta y).$$

令  $\Delta x, \Delta y$  趋于零, 由假设  $f_{xy}''(x, y)$  和  $f_{yx}''(x, y)$  是连续函数, 所以

$$f_{xy}''(x, y) = f_{yx}''(x, y).$$

这就证明了所要的定理.

如果给定函数  $z = f(x, y)$  的两个连续的三阶偏微商

$$f_{x^2y}'''(x, y), \quad f_{yx^2}'''(x, y),$$

它们只是求导的顺序不同, 利用上述定理就有

$$\begin{aligned} f_{x^2y}'''(x, y) &= \frac{\partial^2 f_x'(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f_x'(x, y)}{\partial y \partial x} = f_{xyx}'''(x, y) \\ &= f_{(yxx)}'''(x, y) = f_{yx^2}'''(x, y). \end{aligned}$$

就是函数的三阶偏微商也不依赖于求导的顺序. 这一性质不难推广到多元函数的任意阶的混合偏微商. 从而给运算带来许多方便.

例 2 证明函数  $u = \frac{1}{r}$  满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \neq 0$ .

证 因为

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{x}{r^3} \right) = -\frac{r^3 - 3r^2 \frac{\partial r}{\partial x} x}{r^6} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5},$$

由函数对于自变量的对称性又得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}.$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0.$$

这个方程称为拉普拉斯(Laplace)方程. 它是数学物理中一个极为重要的方程. 满足这个方程的函数称为调和函数. 本例中  $u = \frac{1}{r}$ ,

当  $r$  不为零时即是一个调和函数.

例3 证明函数  $u = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$  ( $t > 0$ ) 满足方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

证 因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{x^2}{4t^2} e^{-\frac{x^2}{4t}} - \frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \\ &= \left( \frac{x^2}{4t^{5/2}} - \frac{1}{2t^{3/2}} \right) e^{-\frac{x^2}{4t}}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{2t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left( \frac{x^2}{4t^{5/2}} - \frac{1}{2t^{3/2}} \right) e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

由此即得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

这个方程同样是数学物理中一个重要的方程,称为热传导方程.本例中的函数就是该方程的一个解.

#### 6.2.4 函数值的近似计算

设函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处可微,则当  $\Delta x, \Delta y$  很小时,就可以用函数的全微分  $dz$  来近似代替函数的改变量  $\Delta z$

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &\approx dz = f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y. \end{aligned}$$

从而得到

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &\approx f(x_0, y_0) + \\ &f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y. \end{aligned}$$

这就是数值的近似计算公式.当函数及其偏微商在点  $(x_0, y_0)$  的值容易求出时,它可用来求函数在点  $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$  的近似值.

例1 计算  $\ln(\sqrt[3]{1.03} + \sqrt[4]{0.98} - 1)$  的近似值.

解 取二元函数  $z = f(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1)$ . 令  $x_0 = 1,$

$\Delta x = 0.03; y_0 = 1, \Delta y = -0.02$ , 于是

$$f(x_0, y_0) = f(1, 1) = 0, f_x'(x_0, y_0) = f_x'(1, 1) = \frac{1}{3},$$

$$f_y'(x_0, y_0) = f_y'(1, 1) = \frac{1}{4},$$

代入近似公式即得

$$\begin{aligned} & \ln(\sqrt[3]{1.03} + \sqrt[4]{0.98} - 1) \\ & \approx \frac{1}{3} \times 0.03 - \frac{1}{4} \times 0.02 = 0.005. \end{aligned}$$

例2 设有厚度为0.1 cm, 内径为4 cm, 内高为20 cm的无盖圆桶(图6.5), 求其外壳体积的近似值.

解 记圆桶外壳厚度为 $h$ , 内径为 $R$ , 内高为 $H$ , 则外壳的体积为

$$V = \pi(R+h)^2(H+h) - \pi R^2 H.$$

可见体积 $V$ 就是函数

$$z = f(R, H) = \pi R^2 H$$

在 $R = 4, H = 20$ 处当 $\Delta R = h = 0.1, \Delta H = h = 0.1$ 时的改变量 $\Delta z$ . 故

$$\begin{aligned} V = \Delta z & \approx dz = \frac{\partial z}{\partial R} \Big|_{(4,20)} \Delta R + \frac{\partial z}{\partial H} \Big|_{(4,20)} \Delta H \\ & = 2\pi RH \Big|_{(4,20)} h + \pi R^2 \Big|_{(4,20)} h \\ & = 160\pi \times 0.1 + 16\pi \times 0.1 \\ & = 17.6\pi \approx 55.3. \end{aligned}$$

所求外壳的近似体积为 $V = 55.3 \text{ cm}^3$ .

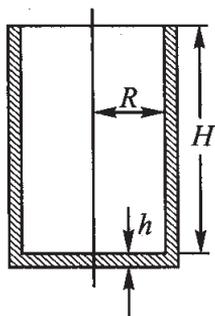


图 6.5

### 6.2.5 误差估计

设一物理量 $z$ 与量 $x, y$ 之间存在函数关系 $z = f(x, y)$ . 如果测量 $x, y$ 时, 所产生的最大绝对误差为 $\Delta^* x, \Delta^* y$ , 那么根据这个函数关系来计算量 $z$ 时, 会引起多大的误差?

当  $x, y$  分别有误差  $\Delta x, \Delta y$  时, 由于量  $z$  的误差  $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$  可近似为

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y,$$

所以

$$\begin{aligned} |\Delta z| &\approx \left| \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y \right| \leq \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| |\Delta x| + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| |\Delta y| \\ &\leq \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \Delta^* x + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \Delta^* y. \end{aligned}$$

于是就认为  $z$  的最大绝对误差为

$$\Delta^* z = \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \Delta^* x + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \Delta^* y;$$

而最大的相对误差为

$$\delta^* z = \frac{\Delta^* z}{|z|} = \left| \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} \right| \Delta^* x + \left| \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial y} \right| \Delta^* y = \Delta^* \ln z.$$

下面两种特别情形在实际问题中是经常用得着的.

1° 当  $z = xy$  时

$$\delta^* z = \left| \frac{1}{x} \right| \Delta^* x + \left| \frac{1}{y} \right| \Delta^* y = \delta^* x + \delta^* y,$$

其中  $\delta^* x, \delta^* y$  分别为  $x, y$  的最大相对误差. 就是两个近似量乘积的最大相对误差等于这些近似量的最大相对误差之和.

2° 当  $z = \frac{y}{x}$  时

$$\begin{aligned} \delta^* z &= \left| \frac{x}{y} \cdot \left( -\frac{y}{x^2} \right) \right| \Delta^* x + \left| \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{x} \right| \Delta^* y \\ &= \left| \frac{1}{x} \right| \Delta^* x + \left| \frac{1}{y} \right| \Delta^* y = \delta^* x + \delta^* y. \end{aligned}$$

就是两个近似量商的最大相对误差等于这些近似量的最大相对误差之和.

**例** 测得一直流电路的电压  $E = 24$ (伏), 电流强度  $I = 6$ (安). 已知测电压的最大相对误差  $\delta^* E = 0.3\%$ , 测电流的最大

相对误差  $\delta^* I = 0.5\%$ . 问用欧姆定律计算电路的电阻时所产生的最大相对误差和最大的绝对误差是多少?

解 由欧姆定律, 电阻  $R$  这时为

$$R = \frac{E}{I} = 4(\text{欧}).$$

所以最大的相对误差  $\delta^* R$  为

$$\delta^* R = \delta^* E + \delta^* I = 0.8\%.$$

最大的绝对误差  $\Delta^* R$  为

$$\Delta^* R = R \cdot \delta^* R = 0.032(\text{欧}).$$

### 复习思考题

1. 叙述偏微商的定义及其几何意义.
2. 何时  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ ?
3. 叙述二元函数在一点可微的定义, 它与一元函数的可微性定义有何异同?
4. 具备什么条件就能保证多元函数是可微的?
5. 什么是全微分? 全微分与全增量有何关系?
6. 多元函数的可微性与连续性有什么关系?

### 习题 6.2

1. 求下列各函数在指定点的偏微商:

(1) 设  $f(x, y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ , 求  $f'_x(3, 4)$ ;

(2) 设  $z = \ln\left(x + \frac{y}{2x}\right)$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=0}}$ ;

(3) 设  $f(x, y) = 3x + \ln(1 + xy)$ , 求  $f'_y(1, 2)$ ;

(4) 设  $z = \sin(x^2 y)$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=\pi}}$ .

2. 求下列各函数对于每个自变量的偏微商:

- (1)  $z = \frac{xe^y}{y^2}$ ; (2)  $z = x^y$ ;  
 (3)  $z = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{y}{x}}$ ; (4)  $u = \arctan \frac{v+w}{v-w}$ ;  
 (5)  $z = (1+xy)^y$ ; (6)  $z = \sin \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x}$ ;  
 (7)  $z = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ; (8)  $z = \ln(x + \ln y)$ ;  
 (9)  $z = xy \ln(x+y)$ ; (10)  $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ ;  
 (11)  $u = e^{x(x^2 + y^2 + z^2)}$ ; (12)  $u = xy + yz + zx$ ;  
 (13)  $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ; (14)  $u = x^{y^z}$ ;  
 (15)  $u = \rho e^\varphi + e^{-\varphi} + t$ ; (16)  $\theta = xe^{-t} + \ln(xy) + t$ .

3. 设  $z = 2\sqrt{\frac{1 - \sqrt{xy}}{1 + \sqrt{xy}}}$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(x,1)}$  与  $z'_y(x,1)$ .

4. 设  $f(x, y) = \ln[xy^2 + yx^2 + \sqrt{1 + (xy^2 + yx^2)^2}]$ , 求  $f'_x(1, y)$  及  $\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(1, y)}$ .

5. 设  $f(x, y) = \int_1^{x^2 y} \frac{\sin t}{t} dt$ , 求  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ .

6. 设  $u = \sqrt{ax^3 - bt^3}$ , 试求当  $z = b, t = a$  时  $\frac{\partial u}{\partial z}$  和  $\frac{\partial u}{\partial t}$  的值.

7. 求曲线  $\begin{cases} z = \frac{x^2 + y^2}{4} \\ y = 4 \end{cases}$  在点  $(2, 4, 5)$  处的切线与  $Ox$  轴的正

向所成的角度.

8. 求曲面  $z = xy$  与平面  $x = 3$  的交线在点  $(3, 4, 12)$  处的切线对于  $Oy$  轴的斜率.

9. 求曲线  $\begin{cases} z = \sqrt{1 + x^2 + y^2} \\ x = 1 \end{cases}$  在点  $(1, 1, \sqrt{3})$  处的切线与  $y$  轴

正向所成的角度.

10. 两个曲面  $z = x^2 + \frac{y^2}{6}$  和  $z = \frac{x^2 + y^2}{3}$  与平面  $y = 2$  相交的曲线成什么角度?

11. 在下列各题中, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ :

(1)  $z = \sin xy$ ;

(2)  $z = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$ ;

(3)  $z = \frac{x-y}{x+y}$ ;

(4)  $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ ;

(5)  $z = \ln(x^2 + y^2)$ ;

(6)  $z = \sin^2(ax + by)$ ;

(7)  $z = y^{\ln x}$ ;

(8)  $z = \arcsin(xy)$ .

12. 设  $z = \ln(x^2 + y^2)$ , 求  $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ .

13. 设  $u = e^{xyz}$ , 求  $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ .

14. 设  $z = \arctan \frac{y}{x}$ , 验证:

(1)  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ ; (2)  $\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ .

15. 设  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , 证明当  $r \neq 0$  时有:

(1)  $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r}$ ;

(2)  $\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ln r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \ln r}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2}$ ;

(3)  $\frac{\partial^2}{\partial r^2} \frac{1}{r} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{r} = 0$ .

16. 设

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$$

证明  $f_{xy}''(0, 0) \neq f_{yx}''(0, 0)$ .

17. 求下列函数的全微分:

(1)  $z = \ln(x^2 + y^2)$ ;      (2)  $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ ;

(3)  $u = \frac{s+t}{s-t}$ ;      (4)  $z = \arctan \frac{y}{x}$ ;

(5)  $z = \sin(xy)$ ;      (6)  $u = x^x$ ;

(7)  $u = xy + yz + zx$ ;      (8)  $u = \frac{z}{x^2 + y^2}$ .

18. 求函数  $z = x^2y^3$  当  $x = 2, y = -1, \Delta x = 0.02, \Delta y = -0.01$  时的全微分及全增量.

19. 计算函数  $z = 2x^2 + 3y^2$  当  $x = 10, y = 8, \Delta x = 0.2, \Delta y = 0.3$  时的  $\Delta z$  及  $dz$ , 并估计用  $dz$  来替代  $\Delta z$  所产生的相对误差.

20. 设  $z = \frac{y}{x}$ , 求当  $x = 2, y = 1, dx = 0.1, dy = 0.2$  时的  $dz$  及  $\Delta z$ .

21. 设  $z = e^{xy}$ , 求当  $x = 1, y = 1, \Delta x = 0.15, \Delta y = 0.1$  时的  $dz$ .

22. 设  $z = \ln(x^2 + y^2)$ , 求当  $x = 2, y = 1, \Delta x = 0.1, \Delta y = -0.1$  时的  $dz$ .

23. 计算下列各式的近似值:

(1)  $\sqrt{(1.02)^3 + (1.97)^3}$ ;

(2)  $\ln(\sqrt{4.05} + \sqrt[3]{7.99} - 3)$ ;

(3)  $(10.1)^{2.03}$ ;

(4)  $(1.04)^{2.02}$ ;

(5)  $\frac{(1.03)^2}{\sqrt[3]{0.98} \sqrt[4]{(1.05)^3}}$ .

24. 求当  $x, y$  的绝对值都很小时, 下列各式的近似式:

(1)  $(1+x)^n(1+y)^m$ ;      (2)  $\ln \frac{1+x}{1+y}$ .

25. 测量一三角形, 设两边边长的误差为  $0.1\%$ , 测量夹角为

$45^\circ \pm 0.25^\circ$ , 问用公式  $S = \frac{1}{2}ab \sin \theta$  计算三角形面积时有多大的相对误差?

26. 已知边长  $x = 6$  与  $y = 8$  的矩形, 如果  $x$  边增加 5 厘米, 而  $y$  边减少 10 厘米, 问这个矩形的对角线近似变化怎样?

27. 要用水泥做一开口的长方体水塔, 其内体长 5 米, 宽 4 米, 高 3 米, 又它的厚度为 20 厘米, 试求所需水泥量的近似值.

28. 扇形中心角  $\alpha = 60^\circ$ , 半径  $R = 20$  米, 如果中心角增加  $1^\circ$ , 为了使扇形面积仍然不变, 应把扇形半径减少若干?(近似值)

## 6.3 复合函数的微分法

### 6.3.1 复合函数微商的链式法则

设函数  $z = f(x, y)$  在区域  $D$  上有定义, 函数  $x = \varphi(r, s), y = \psi(r, s)$  都在域  $\Delta$  上有定义, 并设对任意  $(r, s) \in \Delta$ , 有  $(\varphi(r, s), \psi(r, s)) \in D$ , 那么函数

$$z = f(\varphi(r, s), \psi(r, s))$$

(通过中间变量  $x$  和  $y$ ) 是变量  $r, s$  的复合函数. 关于复合函数的偏微商, 有以下定理:

**定理** 设函数  $x = \varphi(r, s), y = \psi(r, s)$  在点  $(r, s)$  存在偏微商  $\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial s}$ , 而函数  $z = f(x, y)$  在相应的点  $(x, y)$  处可微, 则

复合函数  $z = f(\varphi(r, s), \psi(r, s))$  在点  $(r, s)$  必存在偏微商  $\frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial s}$ ,

且有

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r},$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

证 当  $s$  固定而  $r$  有改变量  $\Delta r$  时, 中间变量  $x, y$  就有相应的改变量  $\Delta x, \Delta y$

$$\Delta x = \varphi(r + \Delta r, s) - \varphi(r, s),$$

$$\Delta y = \psi(r + \Delta r, s) - \psi(r, s).$$

由此又引起函数  $z = f(x, y)$  有改变量  $\Delta z$

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

因为函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x, y)$  可微, 故在  $\Delta r$  的某个邻域内, 总使  $\rho \neq 0$ , 所以

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + o(\rho),$$

其中  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ,  $o(\rho)$  是  $\rho$  趋向零时比  $\rho$  高级的无穷小量. 于是可得

$$\frac{\Delta z}{\Delta r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta r} + \frac{o(\rho)}{(\rho)} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta r}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta r}\right)^2}.$$

由偏微商  $\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}$  的存在性, 推知  $x, y$  对  $r$  是连续的. 故当改变量  $\Delta r$

趋向零时, 改变量  $\Delta x, \Delta y$  趋向零, 从而  $\rho$  及  $\frac{o(\rho)}{\rho}$  趋向零. 又因差商

$\frac{\Delta x}{\Delta r}, \frac{\Delta y}{\Delta r}$  这时分别趋向于偏微商  $\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}$ , 故当令  $\Delta r$  趋向零时, 上式

右端的极限存在, 所以左端极限亦必存在, 且有

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r},$$

同样可得

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}.$$

若在  $\Delta r$  的某个邻域内, 有  $\rho = 0$ , 这时因  $\Delta x = \Delta y = 0$ , 故  $\Delta z = 0$ . 于是, 上述等式两端都为零, 故结论仍成立.

上述定理中的这类公式可以归结成下述统一的法则.

复合函数对某一自变量的偏微商等于复合函数对每个中间变

量的偏微商分别乘以这些中间变量对该自变量的偏微商然后相加.

这个法则常常称为复合函数微商的链式法则. 它显然适用于任意多个中间变量和自变量的情形. 在一般情形下, 这样的公式之个数等于独立自变量的个数, 而每个公式的项数等于中间变量的个数. 例如, 设有四元函数

$$u = f(x, y, z, w),$$

其中每一个变量又是另外三个自变量  $r, s, t$  的函数

$$x = x(r, s, t), y = y(r, s, t),$$

$$z = z(r, s, t), w = w(r, s, t).$$

因此  $u$  通过这四个中间变量成为  $r, s, t$  的复合函数

$$u = f(x(r, s, t), y(r, s, t), z(r, s, t), w(r, s, t)).$$

按链式法则,  $u$  对  $r, s, t$  的偏微商就等于

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial r},$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial s},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial t}.$$

例 1 设  $z = e^{xy} \arctan(x+y)$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ .

解 引入中间变量  $\xi = xy, \eta = x+y$ , 于是函数  $z = e^{xy} \arctan(x+y)$  便可看成是由函数  $z = e^{\xi} \arctan \eta$  和  $\xi = xy, \eta = x+y$  复合而成. 所以

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = (e^{\xi} \arctan \eta) y + \frac{e^{\xi}}{1 + \eta^2} \\ &= ye^{xy} \arctan(x+y) + \frac{e^{xy}}{1 + (x+y)^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = (e^{\xi} \arctan \eta) x + \frac{e^{\xi}}{1 + \eta^2}$$

$$= xe^{xy} \arctan(x+y) + \frac{e^{xy}}{1+(x+y)^2}.$$

例2 可微函数  $u = f(x, y)$  通过变换  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  可以看成是  $r, \theta$  的函数, 试证

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2.$$

证 事实上

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) \\ &= -\frac{\partial u}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \theta, \end{aligned}$$

两式平方后相加, 即得欲证之等式.

例3 设可微函数  $u = f(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$ , 求  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y},$

$\frac{\partial u}{\partial z}$ .

解 因为函数  $u = f(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$  可看成是由  $u = f(\xi, \eta)$  和  $\xi = x+y+z, \eta = x^2+y^2+z^2$  所构成的复合函数, 所以

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + 2x \frac{\partial u}{\partial \eta} = f_1' + 2xf_2',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + 2y \frac{\partial u}{\partial \eta} = f_1' + 2yf_2',$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + 2z \frac{\partial u}{\partial \eta} = f_1' + 2zf_2'.$$

其中  $f_1'$  和  $f_2'$  分别表示  $f(\xi, \eta)$  对第一变量  $\xi$  与第二变量  $\eta$  的偏微商.

### 6.3.2 微分的运算, 一阶全微分形式的不变性

我们知道, 在一元函数  $y = f(x)$  中, 不论  $x$  是自变量还中间

变量,一阶微分都具有相同的形式

$$dy = f'(x)dx.$$

这个微分形式的不变性对于多变量函数也是正确的.

设有二元可微函数  $z = f(x, y)$ , 如果  $x, y$  是自变量, 则它的一阶全微分可以写成

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

当  $x, y$  是中间变量时, 例如  $x = \varphi(r, s), y = \psi(r, s)$ , 并且它们对于变量  $r, s$  是可微的, 则复合函数  $z = f(\varphi(r, s), \psi(r, s))$  的全微分是

$$dz = \frac{\partial z}{\partial r} dr + \frac{\partial z}{\partial s} ds.$$

但由复合函数的微分法则得

$$\begin{aligned} dz &= \left( \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) dr + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \right) ds \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} \left( \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial s} ds \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left( \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial s} ds \right) \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \end{aligned}$$

由此可知, 给定一个可微的函数关系式  $z = f(x, y)$ , 不管  $x, y$  是自变量或中间变量, 总有

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy,$$

这就是全微分形式的不变性.

把  $u$  和  $v$  看成自变量时, 易得以下一些微分公式, 由全微分形式的不变性, 这些公式在  $u$  和  $v$  都是  $n$  元函数时也是成立的. 这些公式是:

$$d(u + v) = du + dv,$$

$$d(uv) = u dv + v du,$$

$$d \frac{u}{v} = \frac{v du - u dv}{v^2}.$$

此外, 常数的微分为零. 反之, 设  $u = f(x, y, z)$  是区域  $V$  内的

可微函数,若在  $V$  内处处有  $du = 0$ , 则  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$  在  $V$  内恒成立, 从而  $u$  必为常数(详细证明方法可参看 6.6.1 例 2). 这样, 区域  $V$  内  $du = 0$  当且仅当  $u$  为常数. 这个性质可以用来求解一些微分方程, 例如, 把方程

$$xydz + yzdx + zxdy = 0$$

的左边写成全微分, 得

$$d(xyz) = 0,$$

从而得方程的解是

$$xyz = c,$$

其中  $c$  是积分常数. 微分方程的这种解法称为凑全微分方法.

### 6.3.3 复合函数的全微商, 偏微商记号的用法

设给定函数  $u = f(x, y, z)$ , 其中  $x, y, z$  又都是某一变量  $t$  的函数

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t).$$

这时复合函数  $u = f(x(t), y(t), z(t))$  就只依赖于一个变量  $t$ . 因而  $u$  对  $t$  的变化率  $\frac{du}{dt}$  就完全描述了这个函数的变化性态, 并称它为  $u$  对  $t$  的全微商或全导数. 按复合函数微商的公式算得

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

特别, 如果变量  $x$  起自变量  $t$  的作用, 就是说函数  $u = f(x, y, z)$  不仅直接依赖于  $x$ , 而且还间接地通过中间变量  $y, z$  依赖于  $x$ , 即有复合函数  $u = f(x, y(x), z(x))$ , 由于  $\frac{dx}{dx} = 1$ , 所以它对  $x$  的全微商就成为

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dx}.$$

上式中  $\frac{\partial u}{\partial x}$  指的是  $\frac{\partial f}{\partial x}$ , 它与  $\frac{du}{dx}$  的意义是不同的.

我们还可能会遇到比较复杂的情形,例如已知  $u = f(x, y, z)$ , 而  $y = \varphi(x, r), z = \psi(x, r)$ , 那么  $u$  就是  $(x, r)$  是复合函数:

$$u = f(x, \varphi(x, r), \psi(x, r)),$$

这时有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

上式中的  $\frac{\partial f}{\partial x}$ , 指三元函数  $f(x, y, z)$  对  $x$  的偏微商, 不能简单地用

$\frac{\partial u}{\partial x}$  来代替; 而上式中的  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , 指的是, 当把  $u$  看成  $(x, r)$  的复合函数

时, 对  $x$  的偏微商, 与  $\frac{\partial f}{\partial x}$  的意义是不同的. 因此, 在可能发生混淆

的情况下, 写记号  $\frac{\partial u}{\partial x}$  时, 总应该指出  $u$  依赖于  $x$  和其它自变量的函

数关系的具体形式, 而  $\frac{\partial f}{\partial x}$  却总是有明确的意义.

还有更复杂的情况, 例如  $u = f(x, y, z), y = \varphi(x, r), z = h(x, y, r)$ , 读者可自己写出当把  $u$  看成  $(x, r)$  的复合函数时,  $\frac{\partial u}{\partial x}$  的表达式.

例 1 设函数  $z = \arctan(xy)$ , 而  $y = e^x$ , 求  $\frac{dz}{dx}$ .

解 直接从公式得

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{y}{1+(xy)^2} + \frac{x}{1+(xy)^2} e^x = \frac{(1+x)e^x}{1+(xe^x)^2}. \end{aligned}$$

例 2 设函数  $u = xyz$ , 而  $z = \sin(x^2 + y)$ , 求  $\frac{\partial u}{\partial x}$  和  $\frac{\partial u}{\partial y}$ .

解 记  $f(x, y, z) = xyz$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz, \frac{\partial f}{\partial y} = zx, \frac{\partial f}{\partial z} = xy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \cos(x^2 + y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \cos(x^2 + y),$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = y \sin(x^2 + y) + 2x^2 y \cos(x^2 + y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = x \sin(x^2 + y) + x y \cos(x^2 + y).$$

若不利用这些公式, 而把  $z = \sin(x^2 + y)$  直接代入  $u = xyz$  来计算, 也可得出同样的结果.

### 6.3.4 复合函数的高阶微商

设给定函数  $z = f(x, y)$ , 而  $x, y$  又是  $r, s$  的函数  $x = \varphi(r, s)$ ,  $y = \psi(r, s)$ , 要来计算复合函数

$$z = f(\varphi(r, s), \psi(r, s))$$

对自变量  $r, s$  的二阶偏微商. 先算  $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}$ . 因为已有

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r},$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s},$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}. \end{aligned}$$

但  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$  仍是  $x, y$  的函数, 因此要对它们求关于  $r$  的偏微商时, 还

需利用一次链式法则, 即有

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial r},$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial r}.$$

将这些等式代入后得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 \\ &\quad + \frac{\partial x}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}.\end{aligned}$$

按同样的方法再算  $\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial s}$ . 这时有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial s} &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial r \partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial r \partial s},\end{aligned}$$

因为  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$  仍是通过  $x, y$  依赖于  $r, s$ , 所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial s}, \\ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial s}.\end{aligned}$$

于是求得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial s} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial r} \right) \\ &\quad + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial r \partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial r \partial s}.\end{aligned}$$

同样算得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}.$$

必须指出,在实际计算复合函数的高阶微商时,并不需要记住这些公式,而是只要掌握上述方法,按部就班地算下去.

**例 1** 求复合函数  $z = f\left(xy, \frac{y}{x}\right)$  的三个二阶偏微商.

**解** 所给函数的一阶偏微商为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y f_1' - \frac{y}{x^2} f_2',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x f_1' + \frac{1}{x} f_2',$$

由此即可算得其二阶偏微商, 分别为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= y \left( y f_{11}'' - \frac{y}{x^2} f_{12}'' \right) - \frac{y}{x^2} \left( y f_{21}'' - \frac{y}{x^2} f_{22}'' \right) + \frac{2y}{x^3} f_2' \\ &= y^2 f_{11}'' - 2 \frac{y^2}{x^2} f_{12}'' + \frac{y^2}{x^4} f_{22}'' + \frac{2y}{x^3} f_2'. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= y \left( x f_{11}'' + \frac{1}{x} f_{12}'' \right) + f_1' - \frac{y}{x^2} \left( x f_{21}'' + \frac{1}{x} f_{22}'' \right) - \frac{1}{x^2} f_2' \\ &= x y f_{11}'' - \frac{y}{x^3} f_{22}'' + f_1' - \frac{1}{x^2} f_2' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= x \left( x f_{11}'' + \frac{1}{x} f_{12}'' \right) + \frac{1}{x} \left( x f_{21}'' + \frac{1}{x} f_{22}'' \right) \\ &= x^2 f_{11}'' + 2 f_{12}'' + \frac{1}{x^2} f_{22}''. \end{aligned}$$

例 2 证明函数  $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$  满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

证 令  $\xi = x - at, \eta = x + at$ , 于是算得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d\varphi}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{d\psi}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{d\varphi}{d\xi} + \frac{d\psi}{d\eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{d\varphi}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{d\psi}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = a \left( -\frac{d\varphi}{d\xi} + \frac{d\psi}{d\eta} \right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{d^2 \psi}{d\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} + \frac{d^2 \psi}{d\eta^2}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \left( -\frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{d^2 \psi}{d\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) = a^2 \left( \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} + \frac{d^2 \psi}{d\eta^2} \right).$$

比较最后二式, 即知

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

这个方程是数学物理中另一个极为重要的方程, 称为波动方程. 对任意可微分二次的函数  $\varphi(\xi)$  和  $\psi(\eta)$ , 本例所考察的函数  $u =$

$\varphi(x-at) + \varphi(x+at)$  就都是该方程的解.

### 复习思考题

1. 叙述复合函数求微商的定理.
2. 什么叫做多元函数一阶微分形式的不变性, 一阶微分形式何故有不变性?
3. 利用一阶微分形式的不变性推导(全)微分的四则运算基本法则.

### 习题 6.3

1. 设  $u = x^2y - xy^2$ , 而  $x = r\cos s, y = r\sin s$ , 求  $\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial s}$ .
2. 设  $u = \arctan(1 + xy)$ , 而  $x = s + t, y = s - t$ , 求  $\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t}$ .
3. 设  $u = e^{xyz}$ , 而  $x = rs, y = \frac{r}{s}, z = r^s$ , 求  $\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial s}$ .
4. 设  $z = x^2 \ln y$ , 而  $x = \frac{u}{v}, y = 3u - 2v$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ .
5. 设  $z = \arcsin(x - y)$ , 而  $x = 3t, y = 4t^3$ , 求  $\frac{dz}{dt}$ .
6. 设  $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ , 而  $x = e^t, y = t, z = \ln t$ , 求  $\frac{du}{dt}$ .
7. 设  $u = \ln(e^x + e^y)$ , 而  $y = e^x$ , 求  $\frac{du}{dx}$ .
8. 设  $u = \arcsin \frac{x}{y}$ , 其中  $y = \sqrt{x^2 + 1}$ , 求  $\frac{du}{dx}$ .
9. 设  $u = \frac{e^{ay}(y - z)}{a^2 + 1}$ , 其中  $y = a \sin x, z = \cos x$ , 求  $\frac{du}{dx}$ .
10. 设  $u = \arcsin(x + y + z)$ , 其中  $z = \sin(xy)$ , 求  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ .
11. 设  $u = \rho^2 + \varphi^2 + \theta^2$ , 其中  $\rho = \tan(\varphi\theta)$ , 求  $\frac{\partial u}{\partial \varphi}, \frac{\partial u}{\partial \theta}$ .

12. 设  $u=f(\xi, \eta)$ , 其中  $\xi=t^3, \eta=2t^2$ , 求  $\frac{du}{dt}$ .

13. 设  $u=f(x, y, z)$ , 其中  $x=\sin t, y=\cos t, z=e^t$ , 求  $\frac{du}{dt}$ .

14. 设  $u=f(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$ , 求  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

15. 设  $u=f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$ , 求  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$

16. 设  $z=f(x^2-y^2, e^{xy})$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$

17. 设  $u=f(x, xy, xyz)$ , 求  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

18. 设  $z=f(xy)$ , 证明  $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

19. 设  $z=f\left(\ln x + \frac{1}{y}\right)$ , 证明  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

20. 试证: 方程  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 6 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$  经变换

$$\xi = x + y, \eta = 3x - y \text{ 后变成 } \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

21. 试证: 方程  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \sin^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$  经

$$\text{变换 } \xi = x - \sin x + y, \eta = x + \sin x - y \text{ 后变成 } \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

22. 设  $z = xy + xF\left(\frac{y}{x}\right)$ , 其中  $F$  是任意可微分的函数, 试证:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + xy.$$

23. 设  $u = \sin x + F(\sin y - \sin x)$ , 其中  $F$  是任意的可微函数,

试证:  $\frac{\partial u}{\partial y} \cos x + \frac{\partial u}{\partial x} \cos y = \cos x \cos y$ .

24. 设  $z = x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right)$ , 其中  $f$  是任意的可微函数, 试证:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = nz.$$

25. 如果一个多元函数的每个自变量都乘以任意正数  $t$  时, 就相当于这函数乘以  $t^m$ , 则称该多元函数是这些自变量的  $m$  次齐次函数.

设函数  $f(x, y, z)$  是  $k$  齐次可微函数, 证明: 对任意的  $x, y, z$ , 恒有

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = kf.$$

26. 若  $f(x, y)$  满足:  $xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = nf(x, y)$ , 证明:  $f(x, y)$  是  $n$  次齐次函数.

(提示: 作函数  $F(t) = \frac{f(tx, ty)}{t^n}$ )

27. 设  $u = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$ , 证明  $u$  满足方程  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ .

28. 求方程  $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$  满足条件  $z(x, x^2) = 1$  的解  $z = z(x, y)$ .

29. 设  $u = f(x, y)$ , 当  $y = x^2$  时有  $u = 1, \frac{\partial u}{\partial x} = x$ , 求当  $y = x^2$  时的  $\frac{\partial u}{\partial y}$ .

30. 设  $u = u(x, y)$  满足方程  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  以及条件  $u(x, 2x) = x, u'_x(x, 2x) = x^2$ , 求  $u''_{xx}(x, 2x), u''_{xy}(x, 2x), u''_{yy}(x, 2x)$ .

31. 解下列方程 ( $u = u(x, y)$ ):

$$(1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \quad (2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0;$$

$$(3) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

32. 求下列复合函数的一阶全微分  $du$ :

$$(1) u = f(t), t = x + y;$$

$$(2) u = f(t), t = xyz;$$

$$(3) u = f(t), t = x^2 + y^2 + z^2;$$

$$(4) u = f(\xi, \eta), \text{其中 } \xi = ax, \eta = by;$$

$$(5) u = f(\xi, \eta), \text{其中 } \xi = xy, \eta = \frac{x}{y};$$

$$(6) u = f(x, y, z), \text{其中 } x = t, y = t^2, z = t^3;$$

$$(7) u = f(\xi, \eta), \text{其中 } \xi = x + y + z, \eta = x^2 + y^2 + z^2;$$

$$(8) u = f(\xi, \eta, \xi), \text{其中 } \xi = x^2 + y^2, \eta = x^2 - y^2, \xi = 2xy.$$

## 6.4 隐函数的微分法

### 6.4.1 多元方程所确定的隐函数及其微商

过去所讨论的一元函数和多元函数,都是用自变量的一个表达式直接给出,因此也称为显函数.在许多情况下,在变量的一定变化范围内,一个多元方程也能给出变量间的函数关系,这种由方程所确定的函数关系称为隐函数.

多元方程给出函数关系的先决条件是方程必须有解.无解方程,例如  $x^2 + y^2 + 1 = 0$ ,不给出任何函数关系.其次,方程给出函数关系的方式也是多种多样的:方程  $xy + x + y - 1 = 0$ ,既可解出  $y = \frac{1-x}{1+x}$ ,也可解出  $x = \frac{1-y}{1+y}$ ;方程  $x - y^2 + \sin y = 0$ ,可以解出  $x = y^2 - \sin y$ ,但解不出  $y$  依赖于  $x$  的表达式;方程  $\frac{x^2}{2x^2 + \sin x + 1} e^{-y}$

$-y=0$  中尽管写不出  $y$  依赖于  $x$  的初等函数表达式,但可以证明,对于  $x$  的每一个实数值,有且仅有一个  $y$  值,使得  $(x, y)$  满足方程式(习题),也就是说,方程确定了变量  $y$  依赖于  $x$  的函数关系;从方程  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  可以解出两个二值函数  $y = \pm \sqrt{1-x^2}$  和  $x = \pm \sqrt{1-y^2}$ ,但如果我们限定  $(x, y)$  在范围  $x < 0$  或在范围  $y \geq 0$  内变化时,则由方程可分别确定函数  $x = -\sqrt{1-y^2}$  ( $-1 < y < 1$ ) 和函数  $y = \sqrt{1-x^2}$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ). 我们自然要问,在什么样的条件下,可由方程唯一地确定一个函数关系? 又当这个隐函数不能表示成显式时,它是否是连续可微的? 下面的隐函数存在定理回答了这些问题:

**定理 1** 设二元函数  $F(x, y)$  在点  $M_0(x_0, y_0)$  的一个邻域内连续且有连续的偏导数  $F'_x(x, y)$  和  $F'_y(x, y)$ , 并设

$$F(x_0, y_0) = 0, F'_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

则在  $M_0$  在某个邻域内, 方程

$$F(x, y) = 0$$

唯一地确定了一个函数  $y = y(x)$ , 它在  $x_0$  的某个邻域内有定义、连续、有连续的导数, 并且满足

$$y(x_0) = y_0, F(x, y(x)) \equiv 0.$$

**定理 2** 设三元函数  $F(x, y, z)$  在点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  的一个邻域内连续且有连续的偏导数  $F'_x(x, y, z)$ 、 $F'_y(x, y, z)$  和  $F'_z(x, y, z)$ , 并设

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0, F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

则在  $M_0$  的某个邻域内, 方程

$$F(x, y, z) = 0$$

唯一地确定了一个函数  $z = z(x, y)$ , 它在  $(x_0, y_0)$  的某个邻域内有定义、连续、有连续的偏导数  $\frac{\partial z}{\partial x}$  和  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , 并且满足

$$z(x_0, y_0) = z_0, F(x, y, z(x, y)) \equiv 0.$$

读者容易仿照以上定理,写出  $n+1$  元方程的隐函数存在定理.

第九章将给出定理的证明.我们要根据定理给出隐函数的微商法则.事实上,将恒等式

$$F(x, y(x)) \equiv 0$$

两边对  $x$  求导得

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0,$$

只要  $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ , 就有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

对于三元方程确定的可微隐函数  $z = z(x, y)$ , 同样可由恒等式

$$F(x, y, z(x, y)) \equiv 0$$

两边对  $x$  求偏导得

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

当  $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$  时, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

同理,  $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$  时可得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

**例 1** 设  $z = z(x, y)$  是由方程  $e^z - xyz = 0$  所确定的隐函数,

求  $\frac{\partial z}{\partial x}$  与  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

解 因  $F(x, y, z) = e^z - xyz$ , 故得

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -yz, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -xz, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = e^z - xy.$$

代入上述公式给出

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{e^z - xy} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{e^z - xy}.$$

或利用  $e^z = xyz$  可化简成

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x(z-1)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y(z-1)}.$$

关于计算隐函数的高阶微商, 只需对这个隐函数所满足的恒等式多次运用复合函数的微商法则求导即可. 下面仅举一例以见一般.

例 2 设  $z = z(x, y)$  是由方程  $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$  所确定的隐函数, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ .

解 将所给方程对  $x$  与  $y$  求偏微商得

$$ax + cz \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$by + cz \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{ax}{cz}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{by}{cz}.$$

再将  $\frac{\partial z}{\partial x}$  所满足的上述等式对  $x$  及  $y$  求微商,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  所满足的等式对  $y$  求微商就得到

$$a + c \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + cz \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

$$c \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + cz \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$b + c \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + cz \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

将  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$  的表达式代入并化简后即得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{acz^2 + a^2 x^2}{c^2 z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{abxy}{c^2 z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{bcz^2 + b^2 y^2}{c^2 z^3}.$$

#### 6.4.2 方程组所确定的隐函数组及其微商

隐函数存在定理可以推广到方程组的情形. 一般说来, 这时方程的个数可以是多个, 但为叙述方便, 这里只考虑由两个方程所构成的方程组.

**定理** 设四元函数  $F(x, y, u, v)$  和  $G(x, y, u, v)$  都在点  $M_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$  的一个邻域内连续且对每个自变量都有连续的偏导数, 并设

$F(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0, G(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$ , 当  $M = M_0$  时, 雅可比(Jacobi)行列式为

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则在  $M_0$  的某个邻域内, 方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$$

唯一地确定了一个函数组

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

它们在  $(x_0, y_0)$  的某个邻域内有定义、连续、对各自变量有连续的

偏导数,并且满足

$$\begin{cases} u(x_0, y_0) = u_0 \\ v(x_0, y_0) = v_0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} F(x, y, u(x, y), v(x, y)) = 0 \\ G(x, y, u(x, y), v(x, y)) = 0 \end{cases}$$

为了给出隐函数组的偏微商之表达式,将恒等式

$$\begin{cases} F(x, y, u(x, y), v(x, y)) \equiv 0 \\ G(x, y, u(x, y), v(x, y)) \equiv 0 \end{cases}$$

分别对  $x$  和  $y$  求偏微商得

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

这是一个关于  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$  的二元一次联立方程. 若其系数行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$$

不为零,则解这组方程得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{-\partial(F, G) / \partial(x, v)}{\partial(F, G) / \partial(u, v)}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{-\partial(F, G) / \partial(u, x)}{\partial(F, G) / \partial(u, v)}; \end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{\partial(F, G) / \partial(y, v)}{\partial(F, G) / \partial(u, v)}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= - \frac{\partial(F, G) / \partial(u, y)}{\partial(F, G) / \partial(u, v)}. \end{aligned}$$

例 1 证明方程组

$$\begin{cases} u^2 - v + x = 0 \\ u + v^2 - y = 0 \end{cases}$$

在点(0,0)的某一邻域内确定  $u, v$  是  $x, y$  的隐函数组, 并求其对  $x$  的偏微商  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ .

证 令

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = u^2 - v + x \\ G(x, y, u, v) = u + v^2 - y \end{cases}$$

因为

$$F(0, 0, 0, 0) = 0, G(0, 0, 0, 0) = 0,$$

且行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & -1 \\ 1 & 2v \end{vmatrix} = 1 + 4uv$$

在点(0,0,0,0)处不为零. 所以在(0,0)的邻域内, 连续可微的隐函数组  $u = u(x, y), v = v(x, y)$  存在.

又由

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2v \end{vmatrix} = 2v,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2v}{1+4uv}, \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{1+4uv},$$

这里自然假设  $1+4uv \neq 0$ .

作为上述定理的一个重要的特殊情形, 下面再来考察方程组

$$\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases},$$

如果从中能确定出变量  $x, y$  是变量  $u, v$  的函数  $x=x(u, v), y=y(u, v)$ , 则称它为函数  $u=u(x, y), v=v(x, y)$  的反函数组. 因为这时

$$F(x, y, u, v) = u - u(x, y),$$

$$G(x, y, u, v) = v - v(x, y).$$

应用方程组的隐函数存在定理就得到下述反函数存在的判别法则:

设函数  $u(x, y), v(x, y)$  在点  $(x, y)$  的某一邻域内有连续的偏微商, 且行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

不为零, 则在与点  $(x, y)$  对应的点  $(u, v)$  的邻域中, 存在反函数  $x=x(u, v), y=y(u, v)$ , 它们连续, 对变量  $u, v$  有连续的偏微商, 并且满足条件

$$u \equiv u(x(u, v), y(u, v)),$$

$$v \equiv v(x(u, v), y(u, v)).$$

至此, 读者不难求出反函数微商的一般公式. 这里, 只举例说明求这种微商的方法.

**例 2** 考虑极坐标变换  $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ , 试计算其反变换的微商.

**解** 将此变换中的  $r, \theta$  看成是  $x, y$  的函数两边对  $x$  求导得

$$\cos\theta \frac{\partial r}{\partial x} - r\sin\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} = 1,$$

$$\sin\theta \frac{\partial r}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0.$$

它是关于  $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial x}$  的二元一次联立方程. 解之得

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r} = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

同理可得

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

从上面这些例子中看到,求隐函数的微商,并不涉及任何新的运算,也不需要去记一些公式.正如对复合函数求导一样,重要的是在于掌握其方法.首先分清在所给的方程中,哪些量是自变量,哪些量被选定为自变量的函数.然后关于这些自变量按链式法则求导,从而不难解得隐函数的微商.

### 复习思考题

1. 仿照定理 1 和定理 2, 写出一个四元方程确定一个三元函数的隐函数存在定理.

2. 设  $u=u(x, y, z)$  和  $v=v(x, y, z)$  是由方程组

$$\begin{cases} F(x, y, z, u, v) = 0 \\ G(x, y, z, u, v) = 0 \end{cases}$$

确定的可微隐函数组, 试写出  $\frac{\partial u}{\partial z}$  和  $\frac{\partial v}{\partial z}$  的表达式.

### 习题 6.4

1. 设二元方程

$$\frac{x^2}{2x^2 + \sin x + 1} e^{-y} - y = 0,$$

试证对任意的实数  $x$ , 有且仅有一个  $y$  值, 使  $(x, y)$  满足方程式.

2. (1)  $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ ;

(2)  $\sin(xy) - e^{xy} - x^2 y = 0$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ ;

(3)  $\ln \sqrt{x^2+y^2} = \arctan \frac{y}{x}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$  和  $\frac{d^2y}{dx^2}$ ;

(4)  $x^y = y^x$ , 求  $\frac{dy}{dx}$  和  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

3. 在下列方程中, 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ .

(1)  $e^x - xyz = 0$ ;

(2)  $z^2 y - xz^3 - 1 = 0$ ;

(3)  $x^3 + y^3 + z^3 - 3axyz = 0$ ;

(4)  $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$ .

4. 证明: 当  $1+xy=k(x-y)$  (其中  $k$  为常数) 时有等式  $\frac{dx}{1+x^2} = \frac{dy}{1+y^2}$ .

5. 证明: 若  $x^2 y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0$ , 则当  $xy > 0, |x| < 1, |y| < 1$  时有等式  $\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0$ .

6. 设  $z=z(x,y)$  是由方程

$$2\sin(x+2y-3z) = x+2y-3z$$

所确定的隐函数, 试证:  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ .

7. 设  $z=z(x,y)$  是由满足隐函数存在定理的方程  $\varphi(cx-az, cy-bz) = 0$  所确定的隐函数, 试证: 不论  $\varphi$  为怎样的可微函数, 只要  $\frac{\partial}{\partial z} \varphi(cx-az, cy-bz) \neq 0$ , 都有  $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = c$ .

8. 设  $z=z(x,y)$  是由方程  $F(x+zy^{-1}, y+zx^{-1}) = 0$  所确定的隐函数, 证明:  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$ .

9. 设  $x=x(y,z), y=y(x,z), z=z(x,y)$  都是由方程  $F(x, y, z) = 0$  所确定的隐函数, 证明:

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

10. 试求由方程  $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$  所确定的函数  $z(x, y)$  的全微分  $dz$ .

11. 试求由方程  $xyz = x + y + z$  所确定的隐函数  $z = z(x, y)$  的全微分  $dz$ .

12. 试求由方程  $u^3 - 3(x+y)u^2 + z^3 = 0$  所确定的函数  $u = u(x, y, z)$  的全微分  $du$ .

13. 求出当  $x = 2.001, y = 0.998$  时, 由方程  $2xz - 2xyz + \ln(xyz) = 0$  所确定的  $z(x, y)$  的近似值.

14. 设  $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2) = 0$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

15. 设  $F(x-y, y-z, z-x) = 0$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$  和  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

16. 设  $F(xz, yz) = 0$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ .

17. 求由方程组  $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20 \end{cases}$  所确定的函数  $y = y(x)$

及  $z = z(x)$  的微商  $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ .

18. 求由方程组  $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$  所确定的函数  $y = y(x)$  及  $z =$

$z(x)$  的微商  $\frac{dy}{dx}$  和  $\frac{dz}{dx}$ .

19. 设  $x + y + z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , 求  $\frac{dx}{dz}$  和  $\frac{dy}{dz}$ .

20. 设  $u = u(x, y), v = v(x, y)$  是由方程组

$$\begin{cases} u^2 + v^2 + x^2 + y^2 = 1 \\ u + v + x + y = 0 \end{cases}$$

所确定的隐函数组, 求  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ .

21. 设  $xu - yv = 0, yu + xv = 1$ , 求  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$  和  $\frac{\partial v}{\partial y}$ .

22. 设  $u+v=x+y$ ,  $\frac{\sin u}{\sin v} = \frac{x}{y}$ , 求  $du, dv$ .

23. 设  $x=t+t^{-1}$ ,  $y=t^2+t^{-2}$ ,  $z=t^3+t^{-3}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$  和  $\frac{dz}{dx}$ .

24. 求由方程  $\begin{cases} x=x(u, v) \\ y=y(u, v) \end{cases}$  所确定的反函数  $\begin{cases} u=u(x, y) \\ v=v(x, y) \end{cases}$  的偏微商  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ .

25. 设  $z=x^2+y^2$ , 其中  $y=y(x)$  为由方程  $x^2-xy+y^2=1$

所定义的函数, 求  $\frac{dz}{dx}$  及  $\frac{d^2z}{dx^2}$ .

26. 设  $y=f(x+t)$ , 而  $t$  是由方程  $y+g(x, t)=0$  所确定的  $x, y$  的函数, 求  $\frac{dy}{dx}$ .

27. 设方程组  $\begin{cases} pu+qv-t^2=0 \\ qu+pv-s^2=0 \end{cases}$  ( $p^2-q^2 \neq 0$ ) 确定隐函数

$\begin{cases} u=u(s, t) \\ v=v(s, t) \end{cases}$  及反函数  $\begin{cases} s=s(u, v) \\ t=t(u, v) \end{cases}$ , 求证:

$$\frac{\partial t}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{p^2}{p^2-q^2}.$$

28. 函数  $u=u(x, y)$  由方程组

$$u=f(x, y, z, t), g(y, z, t)=0, h(z, t)=0$$

定义, 求  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ .

## 6.5 向量值函数的求导, 空间曲线的切向量和空间曲面的法向量

### 6.5.1 一元向量值函数及其微商

在第五章里, 我们已经学习了向量及它们的各种运算, 并讨论

了这些运算的性质. 在固定的直角坐标系下, 向量可以用它的坐标来表示. 今后我们总是在固定的直角坐标系下来讨论问题. 为方便, 引进下面记号:

$$\mathbf{R}^2 = \{r | r = (x, y), x, y \text{ 为实数}\},$$

$$\mathbf{R}^3 = \{r | r = (x, y, z), x, y, z \text{ 为实数}\}.$$

于是,  $\mathbf{R}^2$  和  $\mathbf{R}^3$  分别表示二维和三维欧氏空间.

给定一个点  $M$ , 可作向量  $r = \overrightarrow{OM}$ , 称它为点  $M$  的向径. 显然点与它的向径有相同的坐标, 因此我们常用点的向径来确定点的位置. 设  $r_1$  和  $r_2$  分别是点  $M_1$  和  $M_2$  的向径, 则  $r_2 - r_1 = \overrightarrow{M_1M_2}$ , 由此可得

$$|r_2 - r_1| = \rho(M_1, M_2),$$

这样, 由距离的三角不等式直接得到关于向量模的三角不等式:

$$|r_2 - r_1| \leq |r_2 - r_3| + |r_1 - r_3|.$$

今后, 我们常不去区分点与它的向径, 例如常将  $|r_2 - r_1|$  写成  $\rho(r_2, r_1)$ .

下文中凡提到  $\mathbf{R}^n$ , 都指  $n=2$  或  $n=3$ , 但实际上, 下文所述的一些命题, 都可推广到  $n$  是任意自然数的情形.

称从实数的子集到  $\mathbf{R}^n$  的映射为一个一元  $n$  维向量值函数. 例如, 映射  $r: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^3, r = r(t) = (x(t), y(t), z(t))$  为一个一元三维向量值函数. 显然, 一个一元三维向量值函数相关于三个一元函数的有序组.

设  $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$  是定义在  $[\alpha, \beta]$  上的一元三维向量值函数,  $t_0 \in (\alpha, \beta)$ , 若存在向量  $a = (a_1, a_2, a_3)$ , 使得  $\lim_{t \rightarrow t_0} |r(t) - a| = 0$ , 则称向量值函数  $r(t)$  当  $t$  趋于  $t_0$  时收敛, 并称  $a$  为  $r(t)$  的极限, 记作

$$\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = a$$

下面的不等式显然成立:

$$\begin{aligned}
& |x(t) - a_1| \\
& |y(t) - a_2| \leq \sqrt{x(t) - a_1)^2 + (y(t) - a_2)^2 + (z(t) - a_3)^2} \\
& |z(t) - a_3| \\
& = |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| \\
& \leq |x(t) - a_1| + |y(t) - a_2| + |z(t) - a_3|, (*)
\end{aligned}$$

由此可知,  $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = (a_1, a_2, a_3)$  当且仅当

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a_1, \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = a_2, \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = a_3$$

同时成立, 即向量值函数收敛当且仅当它的各坐标函数都收敛.

如果  $\lim_{t \rightarrow t_0} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)| = 0$ , 则称向量值函数  $\mathbf{r}(t)$  在  $t_0$  处连续.

由(\*)可知,  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  在  $t_0$  处连续当且仅当  $x(t)$ 、 $y(t)$  和  $z(t)$  都在  $t_0$  处连续, 即向量值函数在一点连续当且仅当它的各坐标函数都在这一点连续.

如果存在一个向量  $\mathbf{a}$ , 使得

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0} - \mathbf{a} \right| = 0,$$

则称  $\mathbf{r}(t)$  在  $t_0$  处可微, 并称  $\mathbf{a}$  为  $\mathbf{r}(t)$  在  $t_0$  处的微商. 记作  $\mathbf{r}'(t_0)$ , 即

$$\mathbf{r}'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0}.$$

由(\*)式易得,  $\mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ , 即: 求向量值函数在一点的微商, 可以通过对它的各个坐标函数同时在这一点求微商得到.

与一元函一样, 可定义  $\mathbf{r}(t)$  的微分为

$$d\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) dt.$$

### 6.5.2 简单曲线与逐段光滑曲线, 空间曲线的切向量

一个一元三维向量值函数  $\mathbf{r}: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  ( $t \in [\alpha, \beta]$ ), 它将线段  $[\alpha, \beta]$  上任意一点映为空间中以  $\mathbf{r}(t)$  为

向径的一点  $M(x(t), y(t), z(t))$ , 当  $t$  在区间  $[\alpha, \beta]$  上变动时, 象点  $M=M(t)$  也随之变动, 通常, 我们把  $[\alpha, \beta]$  的所有的象点的全体称为一条空间曲线. 如果  $r(t)$  在  $[\alpha, \beta]$  连续, 那么  $t$  从  $\alpha$  连续增加到  $\beta$  时, 以  $r(t)$  为向径的点  $M$  在空间中连续地描出一段曲线, 我们称它为一条连续曲线. 如果对  $[\alpha, \beta]$  中的任意两点  $t_1 \neq t_2$ , 只要它们不同时为  $[\alpha, \beta]$  的端点, 都有  $r(t_1) \neq r(t_2)$ , 则称曲线是不自交的. 不自交连续曲线称为简单曲线或若当(Jordan)曲线. 若  $r=r(t)$  ( $t \in [\alpha, \beta]$ ) 是一条简单曲线且有  $r(\alpha)=r(\beta)$ , 则称此曲线为简单闭曲线.

用一元向量值函数  $r=r(t)$  表示曲线上的点的向径, 也可称为曲线的向径式方程, 它等价于以下方程组:

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

我们称它为空间曲线的参数方程. 由向径式方程和参数方程给出的曲线常被简称为参数曲线.

因为向量  $\frac{r(t)-r(t_0)}{t-t_0}$  是平行于割线  $M_0M$  的一个向量(这里  $M_0$  和  $M$  分别表示以  $r(t_0)$  和  $r(t)$  为向径的点), 并且不论  $t > t_0$  或  $t < t_0$ , 这个向量的方程总是指向  $t$  增加的方向, 所以作为它的极限向量,  $r'(t_0)$  必平行于割线的极限位置—— $M_0$  处的切线, 并且  $r'(t_0)$  的方向总是指向  $t$  增加的方向. 如果用  $r(t_0)$  表示运动质点在  $t_0$  时刻所在位置的向径, 那么  $r'(t_0)$  恰表示质点在  $t_0$  时刻的速度. 当  $r'(t_0) \neq 0$  时, 我们称  $r'(t_0)$  为曲线在  $M_0$  处的切向量, 因为它确实表示了曲线在  $M_0$  处的切线的一个方向. 有了切向量, 容易写出曲线在  $M_0$  处的切线方程, 它是

$$\frac{X-x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{Y-y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{Z-z(t_0)}{z'(t_0)},$$

其中  $(X, Y, Z)$  表示切线上动点的坐标. 同样, 还可以写出曲线在

$M_0$  处的法平面(即过  $M_0$ , 并以  $M_0$  处切线方向为法方向的平面)方程,它是

$$x'(t_0)(X-x(t_0)) + y'(t_0)(Y-y(t_0)) + z'(t_0)(Z-z(t_0)) = 0,$$

其中  $(X, Y, Z)$  表示法平面上动点的坐标.

值得注意的是,当  $\mathbf{r}'(t_0) = \mathbf{0}$  时,我们已无法从  $\mathbf{r}'(t_0)$  来得到曲线在  $M_0$  处的切线方向,甚至不能判定曲线在该点的切线是否存在. 我们来观察以下两条曲线:

$$L_1: \mathbf{r}_1(t) = \begin{cases} (t^3, t^3, t^3) & t \geq 0 \\ (t^3, 2t^3, 3t^3) & t < 0 \end{cases},$$

$$L_2: \mathbf{r}_2(t) = (t^3, t^3, t^3) \quad (-\infty < t < +\infty),$$

易得  $\mathbf{r}_1'(0) = \mathbf{r}_2'(0) = \mathbf{0}$ . 注意到  $L_2$  是一条过原点的直线  $x=y=z$ , 它在坐标原点有切线存在; 而  $L_1$  是由从坐标原点出发, 方向不平行的两条射线构成, 可见  $L_1$  在坐标原点处的切线是不存在的. 由此可知, 当  $\mathbf{r}'(t_0) = \mathbf{0}$  时, 我们不能断言曲线在  $M_0$  处是否有切线存在. 今后, 我们称使得  $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}$  的曲线上的点  $M$  (它以  $\mathbf{r}(t)$  为向径) 为曲线方程的奇点. 一般, 曲线方程的奇点还与所取的参数  $t$  有关.

设  $\mathbf{r}: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}^3, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ , 如果  $\mathbf{r}'(t)$  在  $(\alpha, \beta)$  连续且它处处不为零向量, 这时在  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  所表示的曲线上有连续变化的切线, 我们称这样的曲线为光滑曲线. 设  $\mathbf{r}: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^3, \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ , 如果  $\mathbf{r}'(t)$  在  $(\alpha, \beta)$  连续且处处不为零,  $\lim_{t \rightarrow \alpha+0} \mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}'_+(\alpha) \neq \mathbf{0}$ ,  $\lim_{t \rightarrow \beta-0} \mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}'_-(\beta) \neq \mathbf{0}$ , 则称  $\mathbf{r}(t)$  所表示的曲线段为光滑曲线段. 如果一条曲线, 它是由有限条光滑曲线段连接而成, 则称它为一条逐段光滑的曲线. 若一条逐段光滑曲线, 它又是一条简单闭曲线, 我们称它为一条闭路.

利用微分表示切向量是方便的. 因为  $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t) dt$ , 所以当  $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$  且  $dt \neq 0$  时,  $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$  也表示曲线的一个切方向.

由一元函数  $y = f(x) (a \leq x \leq b)$  所表示的平面曲线, 可看成

是一条特殊的空间曲线,其方程是

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)=(x, f(x), 0), x \in [a, b],$$

当  $f'(x)$  存在时,

$$\mathbf{r}'(t)=(1, f'(x), 0)$$

总是非零向量,所以由方程  $y=f(x)$  所表示的平面曲线,只要  $f'(x)$  连续,它一定是一条光滑曲线.

### 6.5.3 二元向量值函数的偏微商,空间曲面的法向量

我们称从  $\mathbf{R}^2$  的子集到  $\mathbf{R}^n$  的映射为二元  $n$  维向量值函数. 在本小节里,我们仅在  $n=3$  的情况下来叙述有关结论,有些结论,可平行地搬到  $n=2$  的情形,甚至可以推广到  $m$  元  $n$  维向量值函数的情况中去.

设映射  $\mathbf{r}:D \rightarrow \mathbf{R}^3, D \subset \mathbf{R}^2, \mathbf{r}=\mathbf{r}(u, v)=(x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in D$ , 则  $\mathbf{r}(u, v)$  是  $D$  上的一个二元三维向量值函数. 易见,一个二元三维向量值函数,相当于三个二元函数的有序组.

类似于 6.5.1 的讨论可得,一个二元向量值函数在一点连续当且仅当它的各坐标函数都在这点连续;还可以得到,一个二元向量值函数对一个自变量的偏微商,其结果仍是一个向量,它的各个坐标分别等于所给向量值函数的各相应的坐标函数对于指定自变量的偏微商.

类似于多元函数的可微和微分的定义,可以规定多元向量值函数的可微和微分的意义. 可以证明,一个二元向量值函数在一点可微当且仅当它的各个坐标函数都在这点可微,并且有

$$d\mathbf{r}=(dx(u, v), dy(u, v), dz(u, v)). \quad (1)$$

由二元函数的微分及(1)式可得

$$d\mathbf{r}=\mathbf{r}'_u du + \mathbf{r}'_v dv. \quad (2)$$

由二元函数全微分形式的不变性,可得到二元向量值函数的全微分形式的不变性,即无论  $u$  和  $v$  是自变量或者是中间变量,(2)式总是成立的. 此外,当  $\mathbf{r}(u, v)$  在  $(u, v)$  处可微时,还有

$$|\Delta \mathbf{r} - d\mathbf{r}| = o(\sqrt{du^2 + dv^2}), \text{ 当 } (du, dv) \rightarrow (0, 0) \text{ 时,}$$

其中  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(u+du, v+dv) - \mathbf{r}(u, v)$ .

二元三维向量值函数  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), (u, v) \in D$  将  $uv$  平面上的

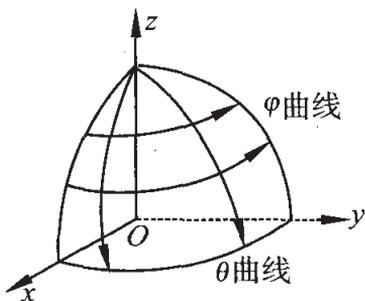


图 6.6

集合  $D$  上任意一点  $(u, v)$  映为空间中以  $\mathbf{r}(u, v)$  为向径的点  $M$ , 当  $(u, v)$  在定义域内变化时, 象点  $M$  的全体在空间中形成一个图形, 通常称它为由  $\mathbf{r}(u, v)$  给出的空间曲面. 取定一个  $v$  值, 让  $u$  在其允许值内变化时, 向径  $\mathbf{r}(u, v)$  的终点就在曲面上画出一条曲线, 称为  $u$ -曲线, 让  $v$  值在其允许值范围内变动, 相应于  $v$  值的  $u$ -曲线就在曲面上变动, 并扫出整个曲面; 同样, 固定  $u$  值, 让  $v$

变动, 向径  $\mathbf{r}(u, v)$  的终点就在曲面上描出一条曲线, 称为  $v$ -曲线, 让  $u$  变遍所有的允许值, 相应于  $u$  值的  $v$ -曲线就扫出整个曲面. 整张曲面就是由这些  $u$ -曲线和  $v$ -曲线交织而成的. 例如球面

$$\mathbf{r} = (R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta) \quad (0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

中,  $\theta$  固定时所得到的  $\varphi$  曲线就是纬线, 而  $\varphi$  固定时所得的  $\theta$  曲线就是经线(图 6.6).

用曲面上动点的向径所满足的方程  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) ((u, v) \in D)$  来表示曲面, 称为曲面的向径式方程, 它等价于下面的方程组:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in D,$$

称此方程组为曲面的参数方程, 用向径式方程或参数方程来表示的曲面常被简称为参数曲面.

现在我们来说明参数曲面的一个重要的几何事实: 对于可微曲面  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ , 当  $\mathbf{n}_0 = \mathbf{r}'_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}'_v(u_0, v_0) \neq \mathbf{0}$  时,  $\mathbf{n}_0$  是曲面在  $M_0(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$  处的一个法向量. 事实上,

过  $M_0$  任作一条完全躺在曲面上的光滑曲线, 设其方程是

$$\mathbf{r} = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))),$$

$u(t_0) = u_0, v(t_0) = v_0$ , 求微分得该曲线在  $M_0$  的一个切向量为

$$\mathbf{r}'_u(u_0, v_0)du + \mathbf{r}'_v(u_0, v_0)dv,$$

它在  $\mathbf{r}'_u(u_0, v_0)$  与  $\mathbf{r}'_v(u_0, v_0)$  所在平面内, 由  $\mathbf{n}_0$  的定义可知, 它与以上切向量相垂直. 这样, 过  $M_0$  且躺在曲面上的任意一条光滑曲线在  $M_0$  处的切线都落在过  $M_0$  且以  $\mathbf{n}_0$  为法向量的平面内, 因此我们称过  $M_0$ 、以  $\mathbf{n}_0$  为法向量的平面为曲面在  $M_0$  处的切平面, 而称  $\mathbf{n}_0$  为曲面在  $M_0$  处的法向量.

一个在区域  $D$  内定义的三维向量值函数  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) ((u, v) \in D)$ , 如果  $\mathbf{r}'_u(u, v)$  和  $\mathbf{r}'_v(u, v)$  都在  $D$  内连续并且在  $D$  内处处有

$$\mathbf{n}(u, v) = \mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v) \neq \mathbf{0},$$

则称曲面  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) ((u, v) \in D)$  为一张光滑曲面. 如果  $\mathbf{r}'_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}'_v(u_0, v_0) = \mathbf{0}$ , 这时一般不能判定曲面在  $M_0$  处是否有切平面存在, 我们称这样的点  $M_0(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$  为曲面方程的奇点.

采用雅可比(Jacobi)行列式的记号, 由  $\mathbf{n} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$  可得

$$\mathbf{n} = \left( \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right).$$

当  $\mathbf{n}(u, v) \neq \mathbf{0}$  时, 为写出曲面在  $M(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  处的切平面和法线方程, 可用  $(X, Y, Z)$  表示切平面或法线上的动点的坐标, 这样, 曲面在  $M$  处的切平面方程是

$$\begin{aligned} \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}(X - x(u, v)) + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}(Y - y(u, v)) \\ + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(Z - z(u, v)) = 0, \end{aligned}$$

或者写成

$$\begin{vmatrix} X - x(u, v) & Y - y(u, v) & Z - z(u, v) \\ x'_u(u, v) & y'_u(u, v) & z'_u(u, v) \\ x'_v(u, v) & y'_v(u, v) & z'_v(u, v) \end{vmatrix} = 0;$$

曲面在  $M$  处的法线方程是

$$\frac{X-x(u,v)}{\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}} = \frac{Y-y(u,v)}{\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}} = \frac{Z-z(u,v)}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}.$$

由二元函数  $z=f(x,y)$  ( $(x,y) \in D$ ) 所表示的曲面是一类重要的曲面,常简称这种曲面为显式曲面,它可以看成是二元向量值函数的一个特例:

$$\mathbf{r}=(x,y,f(x,y)), (x,y) \in D.$$

若  $f'_x(x,y)$  和  $f'_y(x,y)$  都在  $D$  连续,则

$$\mathbf{r}'_x=(1,0,f'_x)$$

$$\mathbf{r}'_y=(0,1,f'_y),$$

$$\mathbf{n}=\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y=(-f'_x, -f'_y, 1),$$

这里  $\mathbf{r}'_x$  和  $\mathbf{r}'_y$  都连续且  $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ , 因此它是一张光滑曲面. 此外, 对于  $D$  内任意两个不同点  $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ , 恒有  $(x_1, y_1, f(x_1, y_1)) \neq (x_2, y_2, f(x_2, y_2))$ , 即显式曲面总是不自交的. 用  $(X, Y, Z)$  表示动点坐标, 容易写出显式曲面在点  $(x, y, f(x, y))$  处的切平面和法线方程, 它们分别是

$$-f'_x(x,y)(X-x) - f'_y(x,y)(Y-y) + Z - f(x,y) = 0.$$

和

$$\frac{X-x}{-f'_x(x,y)} = \frac{Y-y}{-f'_y(x,y)} = Z - f(x,y).$$

光滑的参数曲面与显式曲面有着密切的联系. 可以利用隐函数存在定理来证明, 对于定义在闭区域  $D$  上的光滑的参数曲面  $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$  ( $(u,v) \in D$ ), 总可将  $D$  分割成有限小块, 使得每一块在空间中的象曲面都可以表示成显式曲面的形式.

#### 6.5.4 隐式曲面的法向量, 两隐式曲面交线的切向量

设三元函数  $F(x,y,z)$  在  $(x_0, y_0, z_0)$  附近有一阶连续的偏微商  $F'_x, F'_y$  和  $F'_z$ , 又设  $F(x_0, y_0, z_0)=0$ , 而

$$(F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0)) \neq \mathbf{0},$$

那么,根据隐函数存在定理,方程  $F(x, y, z) = 0$  在  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  附近确定了一个连续可微的隐函数,因而在  $M_0$  附近给出了一张曲面.我们将由方程  $F(x, y, z) = 0$  所确定的曲面简称为隐式曲面.为求出隐式曲面在一点的法向量,我们在方程  $F(x, y, z) = 0$  两边求微分,并在点  $M_0$  取值,得

$$F_x'(M_0)dx + F_y'(M_0)dy + F_z'(M_0)dz = 0,$$

因为上式左端可看成向量  $(F_x'(M_0), F_y'(M_0), F_z'(M_0))$  与向量  $(dx, dy, dz)$  的数量积,所以上式表示向量  $(F_x'(M_0), F_y'(M_0), F_z'(M_0))$  与向量  $(dx, dy, dz)$  是垂直的.又因为向量  $(dx, dy, dz)$  表示躺在曲面上过  $M_0$  的任意一条光滑曲线在  $M_0$  处的切向量,而这些切向量与一个固定向量  $(F_x'(M_0), F_y'(M_0), F_z'(M_0))$  都垂直,所以所有躺在曲面上过  $M_0$  的光滑曲线在  $M_0$  处的切线都在过  $M_0$  且以向量  $(F_x'(M_0), F_y'(M_0), F_z'(M_0))$  为法向量的平面内,也就是说,向量  $(F_x'(M_0), F_y'(M_0), F_z'(M_0))$  是隐式曲面  $F(x, y, z)$  在  $M_0$  处的一个法向量.显式曲面可以看成隐式曲面的特殊形式.例如对显式曲面  $z - f(x, y) = 0$  求微分,可得它的一个法向量是  $(-f_x', -f_y', 1)$ ,这与前面所求得的结果是一致的.

**例 1** 试用不同方法计算球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  在点  $(x, y, z)$  处的法向量,并比较所得结果.

**解** (1)  $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$  是球面的隐式方程,由隐式曲面法向量的求法,求得一个法向量为

$$\mathbf{n} = (2x, 2y, 2z) = 2\mathbf{r}.$$

(2) 利用参数方程,球面可由柱面坐标表示:

$$x = \sqrt{R^2 - z^2} \cos\varphi, y = \sqrt{R^2 - z^2} \sin\varphi, z = z.$$

于是,当  $|z| < R$  时

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}'_{\varphi} \times \mathbf{r}'_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sqrt{R^2 - z^2} \sin\varphi & \sqrt{R^2 - z^2} \cos\varphi & 0 \\ \frac{-z}{\sqrt{R^2 - z^2}} \cos\varphi & \frac{-z}{\sqrt{R^2 - z^2}} \sin\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$=xi + yj + zk = r,$$

并对  $|z| \leq R$  也成立.

(3) 由立体几何可知,球面上任一点处的切平面与过该点的半径垂直,从而得知  $r$  就是所要求的一个法向量.

三种方法所求得的结果是一致的. 但用参数方程计算时,要先选择适当的参数方程,否则应进行讨论,因而较繁琐.

例如,用显式方程,即取参数表示

$$x=x, y=y, z=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}.$$

于是,当  $z \neq 0$  时,  $n = r_x' \times r_y' = \frac{1}{|z|}r$ . 故应讨论

$x, y, z$  的符号;又如,若用球面坐标,就有参数方程

$$x=R\sin\theta\cos\varphi, y=R\sin\theta\sin\varphi, z=R\cos\theta.$$

于是,  $n = r_\theta' \times r_\varphi' = (R\sin\theta)r$ . 这时,实际上尚未求出  $\theta=0$  和  $\theta=\pi$  时的法向量,为求出球面在两极处的法向量,要改用另外的参数方程,例如用参数方程

$$x=R\cos t, y=R\sin t\cos s, z=R\sin t\sin s,$$

虽也可求出结果,但毕竟还要费些精力. 尽管如此,参数方程是我们的基本形式.

现在设  $F(x, y, z)$  和  $G(x, y, z)$  是三元函数,它们都在点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  附近有连续的偏微商,又设

$$F(M_0) = G(M_0) = 0,$$

$$(F_x'(M_0), F_y'(M_0), F_z'(M_0)) \times (G_x'(M_0), G_y'(M_0), G_z'(M_0)) \neq \mathbf{0},$$

那么,由隐函数存在定理可知,方程组

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

在  $(x_0, y_0, z_0)$  的某邻域内确定了一组连续可微的隐函数,从而它在  $M_0$  附近确定了一条过  $M_0$  的光滑曲线,它是曲面  $F(x, y, z) = 0$  的  $G(x, y, z) = 0$  的交线. 由于交线在  $M_0$  处的切线方程垂直于  $F(x, y, z) = 0$  及  $G(x, y, z) = 0$  的法向量,因此可取为

$$\begin{aligned} & (F_x'(M_0), F_y'(M_0), F_z'(M_0)) \times (G_x'(M_0), G_y'(M_0), G_z'(M_0)) \\ &= \left( \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}, \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}, \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} \right) \Big|_{M_0} \end{aligned}$$

例2 求曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2 \\ x^2 + y^2 = 2ax \end{cases}$$

在  $M_0(a, a, \sqrt{2}a)$  处的切线和法平面方程.

解 方程组所表示的曲线是球面与柱面的交线. 记

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4a^2,$$

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2ax,$$

算出  $F(x, y, z) = 0$  在  $M_0$  处的法向量为

$$\mathbf{n}_1 = (F_x', F_y', F_z') \Big|_{M_0} = (2a, 2a, 2\sqrt{2}a),$$

而  $G(x, y, z) = 0$  在  $M_0$  处的法向量为

$$\mathbf{n}_2 = (G_x', G_y', G_z') \Big|_{M_0} = (0, 2a, 0),$$

由此, 曲线在  $M_0$  处的一个切向量为

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (-4\sqrt{2}a^2, 0, 4a^2),$$

从而, 所求的切线方程是

$$\frac{x-a}{-\sqrt{2}} = \frac{y-a}{0} = \frac{z-\sqrt{2}a}{1},$$

或写成

$$\begin{cases} x + \sqrt{2}z = 3a \\ y = a \end{cases}$$

所求的法平面方程是

$$-\sqrt{2}(x-a) + 0(y-a) + (z-\sqrt{2}a) = 0,$$

化简得

$$\sqrt{2}x - z = 0.$$

\* 6.5.5  $R^m$  到  $R^n$  的映射,雅可比矩阵,  
雅可比行列式及其性质

在这一小节里,我们将用  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ,  $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$  和  $z = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_l)$  分别表示  $R^n$ 、 $R^m$  和  $R^l$  中的元素.

设映射  $y: D \rightarrow R^m, D \subset R^n, y = y(x)$ , 它相当于在  $D$  上给出了  $m$  个  $n$  元函数

$$\eta_j = \eta_j(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) (j=1, 2, \dots, m),$$

如果每个  $\eta_j$  都是  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  的可微函数, 则称映射  $y = y(x)$  是  $D$  上的可微映射, 称

$$y_{\xi_i}' = \left( \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_i}, \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_i}, \dots, \frac{\partial \eta_m}{\partial \xi_i} \right)^T \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

为映射  $y$  对  $\xi_i$  的偏导数, 其中  $T$  表示转置, 称矩阵

$$y_x' = \begin{pmatrix} \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_n} \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \eta_m}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \eta_m}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial \eta_m}{\partial \xi_n} \end{pmatrix}$$

为映射  $y = y(x)$  的雅可比矩阵.

现在设  $y = y(x)$  在  $x$  可微,  $z = z(y)$  在  $y (= y(x))$  处可微, 由复合函数的微商公式, 有

$$\frac{\partial \zeta_k}{\partial \xi_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \zeta_k}{\partial \eta_j} \frac{\partial \eta_j}{\partial \xi_i} \quad (i=1, 2, \dots, n; k=1, 2, \dots, l),$$

利用矩形乘法定义可得

$$z_x' = z_y' y_x',$$

这就是复合映射的雅可比矩阵的关系式.

如果  $m=n$ , 则可微映射  $y = y(x)$  的雅可比矩阵是个方阵, 它的行列式称为映射的雅可比行列式, 记作

$$\frac{\partial(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)} = \det \mathbf{y}_x'$$

其中  $\det \mathbf{y}_x'$  表示方阵  $\mathbf{y}_x'$  的行列式. 由矩阵乘积的行列式的性质可知, 当  $l=m=n$  时, 可微映射  $\mathbf{y}=\mathbf{y}(x)$  与可微映射  $\mathbf{z}=\mathbf{z}(y)$  的复合映射  $\mathbf{z}=\mathbf{z}(\mathbf{y}(x))$  的雅可比行列式为  $\det \mathbf{z}_y'$  和  $\det \mathbf{y}_x'$  的乘积, 即

$$\frac{\partial(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)} = \frac{\partial(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)}{\partial(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)} \cdot \frac{\partial(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)}$$

特别的, 设  $\mathbf{y}=\mathbf{y}(x)$  是  $\mathbf{R}^n$  到  $\mathbf{R}^n$  的可微映射, 且设它有可微的逆映射  $\mathbf{x}=\mathbf{x}(y)$ , 则有

$$\frac{\partial(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)} \cdot \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)}{\partial(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)} = \frac{\partial(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)}{\partial(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)} = 1,$$

利用上式, 可通过求映射的雅可比行列式来求得逆映射的雅可比行列式的值.

顺例指出:  $n$  阶微分方程通解  $y=\varphi(x, c_1, \dots, c_n)$  中  $n$  个任意常数独立是指  $\frac{\partial(\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)})}{\partial(c_1, c_2, \dots, c_n)} \neq 0$ .

### 复习思考题

1. 什么是向量值函数? 如何求出它的导数(偏导数)和微分?
2. 一元三维与二元三维向量值函数的几何意义是什么?
3. 什么叫空间曲线在一点的切向量? 什么叫空间曲面在一点处的法向量? 试分别写出参数曲面、显式曲面与隐式曲面的法向量的表达式.
4. 设空间曲线  $L$ :

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

则方程组

$$\begin{cases} F_x' dx + F_y' dy + F_z' dz = 0 \\ G_x' dx + G_y' dy + G_z' dz = 0 \end{cases}$$

有什么几何意义?

### 习题 6.5

1. 证明向量模的三角不等式

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \leq |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3| + |\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|.$$

2. 设  $\mathbf{r} = (a \sin t, -a \cos t, bt^2)$ ,  $a, b$  是常数, 求  $\mathbf{r}'(t)$  和  $\mathbf{r}''(t)$ .

3. 设  $\mathbf{r} = \left( \frac{t}{1+t}, \frac{1+t}{t}, t^2 \right) (t > 0)$ , 判断它是不是简单曲线, 是不是光滑曲线, 并求出它在  $t=1$  时的切线方程和法平面方程.

4. 证明曲线  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$  的切线与  $Oz$  轴成定角.

5. 设  $\mathbf{r}^0(t)$  是单位向量, 试证明  $\frac{d\mathbf{r}^0}{dt} \perp \mathbf{r}^0$ , 并证明它的几何意义.

6. 在曲线  $x=t, y=t^2, z=t^3$  上求一点, 使该点的切线平行于平面  $x+2y+z=4$ .

7. 设  $\mathbf{r} = a \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + b \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + c \cos \theta \mathbf{k} (0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi)$  (椭球面), 求  $\mathbf{r}_\theta', \mathbf{r}_\varphi'$  及曲面的法向量  $\mathbf{n}$ .

8. 设  $x = u \cos v, y = u \sin v, z = v (0 < u < a, 0 < v < 2\pi)$  (螺旋面的一部分), 求法方向.

9. 求曲面  $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$  在点  $(3, 4, -7)$  处的切平面方程和法线方程.

10. 求曲面  $z = \arctan \frac{y}{x}$  在点  $\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$  处的法向量, 并求出法向量与  $z$  轴夹角的余弦值.

11. 求曲面  $e^x - z + xy = 3$  在  $(2, 1, 0)$  处的法向量和切平面方程.

12. 求曲面  $4 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z$  在点  $(2, 3, 6)$  处的切平面与法线方程.

13. 求椭球面  $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$  上平行于平面  $x - y + 2z = 0$

的切平面方程.

14. 在曲面  $z=xy$  上求一点,使这点处的法线垂直于平面  $x+3y+z+9=0$ ,并写出这个法线方程.

15. 试证曲面  $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$  ( $a>0$ ) 上任何点处的切平面与各坐标轴的截距和等于  $a$ .

16. 试证曲面  $x^2+y^2+z^2=ax$  与曲面  $x^2+y^2+z^2=by$  互相正交.

17. 证明曲面  $x+2y-\ln z+4=0$  和  $x^2-xy-8x+z+5=0$  在点  $(2,-3,1)$  处相切(即有公共的切平面).

18. 求平面曲线  $x^3y+xy^3=3-x^2y^2$  在点  $(1,1)$  处的切线和法线方程.

19. 求平面曲线  $\cos(xy)=x+2y$  在  $(1,0)$  处的切线和法线方程.

20. 求曲线  $\begin{cases} y^2+z^2=25 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$  在点  $(1,3,4)$  处的切线和法平面方程.

21. 求曲线  $\begin{cases} 2x^2+3y^2+z^2=47 \\ x^2+2y^2=z \end{cases}$  在点  $(-2,1,6)$  处的切线和法平面方程.

22. 平面上有半径为 1 的圆及一点  $M_0$ ,过  $M_0$  作该圆切线的垂线,垂足为  $M$ , $M$  点的轨迹为一封闭曲线  $c$ ,求  $c$  所包围的面积  $S$ .

23. 在旋转椭球面  $\frac{x^2}{4}+y^2+z^2=1$  上求距平面  $x+y+2z=9$  最远和最近的点.

24. 设  $x=\arccos\theta, y=br\sin\theta$ , 求  $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ .

25. 设

$$\begin{cases} x=arsin\theta\cos\varphi \\ y=brsin\theta\sin\varphi, \\ z=crcos\theta \end{cases}$$

求雅可比行列式  $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}$ .

## 6.6 多元函数的泰勒公式与极值

### 6.6.1 二元函数的泰勒公式

单变量函数的泰勒公式在研究函数的局部性质时起很重要的作用,对于多变量函数亦有类似的泰勒公式.这里为简便起见,只讨论两个自变量的情形.对于多个自变量的一般情形,不难作类似的推广.

设  $z=f(x,y)$  是定义在某一平面区域  $G$  中的二元函数,并且在这个域内有直到  $n+1$  阶的所有形式的连续偏微商.在  $G$  中取定一点  $M_0(x_0,y_0)$ ,设  $h,k$  的定数,并设点  $M(x_0+h,y_0+k)$  与  $M_0$  的连线完全落在  $G$  内.由于线段  $MM_0$  的参数方程可以表成

$$x=x_0+th, y=y_0+tk (0 \leq t \leq 1),$$

所以当局限于线段  $MM_0$  上来考虑二元函数时,它就化成了  $t$  的一元函数  $f(x_0+th, y_0+tk)$ ,并以  $\varphi(t)$  记之,则有

$$\varphi(t) = f(x_0+th, y_0+tk).$$

于是

$$\varphi(0) = f(x_0, y_0), \varphi(1) = f(x_0+h, y_0+k).$$

将一元函数的泰勒公式应用于  $\varphi(t)$  得

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{\varphi''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}t^n \\ & + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!}t^{n+1}, \end{aligned}$$

其中  $\theta$  是区间  $(0,1)$  内的数.在上式中令  $t=1$ ,特别有

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}.$$

现在通过函数  $f(x,y)$  在偏微商来表达  $\varphi^{(m)}(0)$  ( $m=1,2,\dots$ ),

$n$ ) 及  $\varphi^{(n+1)}(\theta)$ .

利用复合函数的微商法则算得

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f(x_0 + th, y_0 + tk)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x_0 + th, y_0 + tk)}{\partial y} k,$$

所以

$$\varphi'(0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} k.$$

同样又得

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= \frac{\partial^2 f(x_0 + th, y_0 + tk)}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0 + th, y_0 + tk)}{\partial x \partial y} hk \\ &\quad + \frac{\partial^2 f(x_0 + th, y_0 + tk)}{\partial y^2} k^2, \end{aligned}$$

所以

$$\varphi''(0) = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} k^2.$$

继续计算  $\varphi'''(0)$  得到

$$\begin{aligned} \varphi'''(0) &= \frac{\partial^3 f(x_0, y_0)}{\partial x^3} h^3 + 3 \frac{\partial^3 f(x_0, y_0)}{\partial x^2 \partial y} h^2 k \\ &\quad + 3 \frac{\partial^3 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y^2} h k^2 + \frac{\partial^3 f(x_0, y_0)}{\partial y^3} k^3. \end{aligned}$$

如此引出下面一般的表达式

$$\varphi^{(m)}(0) = \sum_{i=0}^m C_m^i \frac{\partial^m f(x_0, y_0)}{\partial x^i \partial y^{m-i}} h^i k^{m-i},$$

其中记号  $\frac{\partial^m f(x_0, y_0)}{\partial x^i \partial y^{m-i}}$  表示偏微商  $\frac{\partial^m f(x, y)}{\partial x^i \partial y^{m-i}}$  在点  $M_0$  的值.

为了便于记忆这个公式. 我们引进算符

$$h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y},$$

其中  $h, k$  是与  $x, y$  无关的常数. 它作用在函数  $f(x, y)$  上时, 得到新函数

$$h \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + k \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

而算符的平方

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2$$

应理解成按二项式展开后所得的算符,即为

$$h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

一般可以写出算符的  $m$  次方,它是

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^m = \sum_{i=1}^m C_m^i h^i k^{m-i} \frac{\partial^m}{\partial x^i \partial y^{m-i}},$$

其中  $\{C_m^i\}$  是二项式展开式的系数,算符  $\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^m$  作用在  $f(x, y)$  上,得到一个新的函数,它是

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x, y) = \sum_{i=0}^m C_m^i h^i k^{m-i} \frac{\partial^m}{\partial x^i \partial y^{m-i}} f(x, y).$$

于是利用引进的算符,上面算出的  $\varphi^{(m)}(0)$  就可以简写成

$$\varphi^{(m)}(0) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0, y_0),$$

即先用算符  $\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^m$  作用在函数  $f(x, y)$  上得出新函数,然后再用点  $M_0$  代入新函数所得的值.

类似地可以得到

$$\varphi^{(n+1)}(\theta) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k).$$

将这些结果代入到  $\varphi(1)$  的展开式中就有

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) \\ &+ \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0, y_0) + R_n, \end{aligned}$$

其中

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k).$$

这就是所需要的二元函数  $f(x, y)$  的泰勒公式,  $R_n$  称为它的余项.

当  $h, k$  很小时, 如果略去这个公式的余项, 就得到计算函数值的高阶近似公式, 即

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \approx f(x_0, y_0) + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(x_0, y_0).$$

**例 1** 将函数  $f(x, y) = e^x \cos y$  在点  $(0, 0)$  的邻域内按泰勒公式展开到二次项.

**解** 先计算所给函数及其偏微商在点  $(0, 0)$  的值.

$$f(0, 0) = e^x \cos y \Big|_{(0,0)} = 1,$$

$$f_x'(0, 0) = e^x \cos y \Big|_{(0,0)} = 1,$$

$$f_y'(0, 0) = -e^x \sin y \Big|_{(0,0)} = 0,$$

$$f_{xx}''(0, 0) = e^x \cos y \Big|_{(0,0)} = 1,$$

$$f_{xy}''(0, 0) = -e^x \sin y \Big|_{(0,0)} = 0,$$

$$f_{yy}''(0, 0) = -e^x \cos y \Big|_{(0,0)} = -1,$$

然后在泰勒公式中, 令  $x_0 = y_0 = 0, h = x, k = y$ , 即得

$$e^x \cos y = 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + R_2,$$

其中  $R_2$  是余项.

若直接利用一元函数的泰勒公式展开  $e^x, \cos y$  再求其乘积, 所得结果仍相同, 但余项有不同的形式.

**例 2** 证明若函数  $z = f(x, y)$  在区域  $G$  上的两个一阶偏微商恒为零, 则  $f(x, y)$  在该区域上必为一个常数.

**证** 取定一点  $M_0(x_0, y_0) \in G$ , 只要证明对任意  $M(x, y) \in G$ , 都有  $f(M) = f(M_0)$  就行了. 首先我们指出, 若  $M_1(x_1, y_1) \in G$ , 且  $M_0$  与  $M_1$  的连接线段全在  $G$  内时, 有  $f(M_1) = f(M_0)$ . 事实上, 在连接线段  $M_0M_1$  上用二元函数泰勒公式的  $n = 0$  的情形, 并利用条件得

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) &= f(x_0, y_0) \\ &\quad + f_x'(x_0 + \theta(x_1 - x_0), y_0 + \theta(y_1 - y_0))(x_1 - x_0) \\ &\quad + f_y'(x_0 + \theta(x_1 - x_0), y_0 + \theta(y_1 - y_0))(y_1 - y_0) \end{aligned}$$

$$=f(x_0, y_0).$$

再考虑一般情形,对任意  $M \in G$ , 因为  $G$  是区域, 所以存在连接  $M_0$  与  $M$  的折线段  $M_0M_1M_2 \cdots M_{n-1}M$ , 在每条线段上用已证结果, 便得  $f(M) = f(M_{n-1}) = \cdots = f(M_1) = f(M_0)$ .

### 6.6.2 多元函数的极值

在这一段里, 我们要利用多元函数的微分法和多元函数的泰勒公式, 来讨论多元函数的极值问题, 所有结论都只对二元函数的情形作详细的叙述,  $n$  元函数情形可以类推.

设  $z = f(x, y)$  是定义在平面区域  $G$  上的一个二元函数, 而  $(a, b)$  是  $G$  的一个内点. 如果对于  $(a, b)$  的某个邻域内的所有点  $(x, y)$  都有

$$f(x, y) \leq f(a, b),$$

就说函数  $f(x, y)$  在点  $(a, b)$  取到极大值; 同样, 如果对  $(a, b)$  的某个邻域内的所有点  $(x, y)$  都有

$$f(x, y) \geq f(a, b),$$

就说函数  $f(x, y)$  在点  $(a, b)$  取到极小值.

例如  $z = 2x^2 + 3y^2$  在点  $(0, 0)$  有极小值. 因为在  $(0, 0)$  的周围, 函数值均大于零, 而在  $(0, 0)$ , 函数值为零.

又如函数  $z = xy$  在点  $(0, 0)$  处既不取极大值, 也不取极小值. 这是因为函数在点  $(0, 0)$  的值为零, 而在该点的近旁总能找到使函数值为正的点, 也能找到使函数值为负的点, 因此不满足极值定义的要求. 从几何上来看亦是很明显的. 函数  $z = xy$  的图形是双曲抛物面, 它在原点呈马鞍形, 所以在  $(0, 0)$  没有极值.

函数的极大值和极小值统称为函数的极值, 使函数取到极值的点称为极值点. 于是对于给定的二元函数  $f(x, y)$ , 如何求出它的极值点, 就是一个值得研究的问题. 下面先来考察函数  $f(x, y)$  在点  $(a, b)$  取极值的必要条件.

为确定起见, 假定  $z = f(x, y)$  在点  $(a, b)$  取到极大值. 也就是

说,对于 $(a,b)$ 的某个邻域中的所有点 $(x,y)$ ,均有

$$f(x,y) \leq f(a,b).$$

过点 $(a,b)$ 作平行 $x$ 轴的直线 $y=b$ (图 6.7),这直线在该邻域内的一段上的点当然就满足这个不等式,即

$$f(x,b) \leq f(a,b).$$

就是,如果把 $f(x,b)$ 看作是一个变量 $x$ 的函数,则它就在点 $x=a$ 取到极大值.于是当 $f(x,y)$ 在点 $(a,b)$ 的偏微商存在时,由一元函数的极值理论推得

$$f'_x(a,b) = 0;$$

同样,变量 $y$ 的一元函数 $f(a,y)$ 在点 $y=b$ 取到极大值,所以又得

$$f'_y(a,b) = 0.$$

这样一来,就得到了函数 $f(x,y)$ 在点 $(a,b)$ 取极值的必要条件.

**定理** 如果函数 $f(x,y)$ 在区域 $G$ 的一个内点 $(a,b)$ 处取到极值,并且在该点有一阶偏微商,则有

$$f'_x(a,b) = 0, f'_y(a,b) = 0.$$

即函数 $f(x,y)$ 的两个偏微商在极值点上都为零.

应该指出,上述条件并不充分,也就是说,使两个偏微商为零的点不一定是这函数的极值点.例如函数 $z = xy$ 在点 $(0,0)$ 并无极值,但它的两个偏微商

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x$$

在点 $(0,0)$ 却都等于零.

如果把满足两个偏微商都等于零的点叫做驻点,则可微函数的极值点就必是它的驻点.

尽管上述定理只给出了必要条件,但是这些条件对于具体求解极值问题常是很重要的.因为通过它,我们可以找出函数 $z$ 的全部驻点,然后只要从这不多的几个驻点中去找极值点.

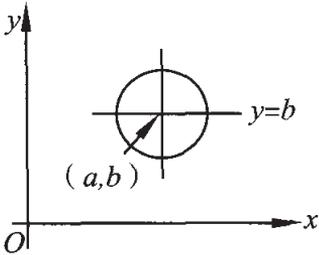


图 6.7

接下来的事情就是如何从驻点中把极值点挑出来。

与一元函数的情形一样,要判定点 $(a,b)$ 是否为极值点,关键在于判定表达式

$$f(x,y) - f(a,b)$$

当点 $(x,y)$ 在 $(a,b)$ 附近变动时是否具有恒定的符号. 如果当点 $(x,y)$ 在 $(a,b)$ 附近变动时,上式恒保持正号,那么 $(a,b)$ 就是函数的极小值点;恒保持负号, $(a,b)$ 就是极大值点;如果当 $(x,y)$ 在 $(a,b)$ 附近变动时,上式有正有负,则 $(a,b)$ 当然不是函数的极值点了.

下面的定理给出了判断驻点是否是极值点的一个充分条件:

**定理** 设 $f(x,y)$ 在点 $(a,b)$ 附近有直到二阶的连续偏导数, $f'_x(a,b) = f'_y(a,b) = 0$ ,记

$$\Delta = f''_{xx}(a,b) \cdot f''_{yy}(a,b) - [f''_{xy}(a,b)]^2,$$

那么:

- (i)  $\Delta > 0$  且  $f''_{xx}(a,b) > 0$  时,  $f(x,y)$  在点  $(a,b)$  取极小值;
- (ii)  $\Delta > 0$  且  $f''_{xx}(a,b) < 0$  时,  $f(x,y)$  在点  $(a,b)$  取极大值;
- (iii)  $\Delta < 0$  时, 点  $(a,b)$  不是  $f(x,y)$  的极值点.

**证** 设 $M(x,y)$ 是 $M_0(a,b)$ 附近的一点,记 $h = x - a, k = y - b, \rho = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ ,  $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $x$ 轴正向的夹角为 $\alpha, A = f''_{xx}(a,b), B = f''_{xy}(a,b), C = f''_{yy}(a,b)$ ,由二元函数的泰勒公式,并利用条件 $f'_x(a,b) = f'_y(a,b) = 0$ 可得

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(a,b) &= \frac{1}{2!} (Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) + o(\rho^2) \\ &= \frac{\rho^2}{2!} \left[ A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha \right. \\ &\quad \left. + C\sin^2\alpha + \frac{2}{\rho^2} \cdot o(\rho^2) \right] \end{aligned} \quad (1)$$

记一元函数

$$\varphi(\alpha) = A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha \quad (0 \leq \alpha \leq 2\pi),$$

由(1)可见,  $f(x, y)$  在  $(a, b)$  是否取极值取决于  $\varphi(\alpha)$  在  $[0, 2\pi]$  上是否可以变号.

(i)  $A > 0, \Delta = AC - B^2 > 0$ , 这时

$$\varphi(\alpha) = A \left( \cos\alpha + \frac{B}{A} \sin\alpha \right)^2 + \frac{\Delta}{A} \sin^2\alpha \quad (2)$$

由于在  $[0, 2\pi]$  上,  $\cos\alpha + \frac{B}{A} \sin\alpha$  与  $\sin\alpha$  不同时为零, 故  $\varphi(\alpha)$  在  $[0, 2\pi]$  上恒正, 由连续函数的性质, 必存在  $m > 0$ , 使得

$$\varphi(\alpha) \geq m \quad \alpha \in [0, 2\pi].$$

由于  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2}{\rho^2} \cdot o(\rho^2) = 0$ , 所以对  $\frac{m}{2} > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 当  $0 < \rho < \delta$  时就

有  $\left| \frac{2}{\rho^2} o(\rho^2) \right| < \frac{m}{2}$ , 从而

$$\left[ A \cos^2\alpha + 2B \cos\alpha \sin\alpha + C \sin^2\alpha + \frac{2}{\rho^2} \cdot o(\rho^2) \right] \geq \frac{m}{2},$$

再由(1)可得

$$f(x, y) - f(a, b) > 0 \quad (0 < \rho < \delta \text{ 时}),$$

这就是说,  $f(x, y)$  在  $(a, b)$  取极小值.

(ii) 与(i)类似, 由  $A < 0$  及  $\Delta > 0$  得

$$\varphi(\alpha) = A \left( \cos\alpha + \frac{B}{A} \sin\alpha \right)^2 + \frac{\Delta}{A} \sin^2\alpha$$

在  $[0, 2\pi]$  恒负, 从而可得, 当  $\rho$  足够小时,

$$A \cos^2\alpha + 2B \cos\alpha \sin\alpha + C \sin^2\alpha + \frac{2}{\rho^2} \cdot o(\rho^2)$$

恒负, 利用(1)即得结论.

(iii) 设  $AC - B^2 < 0$ . 先假定  $A \neq 0$ , 由(2)式,  $\varphi(0)$  与  $A$  同号, 而取  $\alpha_0 \in [0, 2\pi]$  且满足  $\cos\alpha_0 + \frac{B}{A} \sin\alpha_0 = 0$  时, 由(2)式及  $\Delta < 0$  得  $\varphi(\alpha_0)$  与  $A$  异号, 故  $\varphi(\alpha)$  在  $[0, 2\pi]$  内可变号. 在  $A = 0$  时, 注意到  $B \neq 0$  (否则  $AC - B^2 = 0$ , 这是不可能的), 也可得到  $\varphi(\alpha)$  在  $[0, 2\pi]$  上可以变号. 事实上, 取  $\eta$  是充分小的正数, 由于  $|C| \sin\eta <$

$2|B|\cos\eta$ , 所以

$$\varphi(\eta) = (2B\cos\eta + C\sin\eta)\sin\eta$$

与  $B$  同号, 而

$$\begin{aligned}\varphi(2\pi - \eta) &= [2B\cos(2\pi - \eta) + C\sin(2\pi - \eta)]\sin(2\pi - \eta) \\ &= -(2B\cos\eta - C\sin\eta)\sin\eta\end{aligned}$$

与  $B$  异号, 从而  $\varphi(\alpha)$  在  $[0, 2\pi]$  可变号. 再由(1)式可知, 差  $f(x, y) - f(a, b)$  在  $(a, b)$  的任意小邻域内都可以变号, 所在  $\Delta < 0$  的情况下,  $(a, b)$  不是  $f(x, y)$  的极值点.

**附注** 当  $\Delta = AC - B^2 = 0$  时, 不能断言  $(a, b)$  是否是  $f(x, y)$  的极值点. 在有必要时, 可利用更高阶的泰勒公式进行讨论.

综上所述可以得出下面的法则.

为求二元函数  $f(x, y)$  的极值, 先要算偏微商  $f'_x(x, y)$  和  $f'_y(x, y)$ , 再解方程组

$$f'_x(x, y) = 0, f'_y(x, y) = 0,$$

得出所有的驻点; 对每一个驻点  $(a, b)$ , 设

$$A = f''_{xx}(a, b), B = f''_{xy}(a, b), C = f''_{yy}(a, b).$$

并定出判别式  $\Delta = AC - B^2$  的符号. 如果  $AC - B^2 > 0$ , 则当  $A > 0$  时,  $(a, b)$  为极小值点; 当  $A < 0$  时, 为极大值点. 如果  $AC - B^2 < 0$ , 则  $(a, b)$  非极值点. 如果  $AC - B^2 = 0$ , 则  $(a, b)$  仍为可疑点, 须进一步讨论.

**例 1** 求函数  $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$  的所有极值点.

**解** 解方程组

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ f'_y(x, y) = -3y^2 + 6y = 0 \end{cases}$$

得驻点

$$M_1(1, 0), M_2(1, 2), M_3(-3, 0), M_4(-3, 2).$$

再作出所给函数的二阶偏微商

$$f''_{xx}(x, y) = 6x + 6, f''_{xy}(x, y) = 0, f''_{yy}(x, y) = -6y + 6.$$

在点  $M_1(1,0)$ ,  $A=12, B=0, C=6$ , 所以  $AC-B^2=72>0$ . 又因  $A=12>0$ , 故  $M_1$  是极小值点. 极小值为  $f(1,0)=-5$ .

在点  $M_2(1,2)$ ,  $A=12, B=0, C=-6$ , 所以  $AC-B^2=-72<0$ . 因而  $M_2$  不是极值点.

在点  $M_3(-3,0)$ ,  $A=-12, B=0, C=6$ , 所以  $AC-B^2=-72<0$ . 因而  $M_3$  也不是极值点.

在点  $M_4(-3,2)$ ,  $A=-12, B=0, C=-6$ , 所以  $AC-B^2=72>0$ . 又因  $A=-12<0$ , 故  $M_4$  是极大值点. 极大值为  $f(-3,2)=31$ .

在此, 我们还要来指出多元函数的最大值与最小值的求法. 设函数  $f(x, y)$  在某一有界闭区域  $G$  上连续, 则它必在  $G$  上达到它的最大值与最小值. 如果这样的点位于  $G$  的内部, 则函数在该点取到极值, 所以在这种情形, 函数取到最大值与最小值的点是极值点. 但是, 函数  $f(x, y)$  的最大值与最小值亦是有可能在区域  $G$  的边界上达到. 因此, 欲求函数  $f(x, y)$  在域  $G$  上的最大值与最小值, 必须求出  $f(x, y)$  在  $G$  内的一切极值, 再与  $G$  的边界上的函数值进行比较, 其最大者即为函数在闭区域  $G$  上的最大值, 最小者即为最小值.

但是, 由于区域  $G$  的边界通常是一条曲线, 含有无数个点, 所以无法逐点比较它们的函数值. 这实际上是要再求一个函数  $f(x, y)$  在曲线上的极值问题. 这个问题留待后面讨论. 然而, 在某些具体问题中, 常可根据本身的实际意义, 确定函数达到最大值或最小值的点. 下面举两个例子予以说明.

例 2 若用钢板做一容积为  $2 \text{ 米}^3$  的无盖长方体水箱, 问如何选择尺寸使用料最省.

解 设水箱的长为  $x$ , 宽为  $y$ , 则其高为  $\frac{2}{xy}$ . 而用料的面积是

$$S = xy + \frac{4}{xy}(x+y) = xy + 4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

于是所给之问题归结为求二元函数  $S$  的区域  $x > 0, y > 0$  上的最小值问题. 由极值的必要条件得

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial x} = y - \frac{4}{x^2} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial y} = x - \frac{4}{y^2} = 0 \end{cases},$$

解这方程组是  $x = y = \sqrt[3]{4}$ . 根据问题的实际意义, 容积一定的水箱其用料不可能无限减小, 即必有最小值. 因为区域  $x > 0, y > 0$  不含边界点, 所以达到最小值的点必是这域内的驻点, 而点  $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{4})$  又是区域中的唯一驻点, 因此  $S$  就在这点达到最小.

实际上,  $\exists \delta > 0$ , 当  $0 < x \leq \delta$  或  $0 < y \leq \delta$  时;  $\exists M > 0$ , 当  $x \geq M$  或  $y \geq M$  时, 有  $S(x, y) > S(x_0, y_0)$ . 记  $D = \{(x, y) | \delta \leq x \leq M, \delta \leq y \leq M\}$ , 故  $S(x, y)$  在  $D$  上最小值一定在  $D$  的内部取到, 由费马定理知, 它一定在  $D$  内唯一驻点  $(x_0, y_0)$  处取到, 且  $D$  上的最小值也是  $S(x, y)$  在  $x > 0, y > 0$  上的最小值.

也就是说, 取长、宽都是  $\sqrt[3]{4}$ , 高等于  $\frac{2}{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$  时, 即将无

盖水箱的长、宽、高之比取成  $1 : 1 : \frac{1}{2}$  时, 用料最省.

**例 3** 求函数  $z = \sin x \sin y \sin(x + y)$  在区域  $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq \pi$  上的最大值与最小值.

**解** 已给函数的定义域为闭三角形  $AOB$  (图 6.8). 由连续函数的性质可知函数  $z$  在这个区域上一定达到最大值与最小值.

求偏微商并令其为零可得方程组

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \cos x \sin y \sin(x + y) + \sin x \sin y \cos(x + y) \\ &= \sin y \sin(2x + y) = 0, \end{aligned}$$

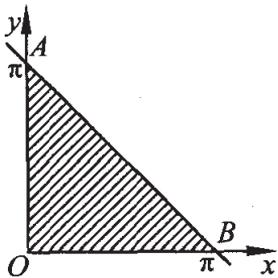


图 6.8

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \sin x \cos y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y) \\ &= \sin x \sin(x+2y) = 0.\end{aligned}$$

但在三角形  $AOB$  的内部  $\sin x$  与  $\sin y$  都不为零, 所以

$$\sin(2x+y)=0, \sin(x+2y)=0,$$

且有  $0 < 2x+y < 2\pi, 0 < x+2y < 2\pi$ . 于是必须

$$2x+y=\pi, x+2y=\pi.$$

解之可得驻点为

$$x=y=\frac{\pi}{3}.$$

函数在驻点的值为  $z\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \sin^3 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{8}\sqrt{3}$ . 因为函数在三角形  $AOB$  的边界上的值为零, 所以函数在闭三角形  $AOB$  上的最大值在点  $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$  达到; 而最小值却在三角形  $AOB$  的三条边上任何一点取得.

### \* 6.6.3 最小二乘法

在科学实验中, 常需要依照实际测得的两个变量的多组数据找出它们近似的函数关系. 通常把这种处理数据的方法称为经验配线, 而所找出的函数关系称为经验公式. 这里介绍一种配直线型经验公式的方法. 先分析一个实际例子.

炼钢是一个氧化降碳的过程, 钢液含碳量的多少直接影响冶炼时间的长短, 因此必须掌握它们之间的相互关系. 如果已测得某平炉的熔毕碳  $x$ , 因此必须掌握它们之间的相互关系. 如果已测得某平炉的熔毕碳  $x$  (炉料熔化毕时钢液的含碳量) 与精炼时间  $y$  (从炉料熔化毕到出钢所用的时间) 的一系列数据, 排成下表:

$x(0.01\%)$	104	180	190	177	147	134	150	191	204	121
$y(\text{分})$	100	200	210	185	155	135	170	205	235	125

现在导出  $y$  与  $x$  的近似函数关系. 为此, 应将这些数据在坐标纸上标出得到一系列点(图 6.9). 因它们大体分布在一条直线上, 所以可用一次函数  $y=ax+b$  来描述熔毕碳与精炼时间的依赖关系. 于是问题就成为如何才能合理的选取系数  $a$  与  $b$ . 我们知道, 如果只考虑  $x$  与  $y$  的两组数据, 则由此可唯一确定  $a$  与  $b$  的值(即两点连一直线), 但从这两组数据定出的直线可能与其它组数据所对应的点偏离很远. 同时, 由于变量  $x$  与  $y$  只有近似的线性关系, 所以也不可能存在一条直线通过所有的点. 合理的方法是选择这样的  $a$  与  $b$ , 使得把每个  $x_i$  代入  $y=ax+b$  后, 所得的值与相应的实测值  $y_i$  的偏差

$$d_i = y_i - (ax_i + b) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

都很小(图 6.10). 怎样使全部偏差都很小呢? 将这些偏差  $d_i$  相加并使它最小是不行的. 因为  $d_i$  有正有负, 在相加过程中会相互抵消. 这样即使偏差的代数和很小, 也不能保证各偏差都很小. 于是转而考虑偏差的平方和, 记为  $D(a, b)$ , 即

$$D(a, b) = \sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2.$$

它是  $a$  与  $b$  的函数. 根据上述分析, 我们必须这样确定系数  $a$  与  $b$ , 使得偏差的平方和  $D(a, b)$  达到最小值. 这就是著名的最小二乘法.

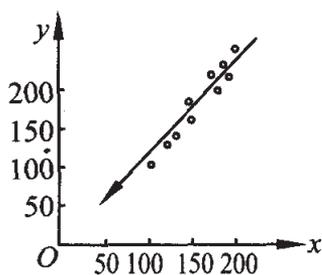


图 6.9

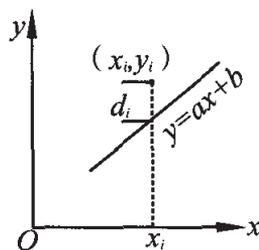


图 6.10

由极值点所满足的必要条件就有

$$\frac{\partial D}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - ax_i - b) = 0,$$

$$\frac{\partial D}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 0;$$

即  $a$  与  $b$  满足方程组

$$\begin{cases} (\sum_{i=1}^n x_i^2)a + (\sum_{i=1}^n x_i)b = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ (\sum_{i=1}^n x_i)a + nb = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

由此解得

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2},$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$

并可像 6.6.2 的例 2 一样证明是最小值点. 对于上述炼钢过程,  $n = 10$ . 于是可根据实测的数据, 算出各个对应值, 列表如下:

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum_{i=1}^{10}$
$x_i$	104	180	190	177	147	134	150	191	209	121	1598
$y_i$	100	200	210	185	155	135	170	205	235	125	1720
$x_i^2$	10816	32400	36100	31329	21609	17956	22500	36481	41616	14641	265448
$x_i y_i$	10400	10400	39900	32745	22785	18090	25500	39155	47940	15125	287640

从而得到经验经公为

$$a = 1.267, b = -30.51;$$

$$y = 1.267x - 30.51$$

#### 6.6.4 条件极值

在上面讨论的极值问题中,函数  $f(x, y)$  的自变量  $x, y$  是完全任意的,没有受到任何附加条件的限制.但在很多实际问题中,常会遇到相反的情形,即必须在自变量受到一定附加条件的限制下,来研究函数的极值.

**例** 某工厂要制造一个容积为  $V_0$  的圆柱形容器,问其底半径和高取何值时,所用材料最省?

设圆柱形容器的底半径为  $r$ ,高为  $h$ ,则容器的全面积为

$$S=2\pi r^2+2\pi rh.$$

由于这容器的容积是  $V_0$ ,所以  $r, h$  就不能任意取值,而必须受到条件

$$\pi r^2 h=V_0$$

的限制.于是所考虑的例子就归结为在此条件下,求面积函数  $S$  的最小值.

一般地说,若在条件

$$\varphi(x, y)=0$$

的限制下,求函数  $z=f(x, y)$  的极值就称为条件极值问题.而这个条件称为**联系方程**.

条件极值与上面所叙述的无条件极值有着明显的区别.设函数  $f(x, y)$  定义在区域  $G$  上,所谓函数  $z=f(x, y)$  在点  $(a, b)$  处取到无条件极值,是指对于  $(a, b)$  的某一邻域中所有的点  $(x, y)$ ,均有

$$f(x, y)\leq f(a, b)\text{ (或 } f(x, y)\geq f(a, b)\text{)};$$

条件极值就不同了.设联系方程  $\varphi(x, y)=0$  的平面上表示一条曲线  $L$ ,而  $(a, b)$  是  $L$  上的某一点(图 6.11).所谓函数  $z=f(x, y)$  在  $(a, b)$  上取到附有条件  $\varphi(x, y)=0$  的条件极值,是指对于  $(a, b)$  的某邻域内曲线  $L$  上的所有点  $(x, y)$ ,均有

$$f(x, y)\leq f(a, b)$$

(或  $f(x, y) \geq f(a, b)$ ).

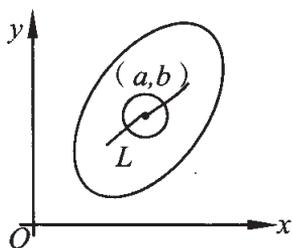


图 6.11

注意,这里与  $(a, b)$  比较的点只是邻域内  $L$  上的点,而不是邻域内所有的点.这就是条件极值与无条件极值的区别所在.

解条件极值问题最自然的方法就是从联系方程  $\varphi(x, y) = 0$  中把  $y$  解成  $x$  的函数  $y = y(x)$ ,再把这函数代入  $z = f(x, y)$  中,便得到一元函数

$$z = f(x, y(x)).$$

此函数的极值显然就是  $z = f(x, y)$  在条件  $\varphi(x, y) = 0$  的限制下的条件极值.这样一来,原来的条件极值问题就化成了求一元函数的无条件极值问题.

现在就来利用这个方法求解本段一开始提出的条件极值问题.即要求使函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

取最小值的点,而联系方程是  $\pi r^2 h = V_0$ . 解此方程得

$$h = \frac{V_0}{\pi r^2}$$

把它代入  $S$  得

$$S = 2\pi r^2 + \frac{2V_0}{r}.$$

这是变量  $r$  的一元函数.为求出它的极值点,可令

$$S' = 4\pi r - \frac{2V_0}{r^2} = 0,$$

由此给出

$$r = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}.$$

容易验证,这个驻点确使  $S$  取最小值.由于

$$\frac{h}{r} = \frac{V_0}{\pi r^3} = \frac{V_0}{\pi \frac{V_0}{2\pi}} = 2,$$

所以

$$h=2r=2\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}.$$

这说明当高和底面的直径相等时  $S$  最小, 也即所用材料最省.

可是, 当联系方程十分复杂时, 从它解出一个变量来通常是不可能的, 在这种情形又如何确定条件极值问题的极值呢? 下面将要讲述的拉格朗日乘数法就解决了这个问题.

假设点  $M_0(a, b)$  是函数  $z=f(x, y)$  的条件极值点, 而  $y=y(x)$  是由联系方程  $\varphi(x, y)=0$  所确定的隐函数, 则  $M_0$  也一定是函数  $f(x, y(x))$  的极值点. 所这个函数对  $x$  的全微商在点  $M_0$  为零, 亦即它的全微分在  $M_0$  为零. 由于一阶微分形式的不变性, 推知

$$f'_x(a, b)dx + f'_y(a, b)dy = 0.$$

其中的  $dy$  不是自变量的微分, 故从这个等式不能得出两个偏微商为零的结论.

另一方面, 由联系方程在点  $M_0$  求微分得

$$\varphi'_x(a, b)dx + \varphi'_y(a, b)dy = 0.$$

用待定乘数  $\lambda$  乘此式再与前式逐项相加得

$$(f'_x(a, b) + \lambda\varphi'_x(a, b))dx + (f'_y(a, b) + \lambda\varphi'_y(a, b))dy = 0.$$

若选定  $\lambda$ , 使满足

$$f'_y(a, b) + \lambda\varphi'_y(a, b) = 0,$$

即令  $\lambda = -\frac{f'_y(a, b)}{\varphi'_y(a, b)}$ , 这里也有

$$f'_x(a, b) + \lambda\varphi'_x(a, b) = 0.$$

就是, 如果函数  $f(x, y)$  在  $G$  上某点  $M_0(a, b)$  处取到条件极值, 那么必存在确定的乘数  $\lambda$ , 使得在该点上成立

$$f'_x(x, y) + \lambda\varphi'_x(x, y) = 0,$$

$$f'_y(x, y) + \lambda\varphi'_y(x, y) = 0.$$

此即表示点  $M_0$  是函数  $F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$  的驻点.

又因点  $M_0$  位于曲线  $L$  上, 所以它还满足

$$\varphi(x, y) = 0.$$

如此得到求条件极值点的法则如下:

欲求函数  $z = f(x, y)$  在条件  $\varphi(x, y) = 0$  的限制下的极值点, 先要构成辅助函数

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$$

的驻点方程

$$F_x'(x, y) = f_x'(x, y) + \lambda\varphi_x'(x, y) = 0,$$

$$F_y'(x, y) = f_y'(x, y) + \lambda\varphi_y'(x, y) = 0.$$

并与联系方程

$$\varphi(x, y) = 0$$

联立, 从中解出  $a, b$  及  $\lambda$ , 则  $(a, b)$  就可能是条件极值点.

点  $(a, b)$  算出之后, 当然还不能断言它就是极值点, 尚须作进一步的讨论. 但在许多问题中, 根据问题本身的几何或物体的意义, 就可以作出肯定的结论.

再以本段开始提及的柱形容器问题为例来说明这个求条件极值的法则. 这时辅助函数是

$$F(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh + \lambda(V_0 - \pi r^2 h).$$

驻点方程是

$$F_r'(r, h) = 2\pi(2r + h - \lambda rh) = 0,$$

$$F_h'(r, h) = \pi r(2 - \lambda r) = 0$$

由此解得

$$r = \frac{2}{\lambda}, \quad h = \frac{4}{\lambda}.$$

代入联系方程  $V_0 = \pi r^2 h$ , 定出  $\lambda = 2\sqrt[3]{\frac{2\pi}{V_0}}$ . 所以

$$r = \sqrt{\frac{3V_0}{2\pi}}, \quad h = 2\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}.$$

这与前面化为无条件极值算得的结果一致.

上述的拉格朗日乘数法可以用来解决一般的条件极值问题.  
 设要求  $n$  元函数

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

的条件极值点, 其中变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  受到  $m (< n)$  个联系方程

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

的限制. 我们可以完全仿照处理二元函数时所作的推理而得出求极值点的法则如下.

作辅助函数

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots + \lambda_m \varphi_m,$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  是  $m$  个待定的乘数. 并由此构成驻点方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

将这组方程与联系方程联立, 从中可以解出  $m+n$  个未知数  $x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , 则  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  就有可能是极值点.

### 6.6.5 例

以下将列举一个利用拉格朗日乘数法求解条件极值问题的例子.

**例 1** 试研究在自变量  $x, y$  受条件  $(x-1)^2 + y^2 - 1 = 0$  的限制下, 函数  $z = xy$  的极值.

**解** 限制条件  $(x-1)^2 + y^2 - 1 = 0$  是中心在点  $(1, 0)$  半径为 1

的圆周方程(图 6. 12). 为求自变量在这个圆周上取值的函数  $z=xy$  的极值, 作辅助函数

$$F(x, y) = xy + \lambda[(x-1)^2 + y^2 - 1],$$

并令  $F$  对  $x, y$  的偏微商为零得

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y + 2\lambda(x-1) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x + 2\lambda y = 0.$$

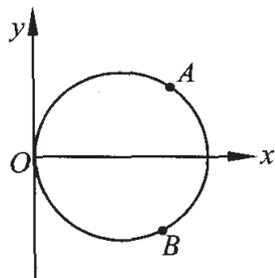


图 6. 12

与其联系方程

$$(x-1)^2 + y^2 - 1 = 0.$$

一起所构成的方程组给出的解为

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x_2 = \frac{3}{2} \\ y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}; \begin{cases} x_3 = \frac{3}{2} \\ y_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

在图 6. 12 中它们分别是圆周上的  $O, A, B$  三点. 现在来研究这三点是否为极值点.

首先可以断言, 点  $O$  不是极值点. 因为当点  $(x, y)$  在上半平面内沿圆周接近  $O$  时, 函数值始终保持为正; 而当它在下半平面沿圆周接近  $O$  时, 函数值始终保持为负. 即在  $O$  附近, 差式  $f(x, y) - f(0, 0)$  有不同的符号.

其次考虑  $A, B$  两点, 若把圆周表成参数方程, 便可看出函数  $z=xy$  在圆周上是连续的, 所以它一定在圆周上某点达到最大值, 而在其另一点达到最小值. 既然  $A$  与  $B$  是可能取极值的仅有两点, 可见它们之中必有一点是最大值点, 而另一点是最小值点. 具体计算  $z$  值得

$$z_A = \frac{3}{4}\sqrt{3}, z_B = -\frac{3}{4}\sqrt{3}.$$

故函数  $z=xy$  在点  $A$  取最大值, 在点  $B$  取最小值.

例 2 求由原点到曲面  $(x-y)^2 - z^2 = 1$  的最短距离.

解 考虑原点到曲面上的点 $(x, y, z)$ 的距离平方 $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , 则问题就化成求函数

$$u = x^2 + y^2 + z^2$$

在限制条件 $(x-y)^2 - z^2 = 1$ 下的最小值.

按乘数法作辅助函数

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda[(x-y)^2 - z^2 - 1],$$

并构成方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2\lambda(x-y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 2\lambda(x-y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2z - 2\lambda z = 0 \\ (x-y)^2 - z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

由第三方程得 $z(1-\lambda) = 0$ . 但当 $\lambda = 1$ 时容易看出, 这组方程不相容, 所以只能有 $z = 0$ . 从而解得

$$x = \pm \frac{1}{2}, y = -x = \mp \frac{1}{2}.$$

于是点 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$ 与 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ 便可能是极值点. 由问题本身的意义知最小值一定是存在的, 而函数在这两点上取相同的值 $\frac{1}{2}$ .

因此这两点都是函数的最小值点, 并得出所求的最短距离 $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

例 3 试将正数 $a$ 分成 $n$ 个正数的和, 使这 $n$ 个正数的乘积最大.

解 设 $a$ 分成的 $n$ 个正数为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 则问题就成为在限制条件 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a$ 下求函数

$$u = x_1 x_2 \cdots x_n$$

的最大值. 作辅助函数

$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n + \lambda(x_1 + x_2 + \cdots + x_n - a)$ ,  
 令它对各变量的微商为零, 就有

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = x_2 x_3 \cdots x_n + \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = x_1 x_3 \cdots x_n + \lambda = 0,$$

...

$$\frac{\partial F}{\partial x_n} = x_1 x_2 \cdots x_{n-1} + \lambda = 0$$

比较这些等式可知

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n.$$

代入限制条件求得

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{a}{n}.$$

从题意知道最大值一定存在, 因此这个唯一可能的极值点就是使函数取最大值的点. 从而推得, 若将正数  $a$  分成  $n$  个相等的正数, 则这  $n$  个正数的乘积最大, 其最大值为  $\left(\frac{a}{n}\right)^n$ .

从上述结果还可以得到一个重要的不等式. 由于

$$x_1 x_2 \cdots x_n \leq \left(\frac{a}{n}\right)^n = \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^n,$$

所以

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

即  $n$  个正数的几何平均值不大于它们的算术平均值.

对于条件极值点的判定有时可借助隐函数的求导与无条件极值点的判定法则来完成. 今举一例, 以示一般.

**例 4** 求函数  $u = xyz$  在限制条件  $x + y + z = 5$  与  $xy + yz + zx = 8$  下的极值.

**解** 按乘法法作辅助函数

$$F(x, y, z) = xyz + \lambda(x + y + z - 5) + \mu(xy + yz + zx - 8),$$

并构成方程组

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yz + \lambda + \mu(y+z) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xz + \lambda + \mu(x+z) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = xy + \lambda + \mu(x+y) = 0,$$

$$\varphi(x, y, z) = x + y + z - 5 = 0,$$

$$\psi(x, y, z) = xy + yz + zx - 8 = 0,$$

由此解得可能的极值点为  $M_1(2, 2, 1), M_2\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right); M_3(2, 1,$

$2), M_4\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right); M_5(1, 2, 2), M_6\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right).$

现在先来说明  $M_1, M_2$  是否为问题的极值点.

因为雅可比行列式  $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(y, z)} = y - z$  在点  $M_1, M_2$  皆不为零, 故在这些点的某一邻域内联系方程确定  $y, z$  是  $x$  的隐函数. 于是求得

$$y' = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(z, x)} / \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(y, z)} = \frac{z-x}{y-z},$$

$$y'|_{M_1} = -1, y'|_{M_2} = -1;$$

$$z' = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} / \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(y, z)} = \frac{x-y}{y-z},$$

$$z'|_{M_1} = 0, z'|_{M_2} = 0.$$

从而又有

$$y'' = \frac{(z'-1)(y-z) - (y'-z')(z-x)}{(y-z)^2},$$

$$y''|_{M_1} = 2, y''|_{M_2} = 2;$$

$$z'' = \frac{(1-y')(y-z) - (y'-z')(x-y)}{(y-z)^2},$$

$$z''|_{M_1} = 2, z''|_{M_2} = -2.$$

将  $u=xyz$  视为  $x$  的函数并求其二阶微商得

$$u''=2y'z+2yz'+2xy'z'+xy''z+xyz'',$$

所以

$$u''|_{M_1}=2, u''|_{M_2}=-2.$$

这就得出  $M_1$  为所给条件极值问题的极小值点, 极小值是 4;  $M_2$  为极大值点, 极大值是  $112/27$ .

其次, 由于变量  $x, y, z$  的对称性, 所以  $M_3, M_5$  也是极值问题的极小值点; 而  $M_4, M_6$  是极大值点, 且极小值亦分别是 4 与  $112/27$ .

### 复习思考题

1. 写出  $f(x, y)$  在  $(a, b)$  处的泰勒公式.
2. 叙述多元函数在一点达到极值的定义.
3. 什么是多元函数在一点达到极值的必要条件? 什么是二元函数在一点达到极值的充分条件?
4. 什么是条件极值? 试述求条件极值的拉格朗日乘数法.

### 习题 6.6

1. 在点  $(1, -2)$  的邻域内, 根据泰勒公式展开函数  $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ .
2. 当自变量由  $x=5, y=6$  变至  $x=5+h, y=6+k$  时, 求函数  $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 4$  的增量.
3. 当自变量由  $x=1, y=-1$  变到  $x=1+h, y=-1+k$  时, 求函数  $f(x, y) = x^2y + xy^2 - 2xy$  的增量.
4. 按  $x$  及  $y$  的乘幂展开函数  $f(x, y) = e^x \ln(1+y)$  至三次项为止.
5. 按  $(x - \frac{\pi}{4})$  和  $(y - \frac{\pi}{4})$  的乘幂展开函数  $f(x, y) = \sin x \sin y$  至二次项为止, 并写出余项  $R_2$ .

6. 按 $(x-1)$ 和 $(y-1)$ 的乘幂展开函数  $f(x, y) = x^y$  至二次项为止.

7. 利用二元函数的泰勒公式, 证明当 $|x|, |y|$ 充分小时, 有下面近似等式成立:

$$(1) \frac{\cos x}{\cos y} \approx 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2);$$

$$(2) \arctan \frac{1+x+y}{1-x+y} \approx \frac{\pi}{4} + x - xy.$$

8. 设  $z = z(x, y)$  是由方程  $z^3 - 2xz + y = 0$  所确定的隐函数, 当  $x=1, y=1$  时  $z=1$ , 试按 $(x-1)$ 和 $(y-1)$ 的乘幂展开函数  $z$  至二次项为止.

9. 将函数  $f(x, y) = e^{x+y}$  在原点的邻域内按泰勒公式展开到第  $n$  项.

10. 将  $\sin(x^2 + y^2)$  在 $(0, 0)$ 点按泰勒公式展开.

11. 根据马克劳林公式展开函数  $f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$  到四次项为止.

12. 根据马克劳林公式展开函数  $f(x, y) = \frac{1}{1-x-y+xy}$  到  $n$  次项.

13. 求下列函数的极值

$$(1) f(x, y) = 4(x-y) - x^2 - y^2;$$

$$(2) f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \quad (x > 0, y > 0);$$

$$(3) f(x, y) = e^{2x}(x+2y+y^2);$$

$$(4) f(x, y) = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}.$$

14. 求由方程  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$  所确定的函数  $z = f(x, y)$  的极值.

15. 求下列函数在指定条件下的极值

$$(1) u = x^2 + y^2, \text{ 若 } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1;$$

(2)  $u=x+y+z$ , 若  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1, x>0, y>0, z>0$ ;

(3)  $u=\sin x \sin y \sin z$ , 若  $x+y+z=\frac{\pi}{2}, x>0, y>0, z>0$ ;

(4)  $u=xyz$ , 若  $x+y+z=0$  且  $x^2+y^2+z^2=1$ .

16. 在平面  $3x-2z=0$  上求一点, 使它与点  $A(1, 1, 1)$  和  $B(2, 3, 4)$  的距离平方和最小.

17. 一帐篷, 下部为圆柱形, 上部盖以圆锥形的顶蓬, 设帐篷的容积为一定数  $V_0$ , 试证当  $R=\sqrt{5}H, h=2H$  时 (其中  $R, H$  各为圆柱形的度半径和高,  $h$  为圆锥形的高) 所用篷布最省.

18. 已知平行六面体所有各棱边之和为  $12a$ , 求其最大体积.

19. 在椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  上求一点  $M(x, y) (x, y \geq 0)$ , 使椭圆在该点的切线与坐标轴构成的三角形面积为最小, 并求其面积.

20. 求平面上一点  $(x_0, y_0)$ , 使其到  $n$  个定点  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  的距离的平方和最小.

## 复 习 题

1. 设

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{x-y} - 1}{x-y} & (x > y \text{ 时}) \\ 1 & (x = y \text{ 时}) \\ \frac{\sin x - \sin y}{x-y} & (x < y \text{ 时}) \end{cases}$$

试讨论  $f(x, y)$  的连续性.

2. 设  $z = \ln(e^x + e^y)$ , 验证

(1)  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ ;

(2)  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$ .

3. 设  $z=(x^2+y^2)\sin(x^2+y^2)$ , 证明  $z$  满足方程

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

4. 设  $u=f(x, y, z)$ ,  $y=\varphi(x, r)$ ,  $z=h(x, y, r)$ , 当把  $u$  看成  $(x, r)$  的复合函数时, 求  $\frac{\partial u}{\partial x}$ .

5. 若  $u=\varphi(x+\psi(y))$ , 试证

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

6. 设  $z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$ , 其中  $f$  为任意可微函数, 试证

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

7. 设  $y=f(x, t)$ , 而  $t$  是由方程  $F(x, y, t)=0$  所确定的  $x, y$  的函数, 试证

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial t}}$$

8. 若  $y=y(x)$  是由方程  $F(x, y)=0$  所确定的函数, 证明

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3}.$$

9. 设  $(r, \theta, \varphi)$  是球坐标, 试证

(1) 球坐标曲面(即  $r$ =常数,  $\theta$ =常数和  $\varphi$ =常数的曲面)两两正交(即交点处有互相垂直的法向量);

(2) 球坐标曲线两两正交.

10. 设  $z=F(x, y, u, v)$ , 而  $u, v$  是由方程组

$$\begin{cases} H(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$$

所确定的隐函数组, 当把  $z$  看作  $x, y$  的复合函数时, 求它所表示

曲面的法向量.

11. 求极值或条件极值

(1)  $f(x, y) = xy \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ;

(2)  $f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$ ;

$$\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}\right)$$

(3)  $u = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ , 若  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{a^2}$ .

12. 求由方程  $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$  所确定的函数  $z = f(x, y)$  的极值.

13. 求抛物线  $y = x^2$  与直线  $x - y - 2 = 0$  之间的最短距离.

14. 把正数  $a$  分成  $n$  个正数之和, 使它们的乘积最大.

15. 纵切面为半圆的柱形张口浴盆, 其表面积等于  $S$ , 当其尺寸怎样时, 此盆有最大的容积.

## 7 多变量函数的积分学

我们已经看到,定积分的方法,即分割、近似、求和、取极限的方法,成功地解决了曲边梯形(即弯曲图形)的求面积问题以及已知线密度(不均匀分布)求质量的问题.在这一章里,我们要讨论多元函数的积分方法.

### 7.1 二重积分

#### 7.1.1 二重积分概念的导出

假定给定一个形如图 7.1 的立体图形,它的底部是平面  $Oxy$  上的一个闭区域  $D$ ,侧面是以  $D$  的边界为准线,母线与  $z$  轴平行的柱面,顶部是  $z=f(x,y)$  所确定的一张曲面,这里设  $f(x,y)$  恒正且在  $D$  连续.这一图形常被称为“曲顶柱体”,我们的问题是,要设法求出它的体积.

由于柱体顶部的不规则性,求它的体积时要采取一个从粗到细的过程.先把  $D$  分割成互不重叠的有限个小块  $D_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) (图 7.2) (互不重叠是指任意两小块都没有公共的内点),用  $\Delta A_i$  表示小块  $D_i$  的面积,然后以各个  $D_i$  为底将整个柱体分割成许多细长的小曲顶柱体,由于  $D_i$  是很小的小块,且  $f(x,y)$  是连续的,故  $f(x,y)$  在  $D_i$  上各个点的值相差都不大,从而可在  $D_i$  内任取一点  $M_i(\xi_i, \eta_i)$ ,并把  $f(M_i)\Delta A_i$  近似地看作是第  $i$  个小曲顶柱体的体积,整个曲顶柱体的体积就近似于

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(M_i)\Delta A_i.$$

易见,当分割越来越细时,相应作出的和数  $\sigma$  就会更接近于所给曲顶柱体的精确体积.

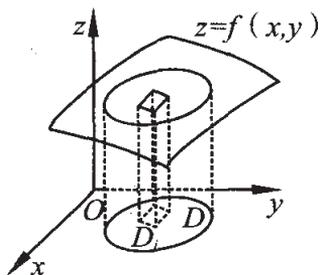


图 7.1

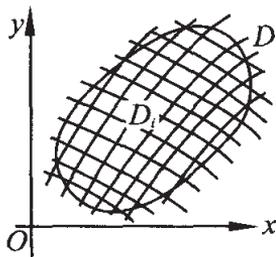


图 7.2

如果把  $f(x,y)$  看成是薄片  $D$  上的质量分布的面密度,那么以上  $\sigma$  就是薄片的质量的近似值,分割加细时,这个近似值  $\sigma$  就会更接近于质量的精确值.

这里所用的方法,与过去求曲边梯形面积时所用的方法相类似,不同之处是,这里的分割是对平面区域的分割,正因为如此,我们必须弄清分割很细的含义.在这里,仅仅要求  $\Delta A_i$  很小是不够的,因为小块的面积很小,并不能保证小块上任意两点的距离也很小,为描述小块上任意两点的距离都很小,我们引进点集合的直径的概念,称数

$$d_i = \sup\{\rho(M', M'') \mid M', M'' \text{ 都属于 } D_i\}$$

为  $D_i$  的直径,于是  $D_i$  的大小,可以用它的直径  $d_i$  的大小来描述,而分割细密的程度就可以用数

$$\lambda(T) = \max\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$$

来刻划了. 根据以上讨论,如果还有

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta A_i$$

收敛,其极限值就是曲顶柱体的精确体积  $V$ .

以上和数的极限与定积分定义中和数的极限相类似,因为不

同的分割法可以有相同的  $\lambda(T)$ , 而且对于确定的分割  $T$ , 各  $M_i$  的选取还可以不同, 所以和数  $\sigma$  并不是  $\lambda(T)$  的单值函数, 与定积分的讨论一样, 我们规定极限

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta A_i = V$$

的意义是, 对于任意的  $\epsilon > 0$ , 都存在  $\delta > 0$ , 对任意分割  $T$  及  $\{M_i\}$  的任意取法, 只要  $\lambda(T) < \delta$ , 就有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta A_i - V \right| < \epsilon$$

成立.

### 7.1.2 二重积分的定义及可积函数

**定义** 设  $f(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上有定义, 用一些曲线将  $D$  分割成有限个两两没有公共内点的小部分, 称为  $D$  上的一个分割法, 记作  $T$ , 分割  $T$  下每一个小部分称为一个小块, 小块的总数记为  $n$ , 给小块以编号, 将第  $i$  个小块记作  $D_i$ , 并用  $\Delta A_i$  表示  $D_i$  的面积, 用  $d_i$  表示  $D_i$  的直径. 在每个  $D_i$  上各取一点  $(\xi_i, \eta_i)$ , 作和数

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta A_i,$$

称这个和数为  $f(x, y)$  在  $D$  上的一个积分和或黎曼和. 记

$$\lambda(T) = \max\{d_1, d_2, \dots, d_n\},$$

如果

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta A_i$$

收敛, 则称  $f(x, y)$  在  $D$  上(黎曼)可积, 并称其极限值为  $f(x, y)$

在  $D$  上的一个二重积分, 用  $\iint_D f(x, y) dA$  表示, 即

$$\iint_D f(x, y) dA = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta A_i.$$

在表达式  $\iint_D f(x, y) dA$  中, 称  $f(x, y)$  为被积函数, 称  $D$  为积分区域,  $dA$  是相应于  $\Delta A_i$  而书写的, 称为面积元素, 称  $f(x, y)dA$  为被积表达式.

什么样的二元函数是可积的? 为回答这个问题, 我们在这里不加证明地介绍以下两个定理:

**定理 1** 设有界闭区域  $D$  的边界是一条或几条逐段光滑的闭曲线, 如果函数  $f(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上是连续的, 则它在  $D$  上可积.

**定理 2** 设有界闭区域  $D$  的边界是一条或几条逐段光滑的闭曲线, 如果函数  $f(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上是有界的, 且在这个区域上除去有限个点和有限条光滑曲线段外都是连续的, 则它在  $D$  上可积.

于是通常所遇到的许多二元函数就都是可积的.

### 7.1.3 二重积分的性质

二重积分有类似于定积分的一些性质. 因为它们的证明方法相同, 所以我们只逐条列举而不加详细证明.

1° 若记  $\iint_D 1 dA = \iint_D dA$ , 用  $A$  表示区域  $D$  的面积, 则有  $\iint_D dA = A$ , 即 1 的二重积分等于积分区域的面积.

2° 可积函数必定有界, 即若  $f(x, y)$  在有界区域  $D$  上可积, 则  $f(x, y)$  必在  $D$  上有界.

3° 积分的线性, 即若  $f(x, y)$  和  $g(x, y)$  都在  $D$  上可积,  $c_1$  和  $c_2$  是两个任意常数, 则  $c_1 f(x, y) + c_2 g(x, y)$  也在  $D$  上可积, 且有

$$\iint_D [c_1 f(x, y) + c_2 g(x, y)] dA = c_1 \iint_D f(x, y) dA + c_2 \iint_D g(x, y) dA.$$

4° 积分的保序性,即若  $f(x,y)$  和  $g(x,y)$  都在  $D$  上可积,且在  $D$  上处处有  $f(x,y) \leq g(x,y)$ ,则有

$$\iint_D f(x,y) dA \leq \iint_D g(x,y) dA.$$

5° 对积分区域的可加性,即若  $D_1$  和  $D_2$  是两个不相重叠的区域,  $D = D_1 \cup D_2$ , 而  $f(x,y)$  在  $D_1$  和  $D_2$  上都可积,则  $f(x,y)$  在  $D$  上也可积,且有

$$\iint_D f(x,y) dA = \iint_{D_1} f(x,y) dA + \iint_{D_2} f(x,y) dA.$$

6° 可积函数绝对可积,即若  $f(x,y)$  在有界区域  $D$  上可积,则  $|f(x,y)|$  也在  $D$  上可积,且有

$$\left| \iint_D f(x,y) dA \right| \leq \iint_D |f(x,y)| dA.$$

7° 积分中值性质,即若  $f(x,y)$  和  $\varphi(x,y)$  都在有界闭区域  $D$  上连续,且  $\varphi(x,y)$  在  $D$  上不变号,则在  $D$  上至少存在一点  $(\xi, \eta)$ , 使得

$$\iint_D f(x,y)\varphi(x,y) dA = f(\xi, \eta) \iint_D \varphi(x,y) dA.$$

**推论** 设  $D$  是有界闭区域,  $f(x,y)$  在  $D$  上连续,则在  $D$  上至少存在一点  $(\xi, \eta)$ , 使得

$$\iint_D f(x,y) dA = f(\xi, \eta) A.$$

其中  $A$  表示  $D$  的面积.

这个推论也称为二重积分的积分中值定理.

#### 7.1.4 直角坐标系下二重积分的累次积分法

利用定积分来计算二重积分,是二重积分的一个基本的计算方法.我们先给出以下定理:

**定理 1** 设  $I$  是矩形区域:  $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ ,  $f(x,y)$  在

$I$  上可积. (i) 若对于每一个  $y \in [c, d]$ ,  $f(x, y)$  作为  $x$  的函数在  $[a, b]$  上可积, 记  $\varphi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ , 则  $\varphi(y)$  在  $[c, d]$  上可积, 并且有

$$\int_c^d \varphi(y) dy = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \iint_I f(x, y) dA.$$

(ii) 若对于每一个  $x \in [a, b]$ ,  $f(x, y)$  作为  $y$  的函数在  $[c, d]$  可积, 记  $\psi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ , 则  $\psi(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 并且

$$\int_a^b \psi(x) dx = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \iint_I f(x, y) dA.$$

证 因为  $f(x, y)$  在  $I$  上可积, 所以对于任意的  $\epsilon > 0$ , 都存在  $\delta > 0$ , 不论分割如何, 不论每小块上  $(\xi_i, \eta_i)$  的选取如何, 只要  $\lambda(T) < \delta$ , 便有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta A_i - \iint_I f(x, y) dA \right| < \frac{1}{2} \epsilon$$

成立. 今取以下特殊类型的分割  $T$ :

$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \\ c &= y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d, \end{aligned}$$

用直线  $x = x_i (i = 0, 1, \dots, n)$  和  $y = y_j (j = 0, 1, \dots, m)$  将  $I$  分成  $nm$  份, 记

$$I_{ij}: x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j,$$

并任取  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$ , 导出  $(\xi_i, \eta_j) \in I_{ij}$  (图 7.3), 作和数

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j,$$

显然这是  $f(x, y)$  在  $I$  上的一个特殊形式的积分和. 当

$$\mu = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\} < \frac{1}{2} \delta$$

且

$$v = \max\{\Delta y_1, \Delta y_2, \dots, \Delta y_m\} < \frac{1}{2}\delta$$

时,显然有

$$\lambda = \max\{\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_j^2}, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m\} < \delta,$$

从而有

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j - \iint_I f(x, y) dA \right| < \frac{1}{2}\epsilon.$$

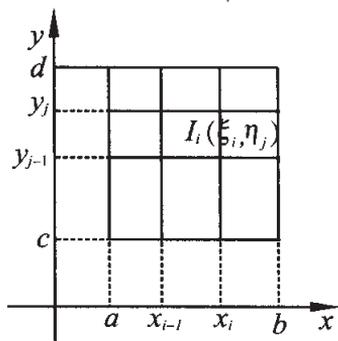


图 7.3

它等价于

$$\begin{aligned} \left| \iint_I f(x, y) dA - \frac{1}{2}\epsilon \right| &< \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \right) \Delta y_j \\ &< \iint_I f(x, y) dA + \frac{1}{2}\epsilon \end{aligned} \quad (1)$$

注意到  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i$  是函数  $f(x, \eta_j)$  在  $[a, b]$  上的一个(定)积分和数, 固定  $\{\eta_j\}$  与  $\{\Delta y_j\}$ , 使  $v < \frac{1}{2}\delta$  成立, 这时只要  $\mu < \frac{1}{2}\delta$ , 就有

(1) 式. 在(1)中令  $\mu \rightarrow 0$ , 由  $f(x, \eta_j)$  在  $[a, b]$  上的可积性,

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i = \int_a^b f(x, \eta_j) dx = \varphi(\eta_j), \text{ 从而得到}$$

$$\left| \sum_{j=1}^m \varphi(\eta_j) \Delta y_j - \iint_I f(x, y) dA \right| \leq \frac{1}{2}\epsilon < \epsilon,$$

这个不等式成立的条件是  $v < \frac{1}{2}\delta$ . 由  $\epsilon$  的任意性, 根据定积分的定义可知,  $\varphi(y)$  在  $[c, d]$  上可积, 且其积分值为  $\iint_I f(x, y) dA$ , (i) 得证. 同理可证(ii).

从以上证明可见, 小块面积  $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$ , 因此二重积分的

从以上证明可见, 小块面积  $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$ , 因此二重积分的

面积元素常写成  $dA = dx dy$ , 而二重积分写成

$$\iint_I f(x, y) dA = \iint_I f(x, y) dx dy.$$

另外, 为书写方便, 常用以下记号:

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy, \quad (2)$$

及

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx, \quad (3)$$

因为这些式子都要算两次定积分, 所以也叫做累次积分, (2) 和 (3) 分别称为先对  $x$  后对  $y$  与先对  $y$  后对  $x$  的累次积分.

现在我们把累次积分法推广到积分区域是曲边梯形的情形.

设

$$D = \{(x, y) \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\},$$

其中我们假设  $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$  (当  $x \in (a, b)$  时),  $\varphi_1(a) \leq \varphi_2(a)$ ,  $\varphi_1(b) \leq \varphi_2(b)$ , 也就是说,  $D$  是由曲线  $y = \varphi_1(x)$ 、 $y = \varphi_2(x)$  和直线  $x = a$ 、 $x = b$  所围成, 这种区域的形状如图 7.4.

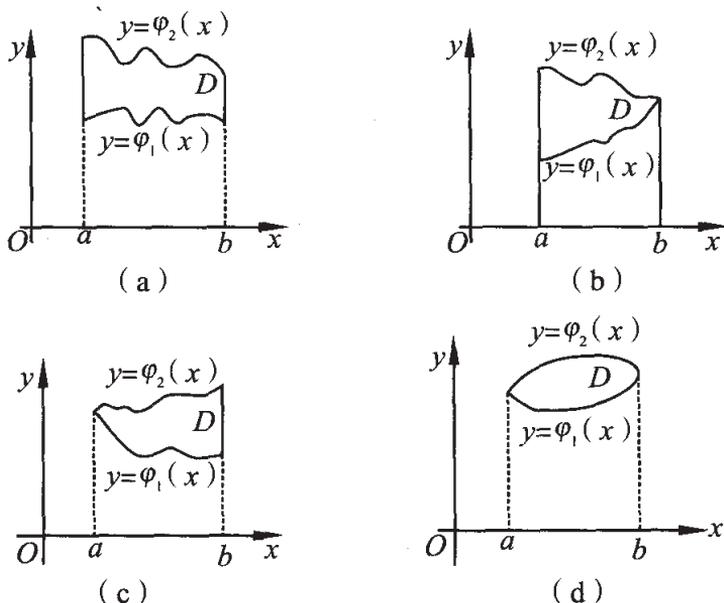


图 7.4

**定理 2 设**

$$D = \{(x, y) \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}$$

(如图 7.4),  $f(x, y)$  在  $D$  上可积, 且对于任意的  $x \in [a, b]$ , 积分

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \text{ 存在, 则}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

**证** 作矩形  $I: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ , 使得  $D \subset I$ , 令

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \in I - D \end{cases}$$

在  $I$  上用定理 1 的 (ii), 即可得到本定理.

**定理 3 设**

$$D = \{(x, y) \mid \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\}$$

(如图 7.5),  $f(x, y)$  在  $D$  可积, 且对于任意的  $y \in [c, d]$ , 积分

$$\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \text{ 都存在, 则有}$$

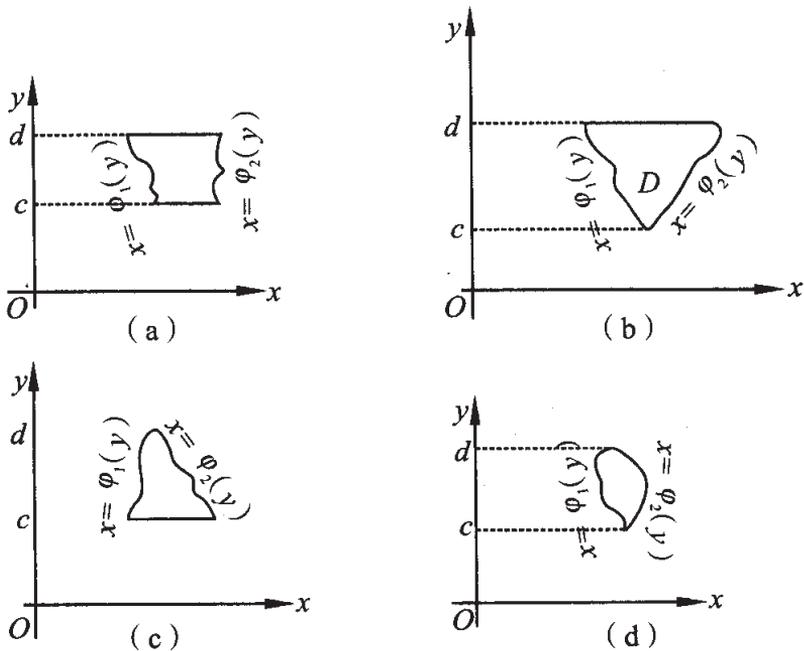


图 7.5

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y) dx.$$

从几何上看, 以上三个定理, 反映了曲顶柱体体积的不同算法, 现在以定理 2 为例来说明之. 设区域  $D$  如图 7.4d 所示的形状,  $z = f(x, y)$  在  $D$  上恒正且连续, 考虑以  $D$  为底,  $z = f(x, y)$  为顶的曲顶柱体的体积. 一方面, 由二重积分的几何意义, 该曲顶柱体体积为

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy,$$

另一方面, 当我们用平面  $x = x_0$  ( $a < x_0 < b$ ) 去截同一曲顶柱体时, 其截面是一个曲边梯形(图 7.6 和图 7.7), 截面面积可用定积分表示:

$$S(x_0) = \int_{\phi_1(x_0)}^{\phi_2(x_0)} f(x_0, y) dy,$$

于是, 曲顶柱体的体积可以用截面面积的定积分表示(参看定积分的应用一节)为

$$V = \int_a^b \left[ \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

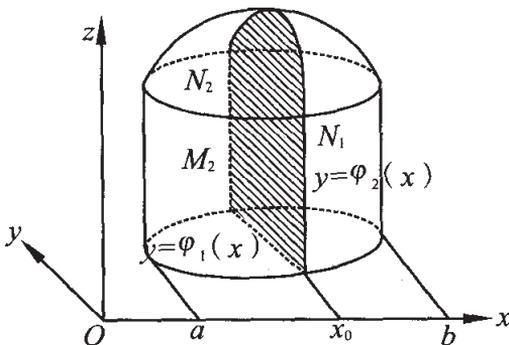


图 7.6

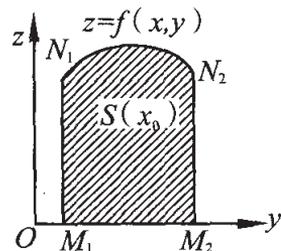


图 7.7

两种算法得到的是同一曲顶柱体的体积,这正是定理 2 的结论.

有的区域,如图 7.8,虽不是图 7.4 和图 7.5 所示的类型,但可以作一些辅助线,将它分为有限个如图 7.4 和图 7.5 所示的区域,从而在每个小区域上,二重积分都可以化成累次积分来计算.

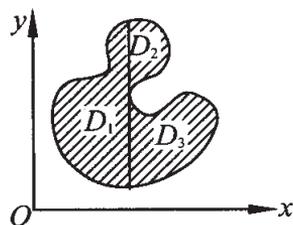


图 7.8

例 1 计算积分  $\iint_D x^2 y^2 dx dy$ , 其中  $A$  为

图 7.9 所示的三角形区域.

解 将此二重积分化为累次积分来计算时,点  $M_1$  与  $M_2$  分别在边界曲线

$$y = 0, y = \frac{b}{a}x \quad (0 \leq x \leq a).$$

上,先固定  $x$ ,完成  $M_1$  至  $M_2$  线段上对  $y$  的积分,然后再对  $x$  积分就有

$$\iint_D x^2 y^2 dx dy = \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}x} x^2 y^2 dy = \frac{b^3}{3a^3} \int_0^a x^5 dx = \frac{1}{18} a^3 b^3.$$

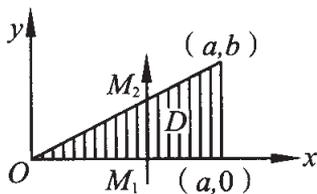


图 7.9

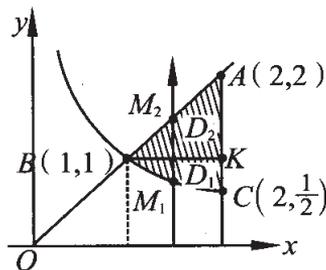


图 7.10

例 2 计算积分  $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$ , 其中  $D$  是直线  $x^2, y = x$  及双曲线  $xy = 1$  围成的区域.

解 区域  $D$  为图 7.10 的曲边三角形  $ABC$ , 它在  $x$  轴上的投

影是区间 $[1, 2]$ , 在此区间上任取一点  $x$ , 过此点作平行于  $y$  轴的直线与  $D$  的边界相交于两点  $M_1$  与  $M_2$ , 它们所在的曲线方程分别是

$$y = \frac{1}{x}, y = x \quad (1 \leq x \leq 2)$$

从而所给的二重积分可化成先  $y$  后  $x$  的累次积分, 于是算得

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy &= \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2} dy = \int_1^2 \left. -\frac{x^2}{y} \right|_{\frac{1}{x}}^x dx \\ &= \int_1^2 (-x + x^3) dx = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

如果将二重积分化成先  $x$  后  $y$  的累次积分, 这时平行于  $x$  轴的直线与  $D$  的边界之左交点所在曲线具有不同形式的方程, 所以应作辅助线段  $BK$  把区域  $D$  分成两个子区域  $D_1$  与  $D_2$ , 于是就有

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} \frac{x^2}{y^2} dx dy &= \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{1}{y}}^2 \frac{x^2}{y^2} dx = \frac{17}{12}; \\ \iint_{D_2} \frac{x^2}{y^2} dx dy &= \int_1^2 dy \int_y^2 \frac{x^2}{y^2} dx = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

其结果仍是

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy = \iint_{D_1} \frac{x^2}{y^2} dx dy + \iint_{D_2} \frac{x^2}{y^2} dx dy = \frac{17}{12} + \frac{5}{6} = \frac{9}{4}.$$

但是后一算法比前一算法费事一倍! 此例说明, 在计算二重积分之前应先考虑积分区域的形状, 然后再确定累次积分的次序.

**例 3** 求两个直交圆柱面  $x^2 + y^2 = R^2$  与  $x^2 + z^2 = R^2$  所围成的立体体积.

**解**  $x^2 + y^2 = R^2$  是母线平行于  $z$  轴的圆柱面,  $x^2 + z^2 = R^2$  是母线平行于  $y$  轴的圆柱面, 它们垂直相交后在第一卦限所围成的立体如图 7.11 所示. 由对称性可知, 这个立体的体积是所求立体体积  $V$  的  $\frac{1}{8}$ . 因为它是以曲面  $x^2 + z^2 = R^2$  或  $z = \sqrt{R^2 - x^2}$  为顶的曲顶柱体, 所以得到

$$V = 8 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2} dx dy,$$

其中积分区域  $D$  是平面  $Oxy$  上以原点为心半径为  $R$  的圆在第一象限的扇形(图 7.12). 由于被积函数只依赖于  $x$ , 故将这个二重积分化成先  $y$  后  $x$  的累次积分进行计算比较简便, 于是求得

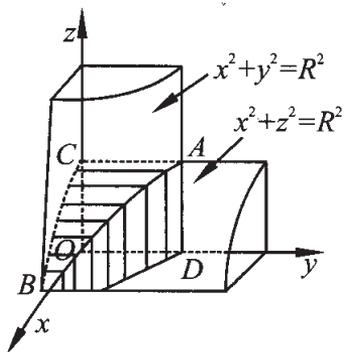


图 7.11

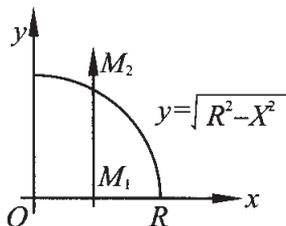


图 7.12

$$V = 8 \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \sqrt{R^2 - x^2} dx = 8 \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \frac{16}{3} R^3.$$

例 4 计算积分  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , 其中  $D$  是以原点为心的单位圆  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

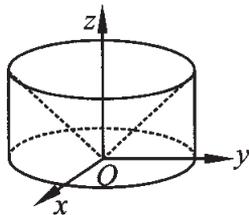


图 7.13

解 这是母线平行于  $z$  轴的圆柱体  $x^2 + y^2 \leq 1$  刨去锥体  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  后所余立体的体积(图 7.13). 考虑到积分区域与被积函数对于  $x$ ,  $y$  都是对称的, 因此采用任何一种积分次序, 计算方法将是同样的, 然而

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= 4 \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy \\ &= 2 \int_0^1 [y \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2})] \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \end{aligned}$$

$$= 2 \int_0^1 \left( \sqrt{1-x^2} + x^2 \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right) dx = \dots,$$

再往下算将十分复杂,应考虑别的简便方法.

### 7.1.5 极坐标系下二重积分的累次积分法

上面的例子,几何上看来较为整齐,甚至可以直接看出它的结果,为什么会算出这样复杂的式子呢?它的积分区域是个圆,被积函数在以原点为中心的圆周  $x^2 + y^2 = r^2$  上都取相同的值  $r$ ,回顾我们的积分步骤却采用的是直角坐标系下的切片法,这样切出的薄片很不整齐就难于往下完成积分了.这有如用斧子劈一个木墩,顺着它的纹理劈本来是省事的.如果拿来横劈,使多大劲也难劈开了!其原因就在于积分时对区域  $D$  的分割方法不合适,而分割方法又直接与所用的坐标系联系在一起,所以我们需要讨论从直角坐标系转换到别的坐标系,例如极坐标系时,二重积分的计算方法.

若将二重积分从直角坐标系下的变量  $x, y$  用关系

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$$

代换成极坐标系下的变量  $r, \varphi$  时,则被积函数应变为

$$f(x, y) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

而积分区域的边界曲线的方程亦得作相应的变换.就 7.1.4 的例 4 而言,被积函数  $\sqrt{x^2 + y^2}$  变为

$$\sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} = r.$$

积分区域是单位圆,它从直角坐标的表示形式

$$-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

变成了简单的形式

$$0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

此外,在这代换下,还必须用极坐标系下的坐标曲线去分割积分区域.这些坐标曲线是以原点为心的一族同心圆

$$r = r_i, \Delta r = r_{i+1} - r_i$$

与从原点出发的一族射线(图 7.14)

$$\varphi = \varphi_i, \Delta\varphi = \varphi_{j+1} - \varphi_j.$$

当分割越来越密时,可以看出面积元越近似一个矩形,它相邻两边的长是  $\Delta r$  及  $r\Delta\varphi$ (图 7.15). 因此在极坐标曲线网的分割下,面积元素为

$$\Delta A = r\Delta r\Delta\varphi,$$

亦即

$$dA = r dr d\varphi.$$

于是

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi,$$

这就是从直角坐标代换成极坐标时二重积分的计算公式,式中  $r dr d\varphi$  是极坐标下的面积元素.

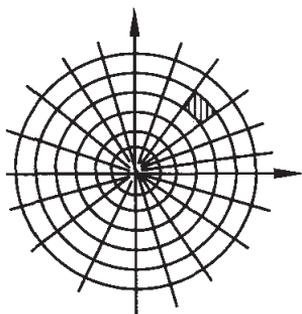


图 7.14

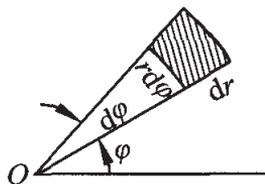


图 7.15

在实际计算时,还应把它化成累次积分来进行. 与直角坐标的讨论相仿,假设区域  $D$  位于两条射线  $\varphi = \alpha$  和  $\varphi = \beta$  之间( $\alpha < \beta$ ), 并且从原点出发的任意射线  $\varphi = \varphi_0$  ( $\alpha < \varphi_0 < \beta$ ) 与  $D$  的边界至多相交于两点  $M_1$  和  $M_2$  (图 7.16), 于是当  $\varphi$  从  $\alpha$  渐增至  $\beta$  时, 点  $M_1$ ,  $M_2$  就分别描出边界上的两段曲线, 在极坐标下设其方程是

$$r = r_1(\varphi), r = r_2(\varphi) \quad (\alpha \leq \varphi \leq \beta),$$

则二重积分就可化为如下的累次积分

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

如果极点  $O$  在区域  $D$  内(图 7.17), 且  $D$  的边界曲线的极坐标方程为  $r = r(\varphi)$  ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ), 这时  $r_1(\varphi)$  可看作是收缩为一点, 即极点  $O$ , 就是  $r_1(\varphi) \equiv 0$ , 而  $r_2(\varphi) = r(\varphi)$ ,  $\varphi$  从 0 变到  $2\pi$ . 所以

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

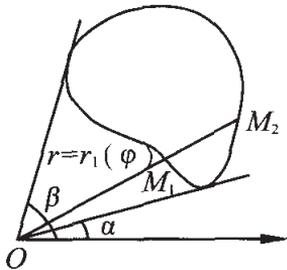


图 7.16

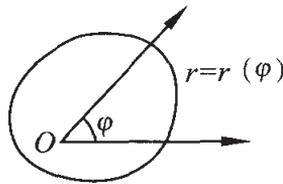


图 7.17

现在来完成 7.1.4 例 4 的计算, 它的积分区域是单位圆, 所以

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r \cdot r dr = \frac{2}{3} \pi.$$

与 7.1.4 中的做法相比较, 功效大不一样!

至于积分限  $\alpha, \beta$  和  $r_1(\varphi), r_2(\varphi)$  的确定, 一般需要作具体分析. 请琢磨下面的例子.

**例 1** 球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  被圆柱面  $x^2 + y^2 = ax$  所截, 求截下的立体之体积(图 7.18).

**解** 由对称性可知, 所求立体的体积是它在第一卦限内之体积的 4 倍, 因此有

$$V = 4 \iint_D \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} dx dy,$$

其中  $D$  为半圆周  $y = \sqrt{ax - x^2}$  与  $x$  轴所围成的区域(图 7.19).

转换成极坐标计算时, 积分区域  $D$  位于射线  $\varphi = 0$  与  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  之间,

而  $r_1(\varphi) = 0, r_2(\varphi) = a\cos\varphi$ , 于是求得

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \sqrt{a^2 - r^2} r dr \\ &= \frac{4}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \varphi) d\varphi = \frac{4}{3} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) a^3. \end{aligned}$$

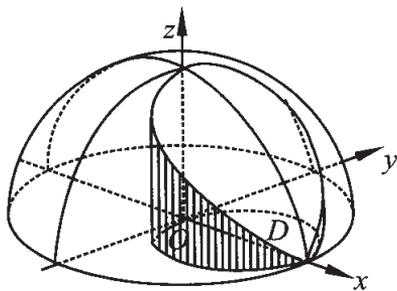


图 7.18

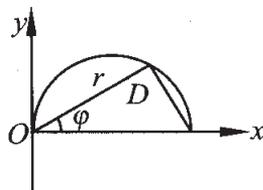


图 7.19

例 2 试计算两球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  与  $x^2 + y^2 + (z-R)^2 = R^2$  相交所成立体的体积(图 7.20).

解 两球面的交线方程可表示为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 + (z-R)^2 = R^2 \end{cases}$$

或化简成

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{3}{4}R^2, \\ z &= \frac{R}{2}. \end{aligned}$$

由此推知积分区域  $D$  为圆  $x^2 + y^2 = \frac{3}{4}R^2$ . 因此以  $D$  为底, 半球面

$z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$  为顶的曲顶柱体的体积是

$$V_1 = \iint_D \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} dx dy;$$

而以  $D$  为底, 半球面  $z = R - \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$  为顶的曲顶柱体的体积是

$$V_2 = \iint_D [R - \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}] dx dy.$$

所以欲求的立体体积是

$$\begin{aligned} V &= V_1 - V_2 \\ &= \iint_D \{ \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} - [R - \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}] \} dx dy. \end{aligned}$$

转换成极坐标即得

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} (2\sqrt{R^2 - r^2} - R) r dr = \frac{5}{12}\pi R^3.$$

例 3 求双纽线  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$  所围区域的面积.

解 记双纽线的第一象限的弧段与  $x$  轴围成的区域为  $D$  (图 7.21), 由对称性, 整个双纽线所围之区域的面积就为

$$S = 4 \iint_D dx dy.$$

采用极坐标代换来计算这个二重积分. 因为双纽线的方程这时成为  $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ , 所以积分区域  $D$  可表示成

$$0 \leq r \leq a\sqrt{2\cos 2\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

于是求得

$$S = 4 \iint_D r dr d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} r dr = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi = 2a^2.$$

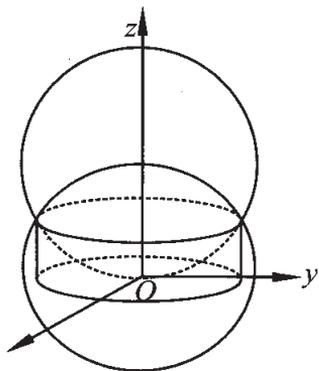


图 7.20

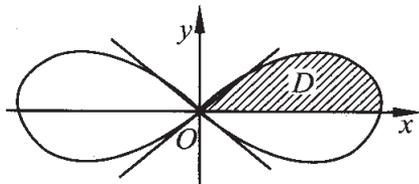


图 7.21

从上面这些例子中可以看出,当被积函数出现  $x^2 + y^2$  这一类的表达式,或积分区域的边界是圆弧时,代换到极坐标计算二重积分一般是比较方便的.下面再来考察一个例子.

例 4 计算积分  $\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ , 其中  $D_1$  是中心在原点,半径为  $R$  的圆  $x^2 + y^2 \leq R^2$ .

解 采用极坐标即得

$$\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R e^{-r^2} r dr = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

由例 4 可计算重要的广义积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-x^2} dx.$$

事实上,由于正方形区域  $D_2 (-R \leq x \leq R, -R \leq y \leq R)$  包含圆  $D_1 (x^2 + y^2 \leq R^2)$ ,又含在圆  $D_3 (x^2 + y^2 \leq 2R^2)$  之内,所以正值函数  $e^{-(x^2+y^2)}$  在这些区域上的二重积分满足不等式

$$\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{D_3} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

但两边的二重积分的值已算出为

$$\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

$$\iint_{D_3} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi(1 - e^{-2R^2});$$

中间的二重积分可化为两个定积分的乘积

$$\iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \cdot \int_{-R}^R e^{-y^2} dy = \left( \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2.$$

于是上述不等式可化简成

$$\pi(1 - e^{-R^2}) \leq \left( \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \pi(1 - e^{-2R^2})$$

令  $R$  趋于无穷取极限,据此即得

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

或因被积函数是偶函数,又可写成

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

它称为概率积分,以后是很有用的.

### 7.1.6 二重积分的一般曲线坐标代换

以上我们说明了利用极坐标代换计算二重积分的方法,现在要从一般的情形进一步考虑这个问题.

设由变换式

$$u = u(x, y), v = v(x, y)$$

引进新变量  $u, v$  以代替直角坐标  $x, y$ , 并且要求在这变换下, 坐标  $(x, y)$  与数对  $(u, v)$  对一一对应的, 就是平面上点  $M$  的坐标  $(x, y)$  可以由此唯一确定出一对数  $(u, v)$ ; 反之, 给定一对数  $(u, v)$  也可以从中唯一地解出坐标  $(x, y)$ :

$$x = x(u, v), y = y(u, v).$$

于是当  $u$  取定某数值时, 方程  $u = u(x, y)$  就在平面  $Oxy$  上给出了一条曲线, 对于不同的一组  $u$  值, 它就给出了一族曲线, 称为  $v$  曲线; 同样, 对于不同的一组  $v$  值, 方程  $v = v(x, y)$  也给出了另一族曲线, 称为  $u$  曲线. 由于数对  $(x, y)$  与  $(u, v)$  存在一一对应关系, 所以同族的任意两条曲线不会相交, 而不同族的任意两条曲线最多只有一个交点(图 7.22). 因此数对  $(u, v)$  称为点  $M(x, y)$  的曲线坐标, 而  $u$  曲线,  $v$  曲线就称为坐标曲线.

为了给出在曲线坐标的代换下面积元  $dA$  的表达式, 我们还假设函数  $x(u, v), y(u, v)$  具有连续的偏微商. 如同极坐标情形一样, 用两族坐标曲线去分割积分区域, 并从中取出常数值为  $u, u + \Delta u$  与  $v, v + \Delta v$  的坐标曲线所围成的小曲边四边形  $M_1M_2M_3M_4$ (图 7.23), 并计算它的面积.

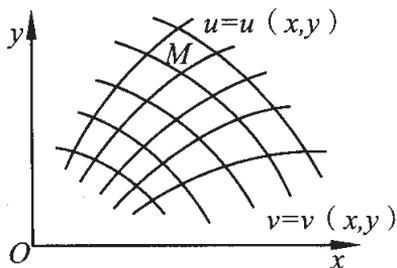


图 7.22

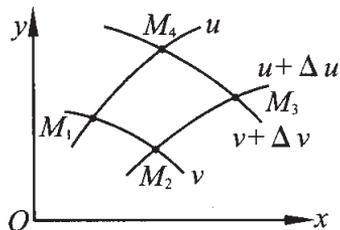


图 7.23

引理 设有连续光滑映射  $\varphi: x = x(u, v), y = y(u, v), (u, v)$

$\in D'$ , 且  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$ , 则区域  $D$  的面积  $\mu(D)$  为

$$\mu(D) = \iint_D dx dy = \iint_{D'} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

引理的证明在第八章给出。

另外, 由二重积分中值定理, 存在  $(\bar{u}, \bar{v}) \in D'$ , 使  $\mu(D) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Big|_{\substack{u=\bar{u} \\ v=\bar{v}}} \mu(D')$ , 其中  $\mu(D')$  为  $D'$  的面积. 由  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$  的连续性, 得到

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\mu(D)}{\mu(D')} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$$

这里  $\rho$  为区域  $D'$  的最大直径. 故  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$  在几何上表示“面积元素”的伸缩系数.

今用引理来证明二重积分的换元公式. 一般地, 用曲线网把  $O'uv$  平面上的区域  $D'$  分成  $n$  个小区域  $D'_i$ , 在变换式  $\varphi$  之下, 与之对应的在  $Oxy$  平面上的区域  $D$  被分成  $n$  个小区域  $D_i$ , 且它们的面积分别记为  $\mu(D'_i)$  与  $\mu(D_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . 而关于二重积分

$$\iint_D f(x, y) dx dy \text{ 的积分和为}$$

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \mu(D_i).$$

其中  $(x_i, y_i) \in D_i, i = 1, 2, \dots, n$ . 由引理与二重积分的中值定理, 得到

$$\mu(D_i) = \iint_{D_i'} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_{\substack{u=\bar{u}_i \\ v=\bar{v}_i}} \mu(D_i').$$

其中  $(\bar{u}_i, \bar{v}_i) \in D_i', i = 1, 2, \dots, n$ . 今取  $x_i = x(\bar{u}_i, \bar{v}_i), y_i = y(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$ , 就有  $(x_i, y_i) \in D_i, i = 1, 2, \dots, n$ . 故有

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f[x(\bar{u}_i, \bar{v}_i), y(\bar{u}_i, \bar{v}_i)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_{\substack{u=\bar{u}_i \\ v=\bar{v}_i}} \mu(D_i').$$

由于  $D$  中逐段光滑曲线必对应于  $D'$  中逐段光滑曲线, 故上述等式右端的和式就是在  $D'$  上可积函数  $f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$  的积分和. 让所有  $D_i'$  的最大直径趋于零, 又由变换式  $\varphi$  的连续性可知, 所有  $D_i$  的最大直径也趋于零, 从而得到

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv.$$

于是在曲线坐标的代换下, 面积元素  $dA$  就可以表示成

$$dA = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv.$$

上面的变换式

$$u = u(x, y), v = v(x, y)$$

还可以从另一观点加以解释. 如果将  $(u, v)$  看作另一直角坐标平面  $O'uv$  上的点的坐标, 则这个变换就确定了平面  $Oxy$  与平面  $O'uv$  上点和点之间的某种对应关系, 或者说点和点之间的变换关系. 这时在平面  $Oxy$  上的  $u$  曲线和  $v$  曲线变成了平面  $O'uv$  上的直线; 而平面  $Oxy$  上的区域  $D$  就变成了平面  $O'uv$  上的区域  $D'$ , 并且  $D$  和  $D'$  可以有完全不同的形状(图 7.24, 图 7.25).

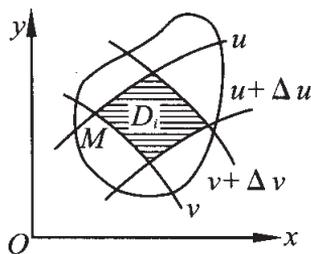


图 7.24

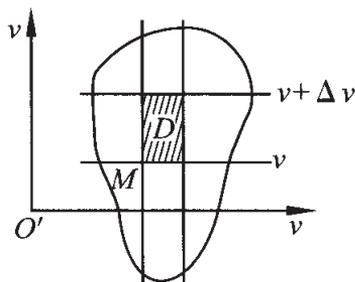


图 7.25

综上所述,就有一般曲线坐标代换下二重积分的计算公式

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv,$$

这里  $D'$  是  $D$  变换到平面  $O'uv$  上的对应区域.

在变换为极坐标  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$  的特殊情形下,雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

上述计算二重积分的公式就化成

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

它与前面得到的公式唯一的区别是变换前后的区域在那里都是同一个  $D$ ,这是因为那时我们把  $(r, \varphi)$  看作同一平面上的点  $(x, y)$  的极坐标.

**例 1** 试计算椭球体  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$  的体积.

**解** 这椭球体被平面  $Oxy$  截成对称的两个半椭球,所以

$$V = 2 \iint_D z dx dy = 2c \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy,$$

其中积分区域  $D$  是平面  $Oxy$  上的椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ .

为了寻求变量代换,先令

$$\frac{x}{a} = s, \frac{y}{b} = t,$$

于是平面  $Oxy$  上的椭圆  $D$  就变成平面  $O'st$  上的单位圆  $D'$  (图 7.26)

$$s^2 + t^2 \leq 1.$$

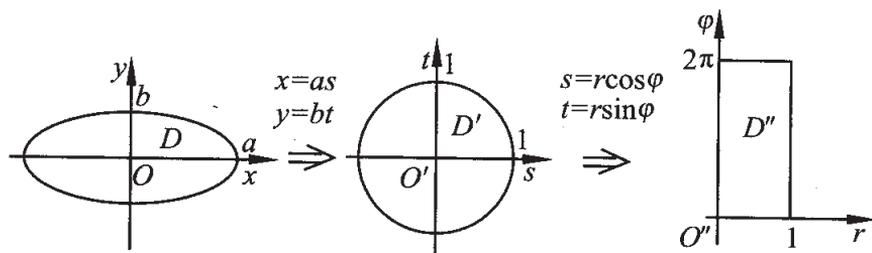


图 7.26

然后再代换到极坐标

$$s = r \cos \varphi, t = r \sin \varphi,$$

其中  $r, \varphi$  的变化范围是

$$0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

它是平面  $O'r\varphi$  上的一个矩形  $D''$ .

将上面接连作的两个代换并成一个代换,于是可得

$$x = ar \cos \varphi, y = br \sin \varphi.$$

它就把平面  $O'r\varphi$  的矩形  $D''$  变成平面  $Oxy$  上的椭圆  $D$ . 其雅可比行列式是

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} a \cos \varphi & -ar \sin \varphi \\ b \sin \varphi & br \cos \varphi \end{vmatrix} = abr.$$

在这代换下,可算得二重积分

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy &= \iint_{D''} \sqrt{1 - r^2} abr dr d\varphi \\ &= ab \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} r dr = \frac{2}{3} \pi ab. \end{aligned}$$

从而椭球的体积为

$$V = \frac{4}{3}\pi abc.$$

当  $a = b = c$  时就得到球体体积  $V = \frac{4}{3}\pi a^3$ .

### 例 2 计算积分

$$\iint_D (\sqrt{x} + \sqrt{y}) dx dy,$$

其中  $D$  是由曲线  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$  与坐标轴所围成的区域(图 7.27).

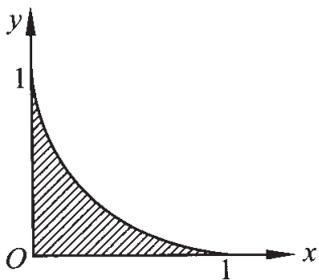


图 7.27

**解** 为了有理化被积函数,引申极坐标代换,试令

$$x = r^2 \cos^4 t, y = r^2 \sin^4 t.$$

这时积分区域  $D$  的边界  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$  变成

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = r(\cos^2 t + \sin^2 t) = r = 1.$$

当  $r = 0$  时,它表示原点;而右半  $x$  轴变到  $t = 0$ ,上半  $y$  轴变到  $t = \frac{\pi}{2}$ . 容易算出这变换的雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = 8r^3 \cos^3 t \sin^3 t.$$

于是算得

$$\iint_D (\sqrt{x} + \sqrt{y}) dx dy = 8 \int_0^1 r^4 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \sin^3 t dt = \frac{2}{15}.$$

**例 3** 求积分  $\iint_D x^3 y^3 dx dy$ , 其中  $D$  是由四支抛物线  $y^2 = px$ ,  $y^2 = qx$ ,  $x^2 = ay$ ,  $x^2 = by$  所围成的区域 ( $0 < p < q, 0 < a < b$ ).

**解** 在积分区域  $D$  中引入两族抛物线(图 7.28)

$$y^2 = ux, x^2 = vy,$$

则当  $u$  从  $p$  变到  $q$ ,  $v$  从  $a$  变到  $b$  时,这两族曲线分别扫过整个区域  $D$ . 因此代换

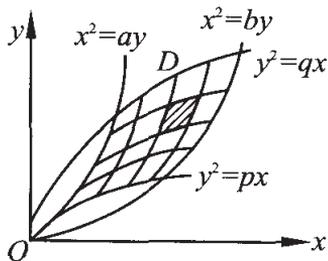


图 7.28

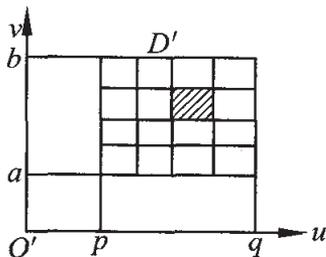


图 7.29

$$u = \frac{y^2}{x}, v = \frac{x^2}{y},$$

把平面  $Oxy$  上的区域  $D$  变成平面  $O'uv$  上的区域  $D'$ , 即变成由  $p \leq u \leq q, a \leq v \leq b$  所表示的矩形(图 7.29). 从这个代换式解出  $x, y$  可得

$$x = (uv^2)^{\frac{1}{3}}, y = (u^2v)^{\frac{1}{3}}.$$

它的雅可比行列式为

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \frac{1}{3}.$$

于是算得

$$\begin{aligned} \iint_D x^3 y^3 dx dy &= \frac{1}{3} \iint_{D'} u^3 v^3 du dv = \frac{1}{3} \int_p^q u^3 du \int_a^b v^3 dv \\ &= \frac{1}{48} (q^4 - p^4) (b^4 - a^4) \end{aligned}$$

### 7.1.7 广义二重积分

与定积分一样, 以上考虑的二重积分受着双重限制, 即积分区域的有界性和被积函数的有界性, 但在实际问题中, 又往往会遇到不满足以上条件的情形, 为此, 需要引进广义二重积分, 又鉴于广义二重积分的复杂性, 在这里我们仅引进今后常用到的绝对收敛的广义二重积分的概念.

设  $M_0$  是平面上的一点, 如果对于任意的  $\delta > 0, f(x, y)$  在  $M_0$

的去心  $\delta$  邻域内总是无界的, 则称  $M_0$  为函数  $f(x, y)$  的一个瑕点, 相对而言, 不是瑕点的点称为正常点.

**定义** 设  $f(x, y)$  是定义在平面  $Oxy$  的点集  $D$  上的二元函数,  $D$  是无界点集或  $f(x, y)$  至少有一个瑕点.

(1) 假设  $f(x, y)$  在  $D$  上非负, 并用  $\Lambda$  表示平面上不含有  $f(x, y)$  的瑕点的可求面积的有界闭集合的全体, 如果对于任意的  $F \in \Lambda$ ,  $f(x, y)$  在集  $D \cap F$  上都可积并且把

$$\sup_{F \in \Lambda} \iint_{D \cap F} f(x, y) dx dy$$

称为函数  $f(x, y)$  在区域  $D$  上的广义二重积分, 记为

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \sup_{F \in \Lambda} \iint_{D \cap F} f(x, y) dx dy.$$

若上式右端有限, 就称广义二重积分  $\iint_D f(x, y) dx dy$  收敛, 若上式

右端无限, 就称广义二重积分  $\iint_D f(x, y) dx dy$  发散.

(2) 一般情形下, 令

$$p(x, y) = \frac{1}{2}(|f(x, y)| + f(x, y))$$

$$q(x, y) = \frac{1}{2}(|f(x, y)| - f(x, y)),$$

若  $p(x, y)$  和  $q(x, y)$  在  $D$  上的广义积分都收敛, 则称  $f(x, y)$  在  $D$  上的广义积分绝对收敛, 并规定

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D p(x, y) dx dy - \iint_D q(x, y) dx dy.$$

在具体计算广义二重积分时, 通常是首先设法找一系列这样的有界闭集  $\{F_n\}$ , 使得对于函数  $f$  在  $D$  内的任意一个正常点  $M$ , 都存在自然数  $N$ , 当  $n > N$  时,  $M \in F_n$ , 然后再用下式求出广义积分:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D \cap F_n} f(x, y) dx dy.$$

例1 (1) 设  $I: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ , 求  $f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x}}$  在  $I$  上的广义二重积分;

(2) 设  $D$  是第一象限, 求

$$f(x, y) = \frac{1}{(1+x+y)^3}$$

在  $D$  上的广义二重积分.

解 (1) 这是有界区域上无界函数的积分. 令  $I_n: \frac{1}{n} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ , 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $I_n \rightarrow I$ , 而

$$\begin{aligned} \iint_{I_n} \frac{y}{\sqrt{x}} dx dy &= \int_{\frac{1}{n}}^1 dx \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{x}} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

故

$$\iint_I \frac{y}{\sqrt{x}} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{I_n} \frac{y}{\sqrt{x}} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1.$$

(2) 这是有界函数在无界区域上的积分. 令  $I_n: 0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq n$ , 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $I_n \rightarrow I$ , 而

$$\begin{aligned} \iint_{I_n} \frac{dx dy}{(1+x+y)^3} &= \int_0^n dx \int_0^n \frac{dy}{(1+x+y)^3} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^n [(1+x)^{-2} - (1+n+x)^{-2}] dx \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1}\right), \end{aligned}$$

故

$$\iint_D \frac{dx dy}{(1+x+y)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{I_n} \frac{dx dy}{(1+x+y)^3} = \frac{1}{2}.$$

例2 利用  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ , 计算下列积分:

(1)  $\iint_D e^{-(x^2+y)} dx dy$ ,  $D$  是第一象限;

(2)  $\iint_{R^2} e^{-x^2-xy-y^2} dx dy$ ,  $R^2$  是全平面.

解 (1) 令  $I_n: 0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq n$ ,

$$\iint_{I_n} e^{-(x^2+y)} dx dy = \int_0^n e^{-x^2} dx \int_0^n e^{-y} dy,$$

但

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-y} dy = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - e^{-n}) = 1,$$

故

$$\iint_D e^{-(x^2+y)} dx dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

(2) 令  $u = x + \frac{1}{2}y, v = \frac{\sqrt{3}}{2}y$ ,

$$\left| \frac{1}{J} \right| = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\begin{aligned} \iint_{R^2} e^{-x^2-xy-y^2} dx dy &= \iint_{R^2} e^{-u^2-v^2} \frac{2}{\sqrt{3}} du dv \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{u^2+v^2 \leq n^2} e^{-u^2-v^2} du dv \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \lim_{n \rightarrow \infty} \pi (1 - e^{-n^2}) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \pi. \end{aligned}$$

## 复习思考题

1. 叙述二重积分的定义,它有什么几何意义与物理意义?
2. 写出二重积分的积分中值公式.
3. 叙述二重积分的累次积分法.如何选择方便的积分次序?
4. 叙述二重积分的变量代换法,写出极坐标和一般曲线坐标下的面积元素的表达式.
5. 什么叫二元函数的瑕点?试述仅有一个瑕点的广义二重积分的定义.

## 习题 7.1

1. 把下列二重积分  $\iint_D f(x,y) dx dy$  化成累次积分,确定积分

限:

(1)  $D$ : 由  $x = a, x = b, y = c, y = c + x$  围成,其中  $0 < a < b, c > 0$ ;

(2)  $D: x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1$ ;

(3)  $D: (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1$ ;

(4)  $D: y = 2x, 2y = x, xy = 2$  围成(第一象限部分).

2. 改变下列积分顺序:

$$(1) \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy;$$

$$(2) \int_0^2 dx \int_{2x}^{6-x} f(x,y) dy;$$

$$(3) \int_{-2}^2 dx \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dy;$$

$$(4) \int_0^a dy \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y) dx;$$

$$(5) \int_a^b dy \int_y^b f(x,y) dx;$$

$$(6) \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx.$$

3. 改变积分顺序后表成一个累次积分:

$$(1) \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy;$$

$$(2) \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x, y) dy;$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x, y) dy;$$

$$(4) \int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy + \int_2^4 dx \int_x^4 f(x, y) dy.$$

4. 利用函数的奇偶性计算下列积分:

$$(1) \iint_D x^3 y^3 dx dy, D: x^2 + y^2 \leq R^2;$$

$$(2) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, D: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1;$$

$$(3) \iint_D \sin x \sin y dx dy, D: x^2 - y^2 = 1, x^2 + y^2 = 9 \text{ 围成含原点的}$$

的部分;

$$(4) \iint_D x^2 y dx dy, D: x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0.$$

5. 计算下列积分:

$$(1) \iint_D x \sin y dx dy, D: 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2};$$

$$(2) \iint_D \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dx dy, D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1;$$

$$(3) \iint_D e^{x+y} dx dy, D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1;$$

$$(4) \iint_D \frac{x^2}{1+y^2} dx dy, D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1;$$

$$(5) \iint_D \cos(x+y) dx dy, D: \text{由 } y = \pi, x = y, x = 0 \text{ 围成};$$

(6)  $\iint_D xy^2 dx dy$ ,  $D$ : 由  $y^2 = 4x$  和  $x = 1$  围成;

(7)  $\iint_D (x+y) dx dy$ ,  $D$ : 由  $x^2 + y^2 = a^2$  围成的圆在第一个象限部分;

(8)  $\iint_D (x+y-1) dx dy$ ,  $D$ : 由  $y = x, y = x+a, y = a, y = 3a$  围成;

(9)  $\iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy$ ,  $D$ : 由  $y = x$  和  $x = y^2$  围成;

(10)  $\iint_D x^2 y \cos(xy^2) dx dy$ ,  $D: 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq 2$ ;

(11)  $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$ ,  $D$ : 由  $x = 2, y = x$  及  $xy = 1$  围成.

6. 画出下列各二重积分的积分区域, 并计算其值:

(1)  $\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2) dy$ ;

(2)  $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy(x+y) dy$ ;

(3)  $\int_0^{2R} dy \int_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} (x^2+y^2) dx$ ;

(4)  $\int_0^{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}} dx \int_0^{Rx} \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) dy + \int_{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) dy$ ;

(5)  $\int_0^a dx \int_{\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dy$ .

7. 利用变量代换法计算下列二重积分:

(1)  $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy$ ,  $D: x^2 + y^2 \leq 1$ ;

(2)  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ ,  $D: a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$ ;

$$(3) \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, D: x^2 + y^2 \leq x + y;$$

$$(4) \iint_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} dx dy, D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4, y = 0, y = x \text{ 所围成的}$$

第一象限部分;

$$(5) \iint_{x^2 + y^2 \leq x} \frac{x^2}{x^2 + y^2} dx dy.$$

8. 利用一般曲线坐标代换计算下列积分:

$$(1) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, D: \text{由 } xy = 1, xy = 2, y = x, y = 2x \text{ 围}$$

成的第一象限部分;

$$(2) \iint_D dx dy, D: \text{由 } y^2 = ax, y^2 = bx, x^2 = my, x^2 = ny \text{ 围成的}$$

区域( $a > b > 0, m > n > 0$ );

$$(3) \iint_D xy dx dy, D: xy = a, xy = b, y^2 = cx, y^2 = dx \text{ 围成的在}$$

第一象限部分( $0 < a < b, 0 < c < d$ );

$$(4) \iint_D 4xy dx dy, D: x^4 + y^4 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 \text{ 围成的区域.}$$

9. 求  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \iint_{x^2 + y^2 \leq \rho^2} f(x, y) dx dy$ , 其中  $f(x, y)$  是连续函数.

10. 求下列曲线所围成的平面区域的面积:

$$(1) x^2 + 2y^2 = 3 \text{ 和 } xy = 1 \text{ (不含原点部分);}$$

$$(2) (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = 2a(x^2 - y^2), a > 0;$$

$$(3) x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3};$$

$$(4) \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a} \text{ (} a > 0 \text{) 和 } x = 0, y = 0;$$

$$(5) (x - y)^2 + x^2 = a^2 \text{ (} a > 0 \text{);}$$

$$(6) (x^2 + y^2)^2 = 2ax^3;$$

$$(7) \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 = \frac{xy}{c^2};$$

(8) 由直线  $x+y=a$ ,  $x+y=b$ ,  $y=kx$  和  $y=mx$  ( $0 < a < b$ ,  $0 < k < m$ ) 围成的平面区域.

11. 证明:  $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} e^{x^2+y^2} dx dy \leq \left[ \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{x^2} dx \right]^2$ .

12. 计算广义积分:

(1)  $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$ , 其中  $D$  是单位圆内部;

(2)  $\iint_D \frac{dx dy}{(1+x+y)^\alpha}$ , 其中  $D$  是第一象限,  $\alpha$  为常数.

13. 设  $f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ ,  $D$  是由  $x+y=u$ ,  $x=0$  与  $y=0$  所围成, 则有

$$F(u) = \iint_D f(x, y) dx dy = \begin{cases} 0, & u < 0, \\ \frac{u^2}{2}, & 0 \leq u < 1, \\ 1 - \frac{(2-u)^2}{2}, & 1 \leq u < 2, \\ 1, & u \geq 2. \end{cases}$$

## 7.2 三重积分

### 7.2.1 三重积分的概念

设  $V$  是空间的一个有界闭区域, 其上不均匀地分布着某种物质, 若在  $V$  上每一点  $(x, y, z)$  处的密度  $\rho(x, y, z)$  为已知, 为求出  $V$  上物质的总量, 常将  $V$  分成许多小块, 当小块  $V_i$  的直径 (即  $V_i$  上任意两点距离的上确界) 很小时,  $\rho(x, y, z)$  的值在  $V_i$  上的变化不大, 可在  $V_i$  上任取一点  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ , 以  $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$  作为小块上质量的近似值 ( $\Delta V_i$  表示  $V_i$  的体积), 我们便得到  $V$  上物质质量的近

似值

$$\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i,$$

可以想像,当分割越细,所求得的近似值将越接近于  $V$  上物质总量,所以如果

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i = m,$$

则  $m$  就是  $V$  上物质总量的精确值. 这就是说,求不均匀分布的物质总量,归结为求以上的极限问题. 与二重积分一样,极限

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) = m$$

的意义是,对于任意的  $\varepsilon > 0$ ,存在  $\delta > 0$ ,对任意分割  $T$  及各  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  的任意选取,只要  $\lambda(T) < \delta$ ,就有

$$\left| \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i - m \right| < \varepsilon.$$

**定义** 设三元函数  $f(x, y, z)$  在有界闭区域  $V$  上有定义. 用一些曲面将  $V$  分割成有限个两两没有公共内点的小部分,称为  $V$  上的一个分割法,记作  $T$ . 分割  $T$  下每一小部分称为一个小块,小块的总数记为  $n$ ,给小块以编号,将第  $i$  个小块记作  $V_i$ ,并用  $\Delta V_i$  表示  $V_i$  的体积,用  $d_i$  表示  $V_i$  的直径. 在每个  $V_i$  上任取一点  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  作和数

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i,$$

称这个和数为  $f(x, y, z)$  在  $V$  上的一个积分和或黎曼和. 记

$$\lambda(T) = \max\{d_1, d_2, \dots, d_n\},$$

如果

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$$

收敛,则称  $f(x, y, z)$  在  $V$  上(黎曼)可积,并称其极限值为  $f(x, y,$

$z)$  在  $V$  上的三重积分, 用  $\iiint_V f(x, y, z) dV$  表示, 即

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i.$$

在表示式  $\iiint_V f(x, y, z) dV$  中, 称  $f(x, y, z)$  为被积函数, 称  $V$  为积分区域,  $dV$  是相应于  $\Delta V_i$  而书写的, 称为体积元素, 称  $f(x, y, z) dV$  为被积表达式.

比较三重积分和二重积分的定义可见, 两者区别在于, 这里的被积函数是三元函数, 这里的积分区域是空间的有界区域, 而分割、近似、求和、取极限的方法完全相同. 由此, 我们可以把有关二重积分的一些结果平行地搬到三重积分上来, 首先是可积性问题, 以下定理成立:

**定理** 设有界闭区域  $V$  的边界是分片光滑曲面. 如果  $f(x, y, z)$  在有界闭区域  $V$  上有界的, 且在这个区域上除去有限个点、有限条光滑曲线和有限块光滑曲面外都是连续的, 则它在  $V$  上可积.

特别地, 上述有界闭区域  $V$  上的连续函数是可积的.

三重积分也具有与二重积分一样的一些简单性质, 例如: 若  $f(x, y, z)$  在有界闭区域  $V$  上连续, 则在  $V$  上至少有一点  $(\xi, \eta, \zeta)$  使得

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = f(\xi, \eta, \zeta) V,$$

其中  $V$  表示区域  $V$  的体积.

### 7.2.2 直角坐标系下三重积分的累次积分法

在直角坐标系下, 如果用平行于坐标面的三族等距平面去分割区域  $V$ , 则除了边沿上那些不规则的小区域外, 所得到的其余小区域  $V_i$  均为长方体. 设长方体小区域  $V_i$  的边长为  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ , 就有

$$\Delta V_i = \Delta x \Delta y \Delta z,$$

或写成

$$dV = dx dy dz,$$

并称为直角坐标下的体积元素. 因而常把函数  $f(x, y, z)$  在区域  $V$  上的三重积分表示成

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz.$$

三重积分也可化成三个定积分来计算. 为了说明这个问题, 不妨假设区域  $V$  的表面与平行于  $z$  轴的每条直线至多相交于两点. 将  $V$  投影到平面  $Oxy$  上得一平面区域  $D$ . 以  $D$  的边界为准线作母线平行  $z$  轴的柱面. 这柱面与区域  $V$  的切痕就把  $V$  的表面分为上下两半曲面  $S_1$  及  $S_2$  (图 7.30), 它们的方程分别是

$$z = z_1(x, y), z = z_2(x, y),$$

其中  $z_1(x, y)$  与  $z_2(x, y)$  都是  $D$  上的连续函数, 且有

$$z_1(x, y) \leq z_2(x, y).$$

现在设想在区域  $V$  中有某种物质分布, 它在点  $(x, y, z)$  处的密度恰是给定的函数  $f(x, y, z)$ , 于是三重积分

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

就表示该物质在  $V$  中的质量.

另一方面, 在  $D$  中点  $(x, y)$  处取面积元  $dA = dx dy$ , 以这面积元为底母线平行于  $z$  轴的柱体必通过曲面  $S_1$  穿入  $V$  内, 然后通过曲面  $S_2$  穿出  $V$  外, 其穿入点与穿出点的立坐标分别是  $z_1(x, y)$  与  $z_2(x, y)$ . 容易看出, 区域  $V$  中分布在这细长柱体的质量应是

$$\left( \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy,$$

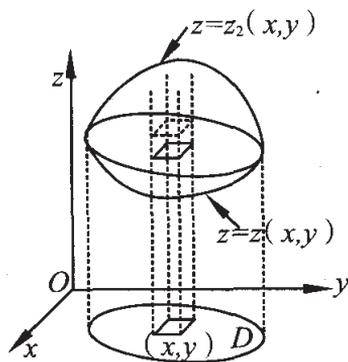


图 7.30

这里对  $z$  积分时,  $x, y$  应看作常数. 当面积元  $dA = dx dy$  取遍区域  $D$  时, 这些细长柱体质量的总和

$$\iint_D \left( \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dx dy$$

就是整个区域  $V$  中物质的质量. 因此就得到了计算三重积分的公式

$$\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \iint_D \left( \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dx dy.$$

如果区域  $D$  表示成

$$a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x),$$

则这个公式还可以写成

$$\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz.$$

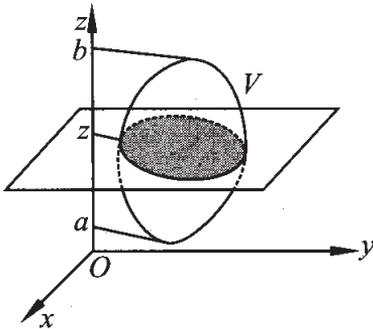


图 7.31

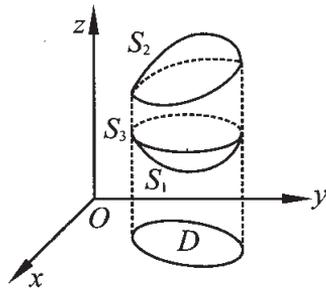


图 7.32

三重积分的计算不仅可以归结成先对  $z$  作定积分, 再对  $x, y$  作二重积分, 而且还可以归结成次序相反的累次积分. 这个结论同样可以从求区域  $V$  中物质的质量来说明. 事实上, 设区域  $V$  在  $z$  轴上的投影区间为  $[a, b]$ , 过这区间内的点  $z$  作垂直于  $z$  轴的平面, 它与  $V$  相截的平面区域记成  $D_z$  (图 7.31), 则以  $D_z$  为底, 高为  $dz$  的柱形薄片的质量是

$$\left( \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz.$$

将上式对  $z$  从  $a$  到  $b$  积分就是整个区域  $V$  的物质质量. 于是我们又  
有计算三重积分的另一公式

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \int_a^b \left( \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz \\ &= \int_a^b dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy. \end{aligned}$$

其中  $D_z$  是随  $z$  而变化的平面区域.

如果区域  $V$  的表面除曲面  $S_1$  与  $S_2$  外, 还有母线平行于  $z$  轴的柱面  $S_3$  (图 7.32), 则上述化三重积分为累次积分的计算公式仍成立.

同样, 如果区域  $V$  的表面与平行于  $x$  轴或  $y$  轴的直线至多相交于两点, 则三重积分也可以化为先对变量  $x$  或  $y$  作定积分, 然后再对其余变量作二重积分.

如果区域  $V$  的表面虽与任何平行于坐标轴的直线相交都多于两点, 但可以作一些辅助曲面把  $V$  分成有限个子区域, 使得每个子区域的表面满足上述条件, 从而在这些子区域上三重积分仍都可化成累次积分进行计算.

**例 1** 计算三重积分  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$ , 其中  $V$  是由坐标面  $x=0, y=0, z=0$  与平面  $x+y+z=1$  围成的四面体.

**解** 先把四面体投影到坐标面  $Oxy$  上, 所得的平面区域  $D$  是由直线  $x=0, y=0$  和  $x+y=1$  所围成的三角形 (图 7.33). 对于  $D$  中的任意一点  $(x, y)$ , 作平行于  $z$  轴的直线, 其穿入  $V$  内之点的立标是  $z=0$ , 穿出  $V$  外之点的立标是  $z=1-x-y$ , 所以算得

$$\iiint_V \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3} = \iint_D dx dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \iint_D \left[ \frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4} \right] dx dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[ \frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4} \right] dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{1}{1+x} - \frac{3-x}{4} \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \left( \ln 2 - \frac{5}{8} \right).
\end{aligned}$$

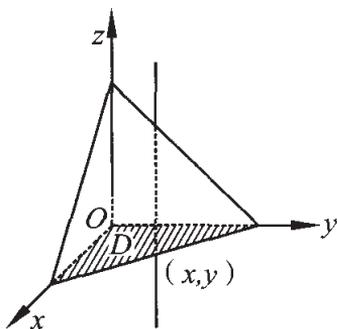


图 7.33

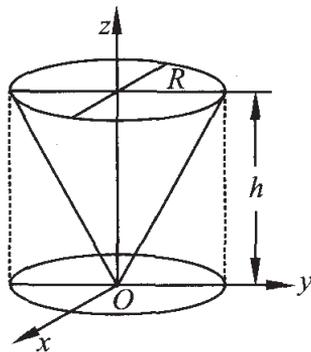


图 7.34

例 2 计算三重积分  $\iiint_V z dx dy dz$ , 其中  $V$  是由锥面  $R^2 z^2 = h^2(x^2 + y^2)$  及平面  $z = h$  围成的锥体.

解 在锥面方程中令  $z = h$  得知  $V$  在平面  $Oxy$  上的投影区域  $D$  是圆  $x^2 + y^2 \leq R^2$  (图 7.34). 过  $D$  内任意一点  $(x, y)$  作平行于  $z$  轴的直线, 其与  $V$  的表面相交两点的立标各是

$$z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}, z = h,$$

于是求得

$$\begin{aligned}
\iiint_V z dx dy dz &= \iint_D dx dy \int_{\frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}}^h z dz \\
&= \frac{1}{2} \iint_D \left[ h^2 - \frac{h^2}{R^2} (x^2 + y^2) \right] dx dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{h^2}{2R^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (R^2 - r^2) r dr \\
 &= \frac{\pi}{4} R^2 h^2.
 \end{aligned}$$

这个三重积分也可化成相反次序的累次积分来计算. 由于区域  $V$  在  $z$  轴上的投影区间是  $[0, h]$ , 且对该区间内的任意一点  $z$ , 作垂直于  $z$  轴的平面, 它与  $V$  交成的区域  $D_z$  是半径为  $\frac{R}{h}z$  的圆  $x^2 + y^2 \leq \frac{R^2}{h^2}z^2$ , 所以

$$\iiint_V z dx dy dz = \int_0^h z dz \iint_{D_z} dx dy = \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h z^3 dz = \frac{\pi}{4} R^2 h^2.$$

这里因为被积函数与变量  $x, y$  无关, 二重积分的计算就变得特别简便, 它的值就是半径为  $\frac{R}{h}z$  的圆面积.

两种计算方法繁简不一, 这是解题前不可不加考虑的.

**例 3** 计算三重积分  $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ , 其中  $V$  是椭球体  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ .

**解** 先计算三重积分  $\iiint_V x^2 dx dy dz$ . 这时被积函数只依赖于  $x$ , 故宜先对  $y, z$  作二重积分. 由于区域  $V$  在  $x$  轴上的投影区间是  $[-a, a]$ , 且过该区间的点  $x$  作垂直于  $x$  轴的平面去截椭球体  $V$  时, 截面区域  $D_x$  是

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 - \frac{x^2}{a^2},$$

这是半轴为  $b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ ,  $c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$  的椭圆, 所以

$$\iiint_V x^2 dx dy dz = \int_{-a}^a x^2 dx \iint_{D_x} dy dz$$

$$\begin{aligned}
 &= \pi bc \int_{-a}^a x^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx \\
 &= \frac{4}{15} \pi a^3 bc
 \end{aligned}$$

同样算得

$$\iiint_V y^2 dx dy dz = \frac{4}{15} \pi ab^3 c, \quad \iiint_V z^2 dx dy dz = \frac{4}{15} \pi abc^3.$$

于是所求的三重积分为

$$\begin{aligned}
 &\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \\
 &= \iiint_V x^2 dx dy dz + \iiint_V y^2 dx dy dz + \iiint_V z^2 dx dy dz \\
 &= \frac{4}{15} \pi abc (a^2 + b^2 + c^2).
 \end{aligned}$$

### 7.2.3 柱坐标下三重积分的计算

在二重积分的计算中,我们看到对于圆形的区域有时采用极坐标较为简便.同样,在三重积分中对于柱形区域,也往往采用柱坐标以简化计算.

为了要在柱坐标下计算连续函数  $f(x, y, z)$  在区域  $V$  上的三重积分

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz,$$

先要把直角坐标系下的变量  $x, y, z$  用关系式

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z$$

代换成柱坐标系下的变量  $r, \varphi, z$ ,然后将  $dV$  变成柱坐标形式的体积元素.

现在用柱坐标的三族坐标面去分割区域  $V$  并从中取出介于柱面  $r$  与  $r + \Delta r$ ,水平面  $z$  与  $z + \Delta z$ ,半平面  $\varphi$  与  $\varphi + \Delta \varphi$  之间的小柱体(图 7.35).当  $\Delta r, \Delta z, \Delta \varphi$  很小时,它近似于一个长方体,其底面

积就是平面极坐标下的面积元  $r\Delta r\Delta\varphi$ , 高是  $\Delta z$ , 因此这个小柱体的体积为

$$\Delta V = r\Delta r\Delta\varphi\Delta z,$$

或写成微分形式

$$dV = r dr d\varphi dz,$$

它就是柱坐标下体积元素的表达式.

如此就引出了在柱坐标的代换下, 三重积分的计算公式, 即为

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r dr d\varphi dz,$$

其中区域  $V$  要用柱坐标表示出来.

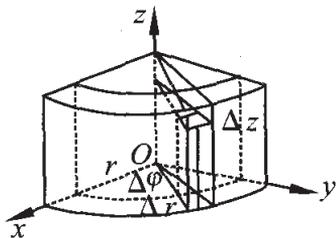


图 7.35

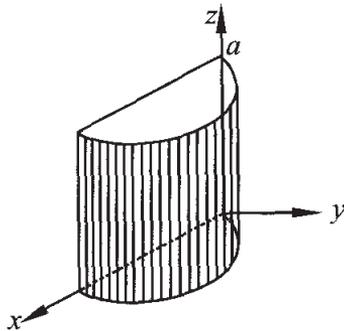


图 7.36

**例 1** 计算三重积分  $\iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ , 其中区域  $V$  是由柱面  $x^2 + y^2 = 2x$  及平面  $z = 0, z = a (a > 0), y = 0$  所围成的半圆柱体(图 7.36).

**解** 采用柱坐标并化成累次积分. 由于区域  $V$  在  $z$  轴的投影区间为  $[0, a]$ , 而  $V$  的截面  $D_z$  是半圆  $0 \leq r \leq 2\cos\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , 所以

$$\iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz = \int_0^a z dz \iint_{D_z} r^2 dr d\varphi$$

$$= \int_0^a z dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2 dr = \frac{4a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi d\varphi = \frac{8}{9}a^2.$$

一般来说,只要积分区域是由柱坐标的坐标面围成或者被积函数是轴对称的,即

$$f(-x, -y, z) = f(x, y, z),$$

三重积分都宜采用柱坐标来计算. 再看下例.

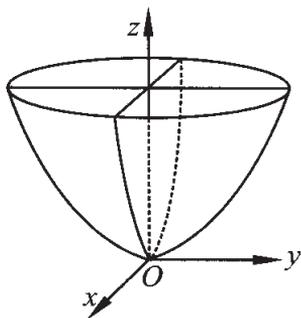


图 7.37

例2 计算三重积分  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{1+x^2+y^2}$ , 其

中  $V$  是由抛物面  $x^2 + y^2 = 4z$  与  $z = h$  所围成的区域(图 7.37).

解 容易看出被积函数关于  $z$  轴为对称, 故这个三重积分也可采用柱坐标计算. 由于区域  $V$  可表示成

$$0 \leq z \leq h, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2\sqrt{z},$$

所以

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{dx dy dz}{1+x^2+y^2} &= \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\sqrt{z}} \frac{r dr}{1+r^2} \\ &= \pi \int_0^h \ln(1+4z) dz \\ &= \frac{\pi}{4} [(1+4h)\ln(1+4h) - 4h]. \end{aligned}$$

#### 7.2.4 球坐标下三重积分的计算

计算三重积分时,除了采用柱坐标外,有时也采用球坐标. 这时必须把直角坐标系下的变量  $x, y, z$  借助于关系式

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, y = r \sin\theta \sin\varphi, z = r \cos\theta,$$

代换成球坐标系下的变量  $r, \theta, \varphi$ , 同时体积元素  $dV$  还应表示成球坐标的形式.

同柱坐标的情形相仿,用球坐标的三族坐标面去分割区域  $V$ , 并从中取出由球面  $r$  与  $r + \Delta r$ , 锥面  $\theta$  与  $\theta + \Delta\theta$ , 半平面  $\varphi$  与  $\varphi + \Delta\varphi$

所围成的小六面体(图 7.38). 当分割越密时, 这个六面体就可以近似成长方体, 它的三条相邻的边长是  $\Delta r, r\Delta\theta$  与  $r\sin\theta\Delta\varphi$ (图 7.39), 而体积是

$$\Delta V = r^2 \sin\theta \Delta r \Delta\theta \Delta\varphi,$$

或写成微分的形式

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi,$$

这就是球坐标下体积元素的表达式.

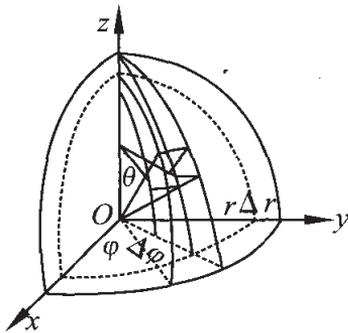


图 7.38

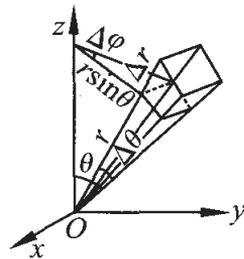


图 7.39

如此引出在球坐标代换下三重积分的计算公式

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V F(r, \theta, \varphi) r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi,$$

其中  $F(r, \theta, \varphi) = f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$ .

在实际计算时, 右边的三重积分还应化成对  $r, \theta, \varphi$  的累次积分. 例如, 若积分区域  $V$  的边界是一个包含原点于其内的闭曲面, 并且它在球坐标系下的方程为  $r = r(\theta, \varphi)$ , 则有

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{r(\theta, \varphi)} F(r, \theta, \varphi) r^2 dr,$$

特别当区域  $V$  是由中心在原点半径为  $a$  的球面所围成时,

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^a F(r, \theta, \varphi) r^2 dr.$$

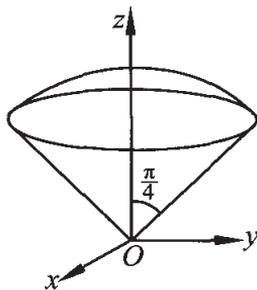


图 7.40

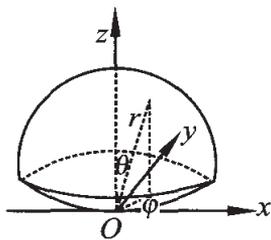


图 7.41

例 1 计算三重积分  $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ , 其中  $V$  是由锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  与球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  所围成的立体(图 7.40).

解 采用球坐标. 被积函数变为

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

而  $V$  的边界曲面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  与  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  分别变为

$$\theta = \frac{\pi}{4}, r = R.$$

所以积分区域  $V$  可以表示成

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq R.$$

由此即得所求的三重积分的值为

$$\begin{aligned} \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta d\theta \int_0^R r^4 dr \\ &= \frac{1}{5} \pi R^5 (2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

例 2 求曲面  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 z (a > 0)$  所围成的立体体积.

解 在曲面的方程中因  $x$  及  $y$  只出现平方项, 故所围立体  $V$  关于平面  $Ozx$  及平面  $Oyz$  为对称; 又因  $z$  不取负值, 所以这个立体

位于平面  $Oxy$  的上侧(图 7.41),从而要求的体积是它的第一卦限内之立体  $V_1$  的四倍,应用球坐标,曲面的方程变为

$$r = a \sqrt[3]{\cos\theta}.$$

而这些坐标在  $V_1$  中的变化范围是

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq a \sqrt[3]{\cos\theta}.$$

于是求得立体的体积为

$$\begin{aligned} \iiint_V dx dy dz &= 4 \iiint_{V_1} dx dy dz = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_0^{a\sqrt[3]{\cos\theta}} r^2 dr \\ &= \frac{2}{3} \pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta = \frac{1}{3} \pi a^3. \end{aligned}$$

一般说来,当被积函数具有形式

$$f(x, y, z) = F(x^2 + y^2 + z^2)$$

或积分区域是球坐标系的坐标曲面围成的,三重积分就宜采用球坐标来进行计算.

### 7.2.5 三重积分一般的变量代换

三重积分变量代换的一般法则,完全可以和二重积分的情形同样讨论. 设由变换

$$x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$$

引进新变量  $u, v, w$  以代替变量  $x, y, z$ , 并且它把空间  $O'uvw$  的区域  $V'$  一对一地变成另一空间  $Oxyz$  的区域  $V$ . 若函数  $x(u, v, w)$ ,  $y(u, v, w)$  和  $z(u, v, w)$  对各变量都有连续的一阶偏微商, 则有

$$\begin{aligned} &\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw, \end{aligned}$$

其中雅可比行列式

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

不为零. 可用 7.1.6 的引理给予证明. 留给读者作练习.

容易看出, 7.2.3 与 7.2.4 得到的三重积分在柱坐标与球坐标下的计算方法, 都是这个一般法则的特殊情形.

例 1 计算曲面  $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$  所围成的立体  $V$  的体积.

解 先作变换  $x = au^3, y = bv^3, z = cw^3$ , 它将空间  $O'uvw$  的单位球体  $V'$

$$u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$$

变到空间  $Oxyz$  中所给的立体  $V$ . 这时雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = 27abcu^2v^2w^2,$$

所以

$$\iiint_V dx dy dz = 27abc \iiint_{V'} u^2 v^2 w^2 du dv dw.$$

再把  $u, v, w$  变换到球坐标, 右边的积分可算得为

$$\begin{aligned} & \iiint_{V'} u^2 v^2 w^2 du dv dw \\ &= \iiint_V r^6 \sin^4 \theta \cos^2 \theta \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^\pi \sin^5 \theta \cos^2 \theta d\theta \int_0^1 r^8 dr = \frac{4}{945} \pi. \end{aligned}$$

从而所求立体的体积为

$$\iiint_V dx dy dz = \frac{4}{35} \pi abc.$$

例2 计算三重积分  $\iiint_V xyz(1-x-y-z)^2 dx dy dz$ , 其中区域  $V$  是由坐标面  $x=0, y=0, z=0$  与平面  $x+y+z=1$  所围成的四面体.

解 作变量代换

$$x+y+z=u, y+z=uv, z=uvw$$

以引进新变量  $u, v, w$ . 或写成

$$u = x + y + z, v = \frac{y+z}{x+y+z}, w = \frac{z}{y+z}.$$

于是它把空间  $Oxyz$  的四面体  $V$  变成空间  $O'uvw$  的立方体  $V'$

$$0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, 0 \leq w \leq 1.$$

容易算出

$$x = u(1-v), y = uv(1-w), z = uvw,$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = u^2 v.$$

从而求得

$$\begin{aligned} & \iiint_V xyz(1-x-y-z)^2 dx dy dz \\ &= \iiint_{V'} u^3 v^2 w(1-v)(1-w)(1-u)^2 u^2 v du dv dw \\ &= \int_0^1 u^5 (1-u)^2 du \int_0^1 v^3 (1-v) dv \int_0^1 w(1-w) dw \\ &= \frac{1}{20160}. \end{aligned}$$

### 复习思考题

1. 叙述三重积分的定义, 它有什么几何意义与物理意义?
2. 写出三重积分的积分中值公式.
3. 叙述三重积分的累次积分法, 如何选择方便的积分次序?

4. 叙述三重积分的变量代换法, 写出柱坐标、球坐标和一般曲线坐标下的体积元素的表达式.

### 习题 7.2

1. 计算下列三重积分:

$$(1) \iiint_V xy dx dy dz, V: 1 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq \frac{1}{2};$$

$$(2) \iiint_V xy^2 z^3 dx dy dz, V: \text{由 } z = xy, y = x, x = 1, z = 0 \text{ 围成};$$

$$(3) \iiint_V z dx dy dz, V: \text{由 } z = xy, z = 0, x = 0, x = 1, y = 2, y =$$

3 围成;

$$(4) \iiint_V y \cos(x+z) dx dy dz, V: \text{由 } y = \sqrt{x}, y = 0, z = 0, x+z = \frac{\pi}{2} \text{ 围成};$$

$$(5) \iiint_V \frac{z}{(x+y+z)(y+z)^2} dx dy dz, V: \text{由 } x+y+z = 1, x = 0, y = 0, z = 0 \text{ 围成};$$

$$(6) \iiint_V \frac{z \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dx dy dz, V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1;$$

$$(7) \iiint_V (x+y) dx dy dz, V: \text{由 } z = 1 - x^2 - y^2 \text{ 和 } z = 0 \text{ 围成};$$

$$(8) \iiint_V (a-y) dx dy dz, V: \text{由 } y = 0, z = 0, 2x + y = a, x + y = a, y + z = a \text{ 围成}.$$

2. 把下列各积分变换成柱坐标或球坐标的形式, 并计算其值:

$$(1) \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z \sqrt{x^2 + y^2} dz;$$

$$(2) \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2 + y^2) dz;$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz;$$

$$(4) \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz.$$

3. 用柱坐标或球坐标代换, 计算下列曲面围成的立体体积:

$$(1) (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 x;$$

$$(2) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^4}{c^4} = 1;$$

$$(3) (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2);$$

$$(4) (x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz;$$

$$(5) \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2};$$

$$(6) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^3}{c^3} = 1 \text{ 和平面 } z + c = 0 (c > 0).$$

4. 用变量代换法计算下列三重积分:

$$(1) \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz, V: \text{由 } x^2 + y^2 = 2z, z = 2 \text{ 围成};$$

$$(2) \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz, V: \text{由 } x^2 + y^2 = z^2, z = 1 \text{ 围成};$$

$$(3) \iiint_V x dx dy dz, V: \text{由 } x^2 + y^2 = z^2, x^2 + y^2 = 1 \text{ 围成};$$

$$(4) \iiint_V xyz dx dy dz, V: \text{是 } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ 的第一卦限部分};$$

$$(5) \iiint_V z dx dy dz, V: \text{由 } z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 = 3z \text{ 围成};$$

$$(6) \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz;$$

$$(7) \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz, V: r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0;$$

$$(8) \iiint_V \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz, V: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1;$$

$$(9) \iiint_V \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy dz, V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 2x \text{ 的第一卦限部分};$$

$$(10) \iiint_V x^2 dx dy dz, V: \text{由曲面 } z = y^2, z = 4y^2 (y > 0) \text{ 及平面}$$

$z = x, z = 2x, z = 1$  所界的区域.

5. 求下面曲面所围成的立体体积:

(1) 平面  $y = 0, z = 0, 3x + y = 6, 3x + 2y = 12, x + y + z = 6$ ;

(2) 圆柱面  $z^2 + x^2 = 1$  和平面  $x + y + z = 3, y = 0$ ;

(3) 球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$  和锥面  $x^2 + y^2 = z^2$  (含  $z$  轴部分);

(4)  $x^2 + y^2 + z^2 = b^2, x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  和  $x^2 + y^2 = z^2$  ( $b > a$ );

(5)  $z = x^2 + y^2, z = 2x^2 + 2y^2, y = x, y = x^2$ ;

(6) 椭球  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  和锥面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$  (含  $z$  轴部分);

(7) 平面  $x = 0, x = 1, y = 0, y = 2, z = \frac{y}{4}$  和抛物面  $x^2 + y^2 = 6 - z$ ;

(8)  $x^2 + y^2 = 2x, z = x^2 + y^2, z = 0$ ;

(9) 球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  与圆柱  $x^2 + y^2 = Rx$  (在圆柱内部);

(10) 柱面  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  和双曲抛物面  $z = xy$  (在第一卦限部分).

6. 求函数  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  在域

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq x + y + z$$

内的平均值.

7. 设

$$F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz,$$

其中  $f$  为连续函数, 求  $F'(t)$ .

8. 证明:

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} f(z) dV = \pi \int_{-1}^1 f(z)(1-z^2) dz.$$

### 7.3 曲线弧长与第一型曲线积分

#### 7.3.1 空间曲线的弧长

在定积分的应用中, 确定平面曲线的弧长所使用的方法是: 以内接折线的长作为曲线弧长的一个近似值, 然后令其边数无限增加以取极限. 现在要用同样的方法建立空间连续曲线弧长的概念, 从而也可把弧长归结为定积分.

设空间曲线  $L$  的参数方程为

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t),$$

或写成向量的形式

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),$$

其中参数  $t$  在某个区间  $[\alpha, \beta]$  上变化, 且  $L$  的起点  $A$  与终点  $B$  分别对应于参数值  $t = \alpha$  与  $t = \beta$ . 又设函数  $\mathbf{r}(t)$  在区间  $[\alpha, \beta]$  上存在连续的微商  $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ . 在曲线  $L$  上作内接折线  $AM_1M_2 \cdots M_{n-1}B$  (图 7.42). 而

$$\begin{aligned} t_0 = \alpha < t_1 < t_2 < \cdots < t_{i-1} \\ < t_i < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta \end{aligned}$$

是各顶点所对应的参数值, 则这条折线的周长为

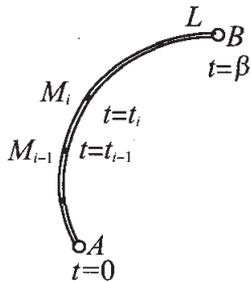


图 7.42

$$\begin{aligned}\sigma &= \sum_{i=1}^n |r(t_i) - r(t_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2 + [z(t_i) - z(t_{i-1})]^2}.\end{aligned}$$

利用微分中值公式可得

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\eta_i) + z'^2(\zeta_i)} \Delta t_i,$$

其中  $t_{i-1} < \xi_i, \eta_i, \zeta_i < t_i$ , 且  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ . 由于微商  $x'(t), y'(t), z'(t)$  在区间  $[\alpha, \beta]$  上一致连续, 与计算平面曲线的弧长类似可以证明, 当  $\Delta t_i$  的最大值  $\lambda$  趋于零时, 上述和式的极限存在, 并且等于

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

这个极限值自然就定义为曲线  $L$  的弧长  $l_0$ , 因此有

$$\begin{aligned}l_0 &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\eta_i) + z'^2(\zeta_i)} \Delta t_i \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.\end{aligned}$$

若在空间曲线  $L$  上取一点  $M$ , 它对应的参数值为  $t$ , 则弧  $AM$  的长为

$$l(t) = \int_{\alpha}^t \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

当  $M$  在  $L$  上变化时, 弧长  $l$  确定为  $t$  的函数. 由积分对上限的微分法则得

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}.$$

从而

$$dt = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt,$$

即

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

这就是空间曲线的弧长微分公式.

因为

$$\begin{aligned} |\mathbf{dr}| &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \\ &= \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} |dt| \\ &= |\mathbf{r}'(t)| \cdot |dt|, \end{aligned}$$

所以  $dl$  还可以用  $|\mathbf{dr}|$  来表示:

$$dl = |\mathbf{dr}| = |\mathbf{r}'(t)dt|.$$

如果对于区间  $[\alpha, \beta]$  上的一切  $t$ , 都有  $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)$  大于零, 则  $l(t)$  是  $t$  的严格增函数, 因而存在严格增的反函数  $t = t(l)$ , 并且它对  $l$  的微商可以表成

$$\frac{dt}{dl} = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}}.$$

将  $t = t(l)$  代入到曲线  $L$  的参数方程中就得到以弧长  $l$  为参数的方程, 仍记成

$$x = x(l), y = y(l), z = z(l),$$

或

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(l) (0 \leq l \leq l_0).$$

它被称为空间曲线的自然方程. 这时从弧长的微分公式有

$$\left(\frac{dx}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dl}\right)^2 = 1.$$

或写成

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dl}\right| = 1.$$

也就是说, 在自然方程下, 向量函数  $\mathbf{r}(l)$  对弧长  $l$  的微商是曲线  $L$  在点  $M(l)$  处的单位切向量, 并指向弧长  $l$  的增加方向. 若记这个切向量的三个方向余弦为  $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ , 则有

$$\frac{dx}{dl} = \cos\alpha, \frac{dy}{dl} = \cos\beta, \frac{dz}{dl} = \cos\gamma.$$

平面曲线  $\mathbf{r} = (x(t), y(t))$  可以看成特殊的空间曲线  $\mathbf{r} = (x(t), y(t), 0)$ , 由此可得曲线段  $L: \mathbf{r} = (x(t), y(t)), t \in [\alpha, \beta]$  的

弧长为

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

对于逐段光滑曲线,其弧长可定义为各段光滑曲线弧长之和.

例 1 求螺旋线

$$x = R \cos t, y = R \sin t, z = kt$$

在  $0 \leq t \leq 2\pi$  的一段弧长.

解 由弧长公式得

$$\begin{aligned} l_0 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2 + k^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + k^2} dt = 2\pi \sqrt{R^2 + k^2}. \end{aligned}$$

例 2 直线段  $L: x = a_1 t + b_1, y = a_2 t + b_2, z = a_3 t + b_3 (0 \leq t \leq 1)$ . 由弧长计算公式得其长  $l = \int_0^1 \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} dt = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ , 它就是线段的起点  $(b_1, b_2, b_3)$  与终点  $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$  间的距离. 圆弧段  $L_1: x = a + R \cos \theta, y = b + R \sin \theta (\alpha \leq \theta \leq \beta), \beta - \alpha = 2\pi$ , 其弧长用公式计算得

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(-R \sin \theta)^2 + (R \cos \theta)^2} d\theta = R(\beta - \alpha),$$

与用几何公式算出的弧长是一致的. 这说明这里的曲线弧长与几何长度概念是一致的.

### 7.3.2 第一型曲线积分

在实际问题中,还要求把在线段上的定积分推广到平面或空间的曲线上. 这就引出了第一型曲线积分的概念.

**定义** 设  $L$  是空间中一条有限长的光滑曲线,  $f(x, y, z)$  是定义在  $L$  上的函数. 用分点  $N_0, N_1, \dots, N_n$  把曲线  $L$  分成  $n$  个小弧段  $l_1, l_2, \dots, l_n$  (图 7.43), 并记这些弧段

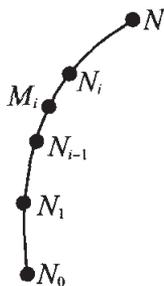


图 7.43

的弧长为  $\Delta l_i$ . 在每个小弧段  $l_i$  上任取一点  $M_i(x_i, y_i, z_i)$ , 作和数

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta l_i,$$

如果当所有小弧段的最大长度  $\lambda$  趋向于零时, 这个和数对任意的分割与取点都有同一的极限  $I$ , 则称  $I$  为  $f(x, y, z)$  在曲线  $L$  上的第一型曲线积分, 记为

$$I = \int_L f(x, y, z) dl = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta l_i,$$

其中  $dl$  称为弧长元素.

第一型曲线积分有与定积分及二重积分所具有的类似性质, 如线性, 保序性, 中值性质等, 例如

$$\int_L dl = L \text{ 的弧长,}$$

又如: 若曲线  $L$  是由有限条光滑弧段  $L_1, L_2, \dots, L_n$  组成, 则  $f(x, y, z)$  在  $L$  上的曲线积分就等于它在各弧段上曲线积分之和.

关于第一型曲线积分的计算, 有下述重要公式.

设曲线  $L$  的参数方程为

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) (\alpha \leq t \leq \beta),$$

且  $x(t), y(t), z(t)$  在区间  $[\alpha, \beta]$  上有连续的一阶微商  $x'(t), y'(t), z'(t)$ . 若函数  $f(x, y, z)$  在  $L$  上连续, 则在  $L$  上的第一型曲线积分存在, 且有

$$\begin{aligned} & \int_L f(x, y, z) dL \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt. \end{aligned}$$

事实上, 设  $t_i$  和  $\tau_i$  是曲线  $L$  上分点  $N_i$  和取点  $M_i$  所对应的参数值, 且有  $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i (i = 1, 2, \dots, n)$ . 由弧长的计算公式与积分的中值定理, 得到弧段  $N_{i-1}N_i$  的长为

$$\Delta l_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$$

$$= \sqrt{x'^2(\theta_i) + y'^2(\theta_i) + z'^2(\theta_i)} \Delta t_i,$$

其中  $t_{i-1} \leq \theta_i \leq t_i (i = 1, 2, \dots, n)$ . 于是上述和数可写成

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta l_i = \sum_{i=1}^n f(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)) \cdot \sqrt{x'^2(\theta_i) + y'^2(\theta_i) + z'^2(\theta_i)} \Delta t_i$$

因为由函数  $f(x, y, z)$  与曲线  $L$  的假设可知

$$f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$$

是连续函数, 所以当小弧段的最大长度趋于零时, 这个和式右边的极限存在, 且为

$$\int_a^\beta f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt,$$

因此它在左边亦存在极限, 依照定义, 这极限就是  $f(x, y, z)$  沿  $L$  上的第一型曲线积分, 所以公式

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_a^\beta f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$$

成立.

作为推论, 设平面曲线  $L$  的直角坐标方程为  $y = y(x) (a \leq x \leq b)$ , 且  $y(x)$  有连续的微商, 则有

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx.$$

若平面曲线  $L$  的极坐标方程为  $r = r(\theta) (\alpha \leq \theta \leq \beta)$ , 且  $r(\theta)$  有连续的微商, 则有

$$\int_L f(x, y) dl = \int_\alpha^\beta f(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta) \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta.$$

例 1 设曲线  $L$  为椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  在第一象限的弧段, 计算曲线积分  $\int_L xy dl$ .

解1  $L$  的方程可写成

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (0 \leq x \leq a).$$

因为

$$dl = \sqrt{1 + y'^2} dx = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2 - x^2}} dx,$$

所以

$$\begin{aligned} \int_L xy dl &= \int_0^a x \cdot \frac{a}{b} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{1}{a} \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2 - x^2}} dx \\ &= \frac{b}{a^2} \int_0^a x \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2} dx = \frac{ab}{3} \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}. \end{aligned}$$

解2  $L$  的方程又可写成

$$x = acost, y = bsint \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}).$$

因为

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt,$$

所以

$$\begin{aligned} \int_L xy dl &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} acost \cdot bsint \cdot \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \sqrt{a^2 \frac{1 - \cos 2t}{2} + b^2 \frac{1 + \cos 2t}{2}} dt. \end{aligned}$$

令  $\cos 2t = u$ , 则  $\sin 2t dt = -\frac{1}{2} du$ , 从而也算得

$$\begin{aligned} \int_L xy dl &= \frac{ab}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 - a^2}{2} u} du \\ &= \frac{ab}{3} \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}. \end{aligned}$$

例2 计算曲线积分  $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) dl$ , 其中  $L$  是螺旋线  $x = R \cos t, y = R \sin t, z = kt$  在  $0 \leq t \leq 2\pi$  的弧段.

解  $L$  的弧长元素是

$$dl = \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2 + k^2} dt = \sqrt{R^2 + k^2} dt,$$

所以

$$\begin{aligned} \int_L (x^2 + y^2 + z^2) dl &= \int_0^{2\pi} (R^2 + k^2 t^2) \sqrt{R^2 + k^2} dt \\ &= 2\pi \left( R^2 + \frac{4}{3} \pi^2 k^2 \right) \sqrt{R^2 + k^2}. \end{aligned}$$

### 复习思考题

1. 写出空间曲线的弧长公式与弧长微分公式.
2. 何谓第一型曲线积分, 写出它的计算公式.

### 习题 7.3

1. 计算下列曲线的弧长:

(1)  $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t \mathbf{i} + e^t \sin t \mathbf{j} + e^t \mathbf{k} \quad (0 \leq t \leq 2\pi);$

(2)  $x = 3t, y = 3t^2, z = 2t^3$  从  $O(0, 0, 0)$  到  $A(3, 3, 2)$  那一段.

(3)  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = a \ln \cos t \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{4});$

(4)  $z^2 = 2ax$  与  $9y^2 = 16xz$  的交线, 由点  $O(0, 0, 0)$  到点  $A(2a, \frac{8}{3}a, 2a);$

(5)  $4ax = (y+z)^2$  与  $4x^2 + 3y^2 = 3z^2$  的交线, 由原点到点  $M(x, y, z).$

2. 计算下列曲线积分:

(1)  $\int_L y^2 dl, L: x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi);$

(2)  $\int_L (x+y) dl, L:$  顶点为  $O(0, 0), A(1, 0), B(0, 1)$  的三角形周界;

(3)  $\int_L \frac{dl}{x-y}, L:$  连接点  $A(0, -2)$  到点  $B(4, 0)$  的直线段;

(4)  $\int_L \sqrt{2y} dl, L: x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (0 \leq t \leq 2\pi);$

(5)  $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} dl, L:$  由曲线  $r = a, \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{4}$  所围成的区

域边界;

(6)  $\int_L x dl, L:$  对数螺线  $r = ae^{k\varphi} (k > 0)$  在圆  $r = a$  内的那一段;

(7)  $\int_L \frac{z^2}{x^2+y^2} dl, L: x = a \cos t, y = a \sin t, z = at (0 \leq t \leq 2\pi);$

(8)  $\int_L (x+y+z) dl, L:$  直线段  $AB: A(1,1,0), B(1,0,0)$  及螺线  $BC: x = \cos t, y = \sin t, z = t (0 \leq t \leq 2\pi)$  组成;

(9)  $\int_L z dl, L:$  圆锥螺线  $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t (0 \leq t \leq t_0);$

(10)  $\int_L x \sqrt{x^2 - y^2} dl, L:$  双纽线  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) (x \geq 0)$  的一半;

(11)  $\int_L (x^2 + y^2 + z^2)^n dl, L:$  圆周  $x^2 + y^2 = a^2, z = 0;$

(12)  $\int_L x^2 dl, L:$  圆周  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0.$

3. 求曲线  $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t$  从  $t = 0$  到任意点间那段弧的质量, 设它各点的密度与该点到原点的距离平方成反比, 且在点  $(1, 0, 1)$  处的密度为 1.

## 7.4 曲面面积与第一型曲面积分

### 7.4.1 曲面的面积

设给定空间一有限曲面  $S$ , 它的参数方程为

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v),$$

或表示成向量形式

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v),$$

其中参数  $u, v$  的变化范围是平面  $O'uv$  中的一个有界区域  $D$ . 于是当点  $(u, v)$  在这个区域变化时, 相应的点  $(x, y, z)$  就在空间  $Oxyz$  内描出所给曲面  $S$ . 为求出这个曲面的面积, 假设函数  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  都具有连续的一阶偏微商, 并且  $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$  不为零向量. 在平面  $O'uv$  上, 用两族直线  $u = u_i$  与  $v = v_j$  把区域  $D$  分成许多小区域  $D_{ij}$  (图 7.44), 这时在曲面  $S$  上对应的两族坐标曲线  $v$  曲线与  $u$  曲线也就把曲面  $S$  分成小曲面块  $S_{ij}$ . 再从中取出介于  $u_i$  曲线,  $u_{i+1}$  曲线,  $v_j$  曲线与  $v_{j+1}$  曲线的曲面小块 (图 7.45), 它的面积  $\Delta S_{ij}$  可近似为由向量

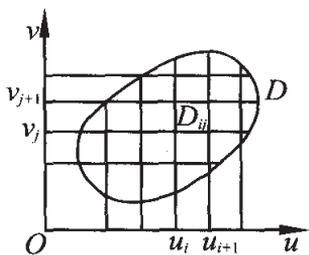


图 7.44

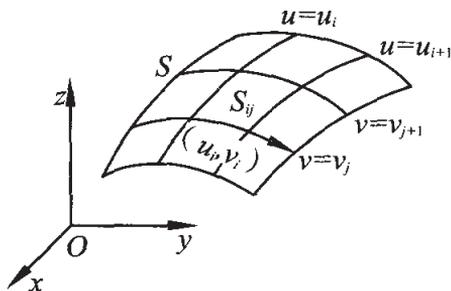


图 7.45

$$\mathbf{r}(u_{i+1}, v_j) - \mathbf{r}(u_i, v_j) \text{ 和 } \mathbf{r}(u_i, v_{j+1}) - \mathbf{r}(u_i, v_j)$$

为邻边所构成的平行四边形的面积, 即

$$\Delta S_{ij} \approx | [\mathbf{r}(u_{i+1}, v_j) - \mathbf{r}(u_i, v_j)] \times [\mathbf{r}(u_i, v_{j+1}) - \mathbf{r}(u_i, v_j)] |.$$

但

$$\mathbf{r}(u_{i+1}, v_j) - \mathbf{r}(u_i, v_j) = \mathbf{r}'_u(u_i, v_j) \Delta u_i + o(\Delta u_i),$$

$$\mathbf{r}(u_i, v_{j+1}) - \mathbf{r}(u_i, v_j) = \mathbf{r}'_v(u_i, v_j) \Delta v_j + o(\Delta v_j).$$

其中  $\Delta u_i = u_{i+1} - u_i, \Delta v_j = v_{j+1} - v_j$ . 如果不计  $\Delta u_i, \Delta v_j$  的高阶无穷小, 就有

$$\Delta S_{ij} \approx | \mathbf{r}'_u(u_i, v_j) \times \mathbf{r}'_v(u_i, v_j) | \Delta u_i \Delta v_j.$$

作出这些小曲面块面积的近似和,则当  $D_{ij}$  的最大直径趋于零时取极限,就得到曲面  $S$  的面积为

$$\begin{aligned} S &= \lim \sum_{ij} | \mathbf{r}'_u(u_i, v_j) \times \mathbf{r}'_v(u_i, v_j) | \Delta u_i \Delta v_j \\ &= \iint_D | \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v | \, du dv. \end{aligned}$$

因为

$$| \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v |^2 = \mathbf{r}'_u \mathbf{r}'_v{}^2 - (\mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{r}'_v)^2,$$

令

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{r}'_u{}^2 = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u, \\ G &= \mathbf{r}'_v{}^2 = x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v, \\ F &= \mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{r}'_v = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v, \end{aligned}$$

上述面积公式又可写成

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} \, du dv.$$

这就是在参数方程下曲面面积的计算公式,其中的被积表达式记作

$$dS = \sqrt{EG - F^2} \, du dv,$$

称为曲面的面积元素.

当曲面  $S$  的参数方程为

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z \equiv 0$$

时,  $S$  成为  $xy$  平面的区域  $D'$ , 这时,  $| \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v | = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$ , 故  $D'$  的面积为

$$\iint_{D'} dx dy = \iint_D \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du dv,$$

此式与二重积分变量代换公式是一致的.

如果  $S$  是半径为  $R$  的球面, 则它的参数方程是

$$x = R \sin \theta \cos \varphi, y = R \sin \theta \sin \varphi, z = R \cos \theta.$$

这时有

$$E = R^2, F = 0, G = R^2 \sin^2 \theta,$$

所以球面的面积元素为

$$dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

这个表达式还可给出直观的几何解释. 如图 7.46, 在球面经纬线网格中取出曲边四边形  $ABCD$ , 并近似于边长是  $AD = R\Delta\theta$ ,  $DC = R\sin\theta\Delta\varphi$  的矩形, 故这个曲边四边形的面积近似于  $R^2 \sin\theta\Delta\theta\Delta\varphi$ . 由此不难得出半径为  $R$  的整个球面的面积. 事实上, 参数  $\theta, \varphi$  的变化区域  $D$  是一矩形

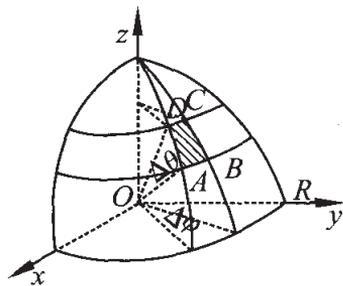


图 7.46

$$0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

于是求得

$$S = \iint_D R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 4\pi R^2.$$

这是我们早已熟知的结果.

**例 1** 求球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  被柱面  $x^2 + y^2 \leq Rx$  所截下的曲面面积.

**解** 由于对称性, 可知所求曲面的面积是它在第一卦限内面积的四倍. 采用球面坐标有  $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ . 为确定参数  $\theta, \varphi$  的变化区域  $D$ , 把球面的参数方程代入柱面方程  $x^2 + y^2 = Rx$  给出

$$\sin \theta = \cos \varphi,$$

因为在第一卦限中  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  就得到这些曲面的交线

在球面坐标下的方程为

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

所以  $D$  是由不等式  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - \varphi$  给出的区域, 从而

算得

$$\begin{aligned}
 S &= 4 \iint_D R^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi} \sin\theta d\theta \\
 &= 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\varphi) d\varphi = 2R^2(\pi - 2).
 \end{aligned}$$

如果曲面  $S$  的方程给出为显式

$$z = f(x, y),$$

且函数  $f(x, y)$  在其定义域  $D$  上连续, 有连续的一阶偏微商, 这时可将  $x, y$  看作参数  $u, v$ , 而曲面  $S$  的参数方程就取特别的形式

$$x = x, y = y, z = f(x, y),$$

于是求得

$$E = 1 + z_x'^2, G = 1 + z_y'^2, F = z_x' z_y'.$$

由此推知

$$dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy.$$

它称为在直角坐标下曲面的面积元素. 上述计算曲面面积的公式就成为

$$S = \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy.$$

如果曲面的方程为  $x = g(y, z)$  或  $y = h(z, x)$ , 这时可分别把曲面投影到平面  $Oyz$  上或平面  $Ozx$  上, 所得的投影区域记作  $D_1$  或  $D_2$ , 则同样得到类似的计算曲面面积的公式

$$S = \iint_{D_1} \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2} dy dz.$$

或

$$S = \iint_{D_2} \sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2} dx dz.$$

如果曲面的方程由隐式  $F(x, y, z) = 0$  给出, 且当函数  $F(x, y, z)$  的偏微商例如  $F_z'$  不为零时, 则由隐函数的求导公式有

$$z_x' = -\frac{F_x'}{F_z'}, z_y' = -\frac{F_y'}{F_z'}$$

于是又得到计算曲面面积的另一公式

$$S = \iint_D \frac{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}}{|F_z'|} dx dy.$$

例2 计算双曲抛物面  $z = xy$  被柱面  $x^2 + y^2 = R^2$  所截出的曲面面积.

解 截出的曲面在平面  $Oxy$  上的投影区域  $D$  是半径为  $R$  的圆  $x^2 + y^2 \leq R^2$ , 所以

$$\iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy.$$

应用极坐标即可算得

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{1 + r^2} r dr = \frac{2}{3} \pi [(1 + R^2)^{\frac{3}{2}} - 1].$$

#### 7.4.2 第一型曲面积分

如同第一型曲线积分一样, 如果把平面区域的二重积分推广到空间的曲面上就得到第一型曲面积分的概念.

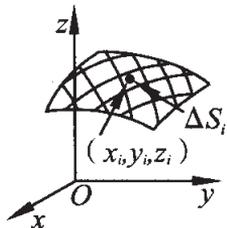


图 7.47

**定义** 设  $S$  是一张有界的光滑曲面,  $f(x, y, z)$  是定义在  $S$  上的函数. 用任意分法把  $S$  分成  $n$  小块曲面  $S_1, S_2, \dots, S_n$  (图 7.47), 这些小曲面积的面积记为  $\Delta S_i$ . 在每块小曲面  $S_i$  上任取一点  $M_i(x_i, y_i, z_i)$ , 作和数

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i,$$

如果当所有小块曲面的最大直径  $\lambda$  趋向于零时, 这个和数对任意的分割和取点都有同一的极限  $I$ , 则称  $I$  为  $f(x, y, z)$  在曲面  $S$  上的第一型曲面积分, 记成

$$I = \iint_D f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i,$$

其中  $dS$  称为曲面的面积元素.

例如,已知曲面  $S$  上有某物质分布,其面密度函数为  $\rho(x, y, z)$ ,则要计算  $S$  的质量  $M$ ,就可归结为  $\rho(x, y, z)$  在  $S$  上的第一型曲面积分,即有

$$M = \iint_D \rho(x, y, z) dS.$$

正如第一型曲线积分可以化成定积分来计算一样,第一型曲面积分可以化成通常的二重积分来计算,并且有相似的计算法则.

设光滑曲面的参数方程为

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v) (u, v) \in D',$$

其中  $D'$  是平面  $O'uv$  上的有界闭区域. 如果函数  $f(x, y, z)$  在  $S$  上连续,则它在  $S$  上的第一型曲面积分存在,且有

$$\begin{aligned} & \iint_S f(x, y, z) dS \\ &= \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv. \end{aligned}$$

这个公式的证明方法也与第一型曲面积分的相应公式完全类似.

由此特别可得,若光滑曲面  $S$  给出为直角坐标方程  $z = z(x, y)$ ,而  $D$  是  $S$  在平面  $Oxy$  上的投影区域,则有

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2} dx dy.$$

**例 1** 设  $S$  是第一卦限的球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$ , 计算曲面积分  $\iint_S (x^2 + y^2) dS$ .

**解** 将球面  $S$  表示为参数方程

$$x = R \sin \theta \cos \varphi, y = R \sin \theta \sin \varphi, z = R \cos \theta,$$

则  $\theta, \varphi$  的变化范围是平面  $O'\theta\varphi$  上的矩形  $D'$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

而球面的面积元素为

$$dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi,$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_S (x^2 + y^2) dS &= \iint_{D'} R^2 \sin^2 \theta \cdot R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta = \frac{1}{3} \pi R^4.\end{aligned}$$

例 2 设  $S$  是锥面  $z^2 = k^2(x^2 + y^2)$  ( $z \geq 0$ ) 被柱面  $x^2 + y^2 = 2ax$  ( $a > 0$ ) 所截得的曲面 (图 7.48), 计算曲面积分

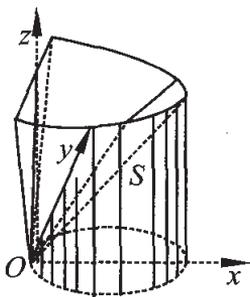


图 7.48

$$\iint_S (y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2) dS.$$

解 所给曲面  $S$  的面积元素是

$$\begin{aligned}dS &= \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy \\ &= \sqrt{1 + k^2} dx dy.\end{aligned}$$

并且  $S$  在平面  $Oxy$  上的投影区域  $D$  是圆

$$x^2 + y^2 \leq 2ax,$$

于是算得

$$\begin{aligned}&\iint_S (y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2) dS \\ &= \sqrt{1 + k^2} \iint_D [k^2(x^2 + y^2)^2 + x^2 y^2] dx dy \\ &= 2\sqrt{1 + k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r^5 (k^2 + \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi) dr \\ &= \frac{\pi}{24} a^6 (80k^2 + 7) \sqrt{1 + k^2}.\end{aligned}$$

类似于二重积分, 第一型曲面积分也有一些简单性质, 如线性, 保序性, 可积函数必有界, 数 1 的曲面积分等于曲面面积, 以及积分的中值性质等. 分片光滑曲面上的第一型曲面积分可利用积分对积分区域的可加性来计算, 例如曲面  $S$  是由光滑曲面  $S_1$  和  $S_2$  所构成的, 那么

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{S_1} f(x, y, z) dS + \iint_{S_2} f(x, y, z) dS.$$

### 复习思考题

1. 如何计算曲面的面积?写出几种不同情况下曲面面积元素的表达式.

2. 何谓第一型曲面积分,写出它的计算公式.

3. 总结一下到目前为止所遇到的各种积分的概念,它们之间有什么共性?在计算上有些什么联系?

### 习题 7.4

1. 求下列曲面在指定部分的面积:

(1) 锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  包含在圆柱  $x^2 + y^2 = 2x$  内的部分;

(2) 柱面  $x^2 + y^2 = a^2$  被平面  $x + z = 0, x - z = 0 (x > 0, y > 0)$  所截的那部分;

(3) 双曲抛物面  $z = xy (x \geq 0, y \geq 0)$  被柱面  $x^2 + y^2 = R^2$  所截下的那部分;

(4) 球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  被圆柱  $x^2 + y^2 = \rho^2 (\rho < R)$  所割下的那部分;

(5) 圆柱面  $x^2 + y^2 = a^2$  被圆柱  $y^2 + z^2 = a^2$  所割下的那部分;

(6) 椭圆抛物面  $z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$  被椭圆柱面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2$  所截下的那部分;

(7) 球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$  和抛物面  $x^2 + y^2 = 2ax (z \geq 0)$  所围成的立体的全表面;

(8) 曲面  $x = \frac{1}{2}(2y^2 + z^2)$  被柱面  $4y^2 + z^2 = 1$  所截下的那部分;

(9) 锥面  $z^2 = x^2 + y^2$  被  $Oxy$  平面和  $z = \sqrt{2} \left( \frac{x}{2} + 1 \right)$  所截下

的那部分;

(10) 曲面  $z = \sqrt{x^2 - y^2}$  包含在柱面  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$  内那部分面积.

2. 求螺旋面  $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = h\varphi$  在  $0 < r < a, 0 < \varphi < 2\pi$  那部分的面积.

3. 求圆环面  $x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi, y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi, z = a\sin\psi$  ( $0 < a \leq b$ ) 被两条纬线  $\varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2$  和两条经线  $\psi = \psi_1, \psi = \psi_2$  所界的那部分面积 ( $\varphi_1 < \varphi_2, \psi_1 < \psi_2$ ); 又整个环面的表面积等于多少?

4. 计算曲面  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2a^2xy$  的面积.

5. 一段圆柱:  $x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{a}{2}\right)^2, 0 \leq z \leq h$ , 被圆锥  $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{h^2}z^2$  所截, 求柱体的位于圆锥外面那部分立体的体积  $V$  和总表面积  $S$ .

6. 计算下列曲面积分:

$$(1) \iint_S (x^2 + y^2) dS, S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2;$$

$$(2) \iint_S (x + y + z) dS, S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0);$$

(3)  $\iint_S (x + y + z) dS, S$ : 立方体  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$  的全表面;

$$(4) \iint_S xyz dS, S: x + y + z = 1 \text{ 在第一卦限部分};$$

(5)  $\iint_S (x^2 + y^2) dS, S$ : 由  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  和  $z = 1$  所围成的立体表面;

$$(6) \iint_S \frac{dS}{(1 + x + y)^2}, S: \text{四面体 } x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1$$

$\leq 1$  的全表面;

(7)  $\iint_S (xy + yz + zx) dS$ ,  $S$ : 锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被柱面  $x^2 + y^2 = 2ax$  ( $a > 0$ ) 所割下的那块曲面;

(8)  $\iint_S \left(2 + z + 2x + \frac{4}{3}y\right) dS$ ,  $S$ : 是平面  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$  在第一卦限中的部分;

(9)  $\iint_S \frac{dS}{r^2}$ ,  $S$ : 圆柱面  $x^2 + y^2 = R^2$  介于平面  $z = 0$  及  $z = H$  之间的部分,  $r$  是  $S$  上的点到原点的距离;

(10)  $\iint_S (x^4 - y^4 + y^2 z^2 - x^2 z^2 + 1) dS$ ,  $S$ : 圆锥  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被柱面  $x^2 + y^2 = 2x$  所截下的部分.

7. 设  $G$  是平面  $Ax + By + Cz + D = 0$  ( $C \neq 0$ ) 上的一个有界闭区域, 它在  $Oxy$  平面上的投影是  $G_1$ , 试证

$$\frac{G \text{ 的面积}}{G_1 \text{ 的面积}} = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2}{C^2}}.$$

## 7.5 重积分、线积分与面积分的应用

### 7.5.1 重心与转动惯量

设物体所占有的空间区域为  $V$ , 它在点  $(x, y, z)$  处的密度为  $\rho(x, y, z)$ , 并假定  $\rho(x, y, z)$  是区域  $V$  上的连续函数. 将区域  $V$  分成  $n$  个直径很小的小区域  $V_i$ , 这些小区域的体积记成  $\Delta V_i$ . 在每个小区域上任取一点  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ . 若把物体在小区域  $V_i$  的近似质量  $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$  看成是质点  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  所具有的质量, 则整个物体就可近似看成由  $n$  个质点组成的质点系, 而这个质点系的重心坐标是

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\sum_i \xi_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i}{\sum_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i}, \\ \bar{y} &= \frac{\sum_i \eta_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i}{\sum_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i}, \\ \bar{z} &= \frac{\sum_i \zeta_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i}{\sum_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i}.\end{aligned}$$

当分割无限加细时, 上式右边的极限就是所考虑的物体之重心  $G$  的坐标  $(x_G, y_G, z_G)$ .

$$\begin{aligned}x_G &= \lim \frac{\sum_i \xi_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i}{\sum_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i} = \frac{\iiint_V x \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz}, \\ y_G &= \lim \frac{\sum_i \eta_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i}{\sum_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i} = \frac{\iiint_V y \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz}, \\ z_G &= \lim \frac{\sum_i \zeta_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i}{\sum_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i} = \frac{\iiint_V z \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz}.\end{aligned}$$

若物体是均匀的, 则密度  $\rho$  是常数, 从而这些公式可简化为

$$\begin{aligned}x_G &= \frac{1}{V} \iiint_V x dx dy dz, \\ y_G &= \frac{1}{V} \iiint_V y dx dy dz, \\ z_G &= \frac{1}{V} \iiint_V z dx dy dz.\end{aligned}$$

其中  $V$  也表示物体的体积.

若物质以面密度  $\rho(x, y, z)$  分布在一光滑曲面薄壳  $S$  上, 可仿照上面的做法得到曲面片的重心位置:

$$x_G = \frac{\iint_S x\rho(x, y, z) dS}{\iint_S \rho(x, y, z) dS},$$

$$y_G = \frac{\iint_S y\rho(x, y, z) dS}{\iint_S \rho(x, y, z) dS},$$

$$z_G = \frac{\iint_S z\rho(x, y, z) dS}{\iint_S \rho(x, y, z) dS}.$$

若物质以线密度  $\rho(x, y, z)$  分布在一条光滑曲线  $L$  上, 其重心位置是

$$x_G = \frac{\int_L x\rho(x, y, z) dl}{\int_L \rho(x, y, z) dl},$$

$$y_G = \frac{\int_L y\rho(x, y, z) dl}{\int_L \rho(x, y, z) dl},$$

$$z_G = \frac{\int_L z\rho(x, y, z) dl}{\int_L \rho(x, y, z) dl}.$$

平面薄片可看成空间曲面的特例, 不难得出它的重心坐标. 例如  $Oxy$  平面上均匀的物质薄片的重心坐标为

$$x_G = \frac{1}{A} \iint_D x dx dy, \quad y_G = \frac{1}{A} \iint_D y dx dy.$$

其中  $D$  是薄片所占的平面区域,  $A$  是  $D$  的面积.

关于物体的转动惯量可仿照上面作法,把这个物体近似看作  $n$  个质点所组成的质点系,该质点系对  $x$  轴的转动惯量就是

$$\sum_i (\eta_i^2 + \xi_i^2) \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i.$$

将  $V$  无限细分后取极限,则得物体对  $x$  轴的转动惯量为

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz;$$

同理,物体对  $y$  轴,  $z$  轴的转动惯量为

$$I_y = \iiint_V (z^2 + x^2) \rho(x, y, z) dx dy dz;$$

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz;$$

类似地,物体对原点的转动惯量为

$$I_o = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

这里  $V$  都表示物体所占有的空间区域.

若物质以面(线)密度  $\rho(x, y, z)$  分布在光滑曲面(曲线)上,只要在上面相应的式子中,把三重积分换成曲面(曲线)积分,就可得到转动惯量的表达式了.

**例 1** 设球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2ax$  (图 7.49) 中任一点的密度与该点到坐标原点的距离成正比,求此球体的重心.

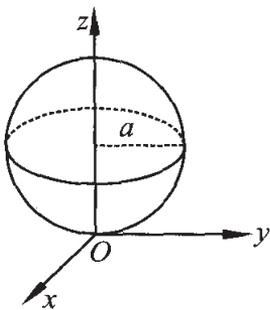


图 7.49

**解** 由于所给于球体的质量分布对称于  $z$  轴,所以它的重心位于  $z$  轴上,而密度是

$$\rho = k \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

其中  $k$  是比例常数,因此得

$$x_G = y_G = 0,$$

$$z_G = \frac{\iiint_V kz \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz}{\iiint_V k \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz}.$$

采用球坐标计算这两个三重积分. 将变换式

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta$$

代入球体的不等式得

$$0 \leq r \leq 2a \cos \theta,$$

并且  $\varphi, \theta$  的变化范围是

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

于是算得

$$\begin{aligned} \iiint_V k \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} kr \cdot r^2 \sin \theta dr \\ &= 8k\pi a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \sin \theta d\theta \\ &= \frac{8}{5} k\pi a^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_V kz \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} kr^2 \cos \theta r^2 \sin \theta dr \\ &= \frac{64}{5} k\pi a^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \theta \sin \theta d\theta \\ &= \frac{64}{35} k\pi a^5. \end{aligned}$$

故所给球体的重心坐标为

$$x_G = y_G = 0, z_G = \frac{\frac{64}{35} k\pi a^5}{\frac{8}{5} k\pi a^4} = \frac{8}{7} a.$$

**例 2** 一个炼钢炉呈旋转体的形体, 它的剖面壁线的方程是  $9x^2 = z(3-z)^2, 0 \leq z < 3$  (图 7.50). 若炉内储有高为  $h$  的均质钢

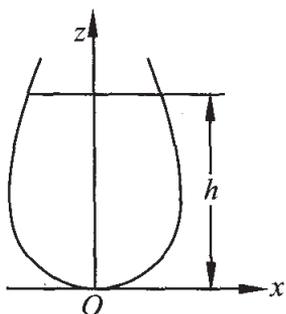


图 7.50

液, 且不计炉体自重, 试求它的重心.

解 由对称性可知重心在  $z$  轴上. 采用柱坐标  $r, \varphi, z$ , 这时壁面的方程为  $9r^2 = z(3-z)^2$ . 因为对于区间  $[0, h]$  中的任一  $z$ , 过点  $z$  作垂直于  $z$  轴的平面与炼钢炉相交的截面区域可表示成

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \sqrt{z} \left(1 - \frac{z}{3}\right).$$

所以

$$\begin{aligned} \iiint_V dx dy dz &= \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{z}(1-\frac{z}{3})} r dr \\ &= \frac{\pi}{9} h^3 \left( \frac{9}{2} - 2h + \frac{1}{4} h^2 \right), \\ \iiint_V z dx dy dz &= \int_0^h z dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{z}(1-\frac{z}{3})} r dr \\ &= \frac{\pi}{9} h^3 \left( 3 - \frac{3}{2} h + \frac{1}{5} h^2 \right). \end{aligned}$$

故所求重心的坐标是

$$x_G = y_G = 0, z_G = h \frac{60 - 30h + 4h^2}{90 - 40h + 5h^2}.$$

例 3 求底半径为  $R$ , 高为  $l$  的均匀圆柱体对其轴线的转动惯量.

解 取底心为原点, 轴线为  $z$  轴, 于是所给柱体由圆柱面  $x^2 + y^2 = R^2$  及平面  $z = 0, z = l$  围成. 故它对  $z$  轴的转动惯量为

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_V \rho(x^2 + y^2) dx dy dz = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 d\theta \int_0^l dz \\ &= \frac{\pi}{2} \rho l R^4 = \frac{1}{2} M R^2, \end{aligned}$$

其中  $M$  是柱体的质量.

例 4 求半径为  $R$  的均匀球体绕其直径的转动惯量.

解 取直径为  $z$  轴, 球心为坐标原点, 则积分区域  $V$  为球体

$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ . 于是

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_V \rho(x^2 + y^2) dx dy dz \\ &= \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^R r^4 dr \\ &= \frac{8}{15} \rho \pi R^5 = \frac{2}{5} MR^2, \end{aligned}$$

其中  $M$  是球体的质量.

**例 5** 求半径为  $R$  的均匀半球壳  $S$  的重心.

**解** 取半球壳的对称轴为  $z$  轴, 球心为坐标原点构成直角坐标系, 则所求重心的坐标是

$$x_G = y_G = 0, z_G = \frac{1}{S} \iint_S z dS,$$

其中  $S$  是表示半球壳的面积. 采用球坐标可得

$$\iint_S z dS = R^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta = \pi R^3,$$

所以

$$z_G = \frac{\pi R^3}{2\pi R^2} = \frac{R}{2}.$$

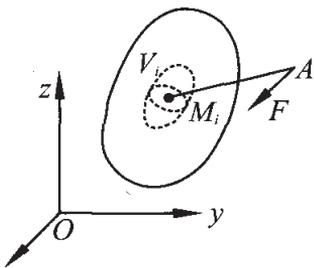


图 7.51

### 7.5.2 物体的引力

设有不均匀的物体, 它在空间占有的区域是  $V$ , 且在  $V$  内的点  $(x, y, z)$  处密度为  $\rho(x, y, z)$ , 函数  $\rho(x, y, z)$  在  $V$  上连续, 现在要求来求出这物体对其外一质量为  $m$  的质点  $A(\xi, \eta, \zeta)$  的引力.

为此, 将区域  $V$  分割成  $n$  个小区域  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , 记  $V_i$  的体积为  $\Delta V_i$ . 在  $\Delta V_i$  内任取一点  $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  (图 7.51). 若把小区域  $V_i$  的近似质量  $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$  看作集中于  $M_i$ , 则  $V_i$  对点  $A$  的引力  $\Delta F_i$  的大小可近似地表成

$$|\Delta F_i| = k \frac{m\rho_i \Delta V_i}{r_i^2},$$

其中  $k$  为比例常数,  $\rho_i$  是点  $M_i$  处的密度,  $r_i$  是点  $M_i$  到点  $A$  的距离, 即

$$\rho_i = \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i),$$

$$r_i = \sqrt{(\xi_i - \xi)^2 + (\eta_i - \eta)^2 + (\zeta_i - \zeta)^2}.$$

而  $\Delta F_i$  的方向与单位向量

$$\frac{\overrightarrow{AM_i}}{|\overrightarrow{AM_i}|} = \left( \frac{\xi_i - \xi}{r_i}, \frac{\eta_i - \eta}{r_i}, \frac{\zeta_i - \zeta}{r_i} \right)$$

的方向相同, 所以  $\Delta F_i$  为

$$k \frac{m\rho_i \Delta V_i}{r_i^2} \left( \frac{\xi_i - \xi}{r_i}, \frac{\eta_i - \eta}{r_i}, \frac{\zeta_i - \zeta}{r_i} \right).$$

对  $V$  的各小区域的引力求和, 再取极限, 则引力  $F$  在坐标轴上的投影  $F_x, F_y, F_z$  可用三重积分表示成

$$F_x = km \iiint_V \frac{x - \xi}{r^3} \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$F_y = km \iiint_V \frac{y - \eta}{r^3} \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$F_z = km \iiint_V \frac{z - \zeta}{r^3} \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

其中

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}.$$

记  $r = (x, y, z), r_0 = (\xi, \eta, \zeta)$ , 上面三式可合并为

$$F = km \iiint_V \frac{r - r_0}{r^3} \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

若物质以面(线)密度  $\rho$  分布在光滑曲面(曲线)上, 只要在上面相应的式子中, 把三重积分换成曲面(曲线)积分, 就可得到引力的表达式.

**例** 求半径为  $R$  的均匀球体对其外一单位质点  $A$  的引力.

解 取球心为坐标原点,  $z$  轴过点  $A$ , 则质点  $A$  的坐标为  $(0, 0, l)$  ( $l > R$ ). 此外不失一般性可设  $\rho = k = 1$ . 于是

$$F_x = \iiint_V \frac{x}{r^3} dx dy dz,$$

$$F_y = \iiint_V \frac{y}{r^3} dx dy dz,$$

$$F_z = \iiint_V \frac{z-l}{r^3} dx dy dz,$$

其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-l)^2}$ ,  $V$  为球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ . 因球体对  $z$  轴是对称的, 故必有

$$F_x = F_y = 0.$$

事实上, 若记圆域  $x^2 + y^2 \leq R^2 - z^2$  为  $D_z$ . 并采用柱坐标代换

$$x = s \cos \varphi, y = s \sin \varphi, z = z,$$

则有

$$\begin{aligned} F_x &= \int_{-R}^R dz \iint_{D_z} \frac{x}{r^3} dx dy \\ &= \int_{-R}^R dz \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \frac{s^2}{[s^2 + (z-l)^2]^{\frac{3}{2}}} ds = 0. \end{aligned}$$

这是因为  $\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$ . 同样可得  $F_y = 0$ . 再计算

$$F_z = \int_{-R}^R (z-l) dz \iint_{D_z} \frac{dx dy}{r^3}.$$

右边的二重积分利用极坐标算得为

$$\begin{aligned} \iint_{D_z} \frac{dx dy}{r^3} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \frac{s}{[s^2 + (z-l)^2]^{\frac{3}{2}}} ds \\ &= 2\pi \left( \frac{1}{l-z} - \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2lz + l^2}} \right). \end{aligned}$$

所以

$$F_z = -2\pi \int_{-R}^R \left[ 1 + \frac{z-l}{\sqrt{R^2 - 2lz + l^2}} \right] dz = -\frac{4\pi R^3}{3l^2}.$$

但是球体的质量为  $M = \frac{4}{3}\pi R^3$ , 而点  $A$  的质量为  $m = 1$ , 故对质量为  $m$  的质点的引力为

$$F_z = -\frac{Mm}{l^2}.$$

由此可见, 均匀球体对体外质点的引力相当于球体的质量集中在球心时对质点的引力, 所以在天体力学中考虑星球之间的引力时, 常将星球的质量集中在球心, 再直接应用牛顿定律.

### 复习思考题

1. 分别写出平面  $Oxy$  的区域  $D$ 、空间区域  $V$ 、曲面  $S$  和曲线  $L$  的重心坐标的公式.
2. 分别写出平面  $Oxy$  内薄板  $D$  对于坐标轴及原点的转动惯量和空间物体、空间曲面薄片对于坐标轴及原点的转动惯量.
3. 试写出具有面密度  $\rho(x, y, z)$  的空间曲面薄壳对其外质量为  $m$  的质点  $A(\xi, \eta, \zeta)$  的引力表达式.

### 习题 7.5

1. 求抛物面壳  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  ( $0 \leq z \leq 1$ ) 的质量, 其各点密度为  $\rho = z$ .
2. 求椭圆薄片  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$  的质量, 设密度为  $\rho = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ .
3. 一个平面圆环是由半径为  $R$  和  $r$  ( $R > r$ ) 的两个同心圆所围成的, 已知材料各点的密度和到圆心的距离成反比, 并在内圆的圆周上密度为 1, 求环的质量.
4. 半径为  $a$  的圆盘, 其各点的密度和到圆心的距离成正比 (比例系数设为 1), 今内切于圆盘截去半径为  $\frac{a}{2}$  之小圆, 求余下部

分的重心坐标.

5. 求半球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (z \geq 0)$  的重心位置, 设球面上各点的密度等于该点到铅垂直径的距离.

6. 有一个匀质薄板, 它是由半径为  $a$  的半圆和一个长方形拼接而成, 为了使重心正好的圆心上, 问长方形的宽  $b$  应为多少? (图 7.52)

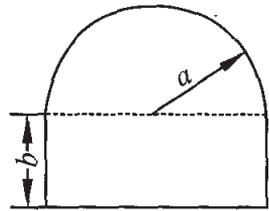


图 7.52

7. 一个物体是由两个半径各为  $R$  和  $r (R > r)$  的同心球所围成, 已知材料的密度和到球心的距离成反比, 且在距离等于 1 处的密度等于  $k$ , 求物体的总质量.

8. 求由曲面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$  和  $z = c$  所围成的均匀物体的重心坐标.

9. 设球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$  内各点密度与各点到原点的距离成反比, 求其重心坐标.

10. 在半径为  $a$  的圆柱上连接一个半径为  $a$  的半球, 为了使重心正好在球心上, 问圆柱之高如何?

11. 设半径为  $R$  的球体内各点密度与各点到球心的距离成正比, 已知球的质量为  $M$ , 求它对直径的转动惯量.

12. 求以下各物体的转动惯量 (设  $\rho = \text{常数}$ ):

(1) 质量为  $m$ , 长为  $l$  的细棒, 对于: (a) 通过棒的中心并垂直于棒的轴; (b) 通过棒的一端并与棒垂直的轴.

(2) 质量为  $m$ , 半径为  $R$  的薄圆盘, 对于: (a) 通过圆心并垂直圆盘的轴; (b) 直径.

(3) 质量为  $m$ , 半径为  $R$  的球体, 对于: (a) 通过球心的轴线; (b) 球面的切线.

13. 一个半径为  $R$  的均匀球壳 (密度为  $\rho$ ) 绕其直径旋转, 求它的转动惯量.

14. 证明物体对任意一轴  $k$  的转动惯量等于:  $I_k = I_c + Md^2$ .

其中  $I_c$  是物体对于通过重心  $G$  并平行于  $k$  轴的直线的转动惯量,  $M$  是物体的质量,  $d$  是重心  $G$  到  $k$  轴的距离.

15. 求螺旋线一圈  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = \frac{h}{2\pi} t (0 \leq t \leq 2\pi)$

对于各坐标轴的转动惯量(设密度  $\rho = 1$ ).

16. 求半径为  $a$  的均匀半圆弧(密度为  $\rho$ ) 对于处在圆心  $O$  质量为  $M$  的质点的引力.

17. 设均质圆盘的半径为  $R$ , 密度为  $\mu$ , 在通过中心并垂直盘面的直线上有一条长为  $l$  的均匀细棒, 其密度为  $\rho$ , 棒的近盘一端与圆心距离为  $a$ , 试求圆盘对于细棒的引力.

18. 求密度为  $\rho$  的均匀球锥体对于在其顶点为一单位质量的质点的吸引力, 设球的半径为  $R$ , 而轴截面的扇形的角等于  $2\alpha$ .

19. 一个均匀的球壳, 密度为  $\rho$ , 半径为  $R$ , 试求它对于距球心为  $a$ 、质量为  $m$  的质点的引力. 并讨论质点在球内和球外两种情况.

20. 一个密度为  $\rho$  的均匀截锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2} (0 < a \leq z \leq b)$ , 求它对于处在锥顶的质量为  $m$  的质点的引力.

## 复 习 题

1. 求下列曲面所围的立体体积:

(1) 椭球  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  和椭圆抛物面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$  (含  $z$  轴

正向部分);

(2) 圆抛物面  $z = x^2 + y^2$ , 柱面  $y = x^2$ , 平面  $y = 1, z = 0$ ;

(3)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, y = \frac{b}{a}x, y = 0, z = 0 (x \geq 0, a > 0, b > 0,$

$c > 0)$ ;

(4) 柱面  $2y^2 = x$ , 平面  $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$  和  $z = 0$ .

2. 记  $e^u = \exp\{u\}$ . 求

$$f(x, y, z) = \exp\left\{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}\right\}$$

在区域

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

内的平均值.

3. 求由平面  $a_1x + b_1y + c_1z = \pm h_1$ ,  $a_2x + b_2y + c_2z = \pm h_2$ ,  $a_3x + b_3y + c_3z = \pm h_3$  所围成的平行六面体的体积, 其中

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

提示: 作变换  $u = a_1x + b_1y + c_1z$ ,  $v = a_2x + b_2y + c_2z$ ,  $w = a_3x + b_3y + c_3z$ .

4. 将下面累次积分化成二重积分, 并画出积分区域的草图:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{1-\sqrt{2y-y^2}}^{1+\sqrt{2y-y^2}} \varphi(x, y) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} \varphi(x, y) dx.$$

5. 试求由曲面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 + z = 4$  和锥面  $x^2 + y^2 = z^2$  ( $z \geq 0$ ) 所围成立体的体积.

6. 计算均匀半椭球体

$$3x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 1 (z \geq 0)$$

的重心.

7. 设均匀薄壳的形状是抛物面

$$z = \frac{3}{4} - (x^2 + y^2) \quad (x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4}),$$

试求薄壳的重心.

8. 上半椭球面  $x^2 + 4y^2 + z^2 = 5$  ( $z \geq 0$ ) 与柱面  $x^2 + 4y^2 = 1$  的交线上有一质量分布, 其密度为

$$\rho(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{4y^2 + \frac{1}{4}x^2}},$$

求其质量.

9. 证明均匀球壳对球外质点的引力相当于球壳的质量集中在球心时对质点的引力.

\* 10. 设  $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, l^2 + m^2 + n^2 \neq 0$ , 则有

$$\begin{aligned} & \iiint_V (lx + my + nz)^p dx dy dz \\ &= \begin{cases} 0 & (p \text{ 为奇数}) \\ \frac{4\pi(\sqrt{l^2 + m^2 + n^2})^p}{(p+1)(p+3)} & (p \text{ 为偶数}) \end{cases}, \end{aligned}$$

其中  $p$  为正整数.

提示: 找一个正交矩阵

$$U = \frac{1}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \begin{pmatrix} l & m & n \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix},$$

作坐标变换

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

## 8 场 论

牛顿-莱布尼兹公式把单变量函数的微分学与积分学联系起来,而联系多变量函数的微分学与积分学的是格林(Green)公式、高斯(Gauss)公式和斯托克斯(Stokes)公式.这些公式及将要引进的场的梯度、散度和旋度都可以利用外微分形式统一成一体.这就构成了本章场的数学理论.此外,为了物理学的需求,本章还研究了两个特别的场,保守场与无源场.列举了哈密顿算符的各种运算公式;导出了梯度散度和旋度在正交曲线坐标系下的表达式.

### 8.1 数量场的方向导数与梯度

#### 8.1.1 场的概念

“场”是从大量物理现象中抽象出来的一个物理概念.重物周围空间的每一点都存在引力;电荷周围各点都具有一定的电位;气流在空间中每一点上都有确定的速度;受热物体的内部形成一定的温度分布,这类例子举不胜举.一个物理量在空间的分布称为该物理量的场.如重物的引力场,电荷的电位场,气流的速度场,物体的温度场等等.按照物理量是数量还是向量,场也分成数量场和向量场.电位场与温度场是数量场.引力场与速度场则是向量场.

从数学上看,一个场就是定义在空间或空间某个区域上的点函数.如果对于空间区域 $V$ 上的每一点 $M$ ,都有数量 $u$ 的一个确定值与之对应,那么在 $V$ 上就确定了一个数量函数 $u = u(M)$ .它表示一个数量场;同样,在空间区域 $V$ 上确定的向量点函数 $v = v(M)$ 描述一个向量场.

如果构成一个场的物理量不仅依赖于空间,而且依赖于时间,即随着时间而变化,那么这个场将用一个关于点  $M$  和时间  $t$  的函数来表示,  $u = u(M, t)$  或  $v = v(M, t)$ . 这样的场叫做不定常的场. 而不随时间变化的场  $u(M)$  或  $v(M)$  叫做定常的场. 应当指出,绝对定常的场是不存在的,一切客观存在的物理现象都会随着时间的推移而变化. 但是,如果场在不太长的时间内的变化很微小,则就可以相对地把它看成是定常的场. 为了掌握物理量在空间中的分布形态及其随点变化的规律,今后将主要研究定常的场.

在空间中选定直角坐标系之后,点  $M$  可用它的坐标  $(x, y, z)$  表示,而场就表示为  $u(x, y, z)$  和  $v(x, y, z)$  的形式. 所以场即是关于点的坐标之多变量函数. 注意,这种坐标系的不同选取只能改变一个场的数学表达形式,而不改变场的物理性质.

“场论”一词也是借用物理学的术语. 这里讲述的场论是介绍一套研究场的数学方法. 它是多变量函数微积分学的一个重要组成部分.

### 8.1.2 数量场的方向微商

首先考虑数量场. 空间中的点可以沿着不同的方向移动,数量场的各个方向上的变化率就显得特别重要. 例如,大气沿着压强减小最快的方向流动;热量沿着物理温度下降最快的方向传导等等. 所以必须研究数量场沿着任意方向的变化率及在哪个方向变化最快的问题.

设在空间区域  $V$  上确定一个数量场  $u = u(M)$ ,  $M_0$  是  $V$  内一点,  $L$  是从  $M_0$  发出的一条射线,它的方向向量用  $l$  表示(图 8.1). 为了考察  $u$  在  $M_0$  沿方向  $l$  的变化快慢,可在射线  $L$  上  $M_0$  的附近任意取一点  $M$ ,作比式

$$\frac{u(M) - u(M_0)}{M_0M},$$

它表示场  $u$  沿方向  $l$  从  $M_0$  至  $M$  的平均变化率. 若当  $M$  沿直线  $L$  趋

于  $M_0$  时, 这个比式的极限存在, 就把此极限称为场  $u$  在点  $M_0$  沿方向  $l$  的变化率或方向微商, 记为  $\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{M_0}$ , 即

$$\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{M_0} = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{u(M) - u(M_0)}{M_0M}.$$

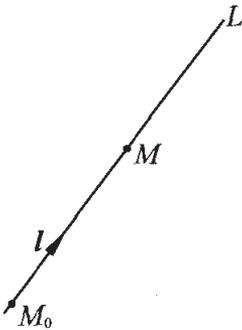


图 8.1

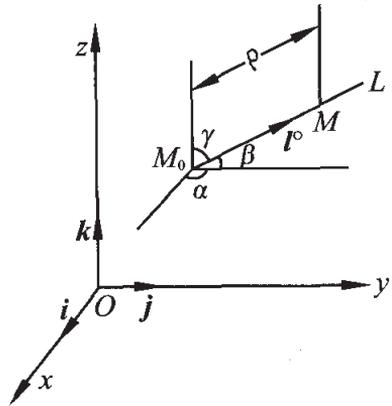


图 8.2

按定义, 这种方向微商与坐标系无关. 但为便于计算, 可引进一直角坐标系  $Oxyz$ , 把场  $u(M)$  表示成  $u(x, y, z)$ , 并设方向向量  $l$  的方向余弦  $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ . 由于点  $M(x, y, z)$  在射线  $L$  上, 则

$$x = x_0 + \rho \cos\alpha, y = y_0 + \rho \cos\beta, z = z_0 + \rho \cos\gamma,$$

其中  $(x_0, y_0, z_0)$  是点  $M_0$  的坐标,  $\rho = |M_0M|$  (图 8.2), 所以

$$u(x, y, z) = u(x_0 + \rho \cos\alpha, y_0 + \rho \cos\beta, z_0 + \rho \cos\gamma) = F(\rho)$$

是一个关于  $\rho$  的一元函数, 因此方向微商又可表成

$$\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{M_0} = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{F(\rho) - F(0)}{\rho} = F'(0).$$

如果函数  $u(x, y, z)$  在点  $M_0$  可微, 则由复合函数的求导定理可知微商  $F'(0)$  存在, 且在

$$F'(0) = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{d\rho} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{d\rho} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{d\rho} \right)_{\rho=0}.$$

从而得出这时方向微商也存在, 且在直角坐标系下的表达式为

$$\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{M_0} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma \right)_{(x_0, y_0, z_0)}.$$

特别当  $l = i$  时, 有  $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}$ , 这说明偏微商  $\frac{\partial u}{\partial x}$  就是场  $u$  沿  $x$  轴正向的方向微商; 同样, 偏微商  $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$  分别是场  $u$  沿  $y$  轴,  $z$  轴正向的方向微商.

**例 1** 求场  $u = x^2yz$  在点  $M_0(1, 1, 1)$  沿向量  $l = (2, -1, 3)$  的方向微商.

**解** 向量  $l$  的方向余弦是

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}, \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{14}}, \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

由方向微商的计算公式即得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{M_0} &= \left( 2xyz \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} - x^2z \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} + x^2y \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} \right)_{(1,1,1)} \\ &= \frac{6}{\sqrt{14}}. \end{aligned}$$

**例 2** 求场  $u = 3x^2 + xy - y^2$  在点  $M_0(1, -1)$  沿方向  $l = (-3, 4)$  的方向微商.

**解** 这个场只依赖于两个坐标, 称为二维场和平面场. 它亦可视为空间场的一种特殊形式. 由于平面向量  $l$  的方向余弦是

$$\cos\alpha = -\frac{3}{5}, \cos\beta = \frac{4}{5}, \cos\gamma = 0,$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{M_0} = \left[ (6x + y) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + (x - 2y) \cdot \frac{4}{5} \right]_{(1,-1)} = -\frac{3}{5}.$$

### 8.1.3 梯 度

上面已经指出, 数量场在给定的点处沿哪一个方向变化最快的问题具有重要的意义, 由此可以归结成所谓梯度的概念.

**定义** 数量场  $u$  在点  $M$  处的梯度是一个向量, 记为  $\text{grad}u$ , 它的大小等于场  $u$  在点  $M$  的所有方向微商中的最大值; 它的方向是取到这个最大值所沿的那个方向.

这个定义同样与坐标系无关. 但在取定坐标系后, 可以导出梯度的计算公式. 假定场  $u(x, y, z)$  具有连续的偏微商,  $l$  的方向余弦是  $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ , 则场  $u$  在点  $M(x, y, z)$  处沿  $l$  的方向微商为

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma.$$

设  $l^0$  是方向  $l$  上的单位向量

$$l^0 = \cos\alpha i + \cos\beta j + \cos\gamma k,$$

并引入向量

$$g = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k,$$

则有

$$\frac{\partial u}{\partial l} = g \cdot l^0 = |g| \cos\theta,$$

其中  $\theta$  是向量  $g$  与  $l^0$  之间的夹角. 这个公式说明方向微商  $\frac{\partial u}{\partial l}$  等于向量  $g$  在方向  $l^0$  上的投影. 可见当  $\theta = 0$  时, 即  $g$  与  $l^0$  的方向一致时, 方向微商就取到最大值  $|g|$ . 于是按定义, 向量  $g$  就是场  $u$  在点  $M$  处的梯度  $\text{grad}u = g$ . 从而得到梯度在直角坐标下的表达式为

$$\text{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k.$$

这时方向微商可表成

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{grad}u \cdot l^0 = |\text{grad}u| \cos\theta.$$

也就是说, 场  $u$  在点  $M$  处沿方向  $l$  的方向微商等于梯度在方向  $l$  上的投影(图 8.3). 由此可知, 场  $u$  在指定点  $M$  处沿着梯度正向的方向微商最大, 即场值增长最快, 其增长率等于  $|\text{grad}u|$ ; 而沿着梯

度负向的方向微商最小,即场值减小最快,减小率为 $-|\operatorname{grad}u|$ . 因此,大气沿着压强 $p$ 减小最快的方向流动,就是沿着 $-\operatorname{grad}p$ 的方向流动;热量沿着温度 $T$ 下降最快的方向即 $-\operatorname{grad}T$ 的方向传导;若 $z = z(x, y)$ 表示某一地形的高度,则沿着 $\operatorname{grad}z$ 的方向的坡度最陡,而雨水落地后必沿着 $-\operatorname{grad}z$ 的方向流动.

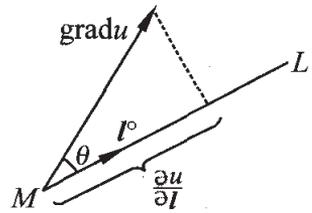


图 8.3

为了更形象地说明数量场的梯度,可以引进等值面. 场 $u$ 在空间中取到同一值 $c$ 的点所组成的曲面

$$u(x, y, z) = c$$

称为场 $u$ 的等值面. 例如,在电位场中,等值面就是电位相同的点组成的等位面;而在温度场中,等值面就是温度相同的点组成的等温面.

过场中任意一点 $(x_0, y_0, z_0)$ ,总可作一等值面,它的方程是

$$u(x, y, z) = u(x_0, y_0, z_0).$$

并且任意两个等值面不会相交. 因为若相反,则在交点处就能取两个不同的场值,这与场的单值性不相容.

若令 $c$ 取不同的值,就可以相应地作出一系列的等值面,这些等值面的图形把场分成许多层,从而能清楚地看出场值的分布规律. 同时,由于等值面在点 $M$ 处的法向量为

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right),$$

它恰是场在该点的梯度. 因此有结论:

在场中一点的梯度就是过这点的等值面的法向量,并指向场值增加的一方(图 8.4(a)).

如果以 $n^0$ 表示等值面的这个法向的单位向量,则梯度就可以写成

$$\operatorname{grad}u = \frac{\partial u}{\partial n} n^0.$$

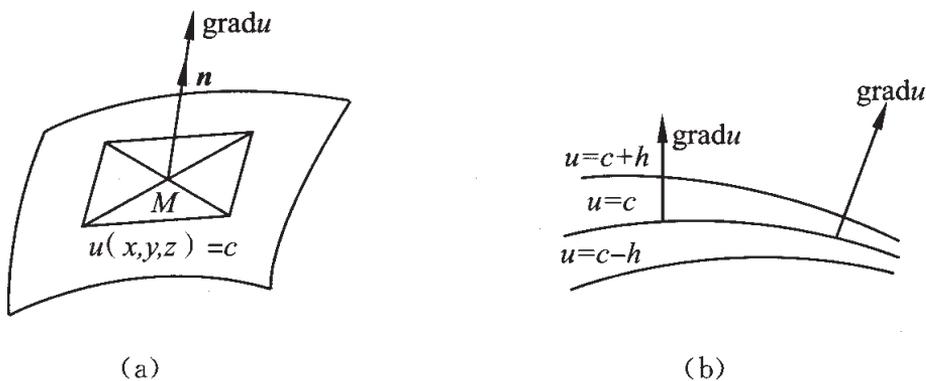


图 8.4

其中  $\frac{\partial u}{\partial n}$  是场  $u$  在相应点处沿法向  $n^0$  的方向微商, 它的数值就等于梯度的大小  $\frac{\partial u}{\partial n} = |\text{grad} u|$ . 所以沿梯度方向看,  $|\text{grad} u|$  较大的地方, 相邻的等值面将靠得较近, 如图 8.4(b) 所示.

求数量场的梯度是一种特定的微分运算, 它遵守以下运算法则.

1°  $\text{grad}(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 \text{grad} u_1 + c_2 \text{grad} u_2$ , 其中  $c_1, c_2$  是任意的常数.

2°  $\text{grad}(u_1 u_2) = u_1 \text{grad} u_2 + u_2 \text{grad} u_1$ ;

3°  $\text{grad} f(u) = f'(u) \text{grad} u$ .

这些等式容易通过梯度在直角坐标下的表达式加以验证.

例 1 求场  $u = 4x^2 + 4y^2 + z^2$  在点  $M(1, -1, 2)$  处的等值面, 梯度及最大的方向微商.

解 场  $u$  在点  $M(1, -1, 2)$  处的等值面是旋转椭球面

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{12} = 1.$$

而梯度是

$$\text{grad} u' |_{(1, -1, 2)} = (8xi + 8yj + 2zk) |_{(1, -1, 2)}$$

$$= 8\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

依照定义,场  $u$  在点  $M$  沿这个梯度方向的方向微商最大,并等于梯度的大小,所以得到

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\max} = |\operatorname{grad} u| = \sqrt{8^2 + (-8)^2 + 4^2} = 12.$$

例 2 设  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ , 求  $\operatorname{grad} r$ .

解 由于  $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , 所以有

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} r &= \frac{\partial r}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\mathbf{k} \\ &= \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\mathbf{r}}{r}. \end{aligned}$$

例 3 置于原点的电荷  $q$  产生的电位场是  $\varphi = \frac{q}{r}$ , 这里  $r$  是点  $(x, y, z)$  到原点的距离. 求它在空间任意一点处的梯度及沿方向  $\mathbf{r}$  的变化率.

解 利用梯度的运算法则和上例的结果, 立即得到

$$\operatorname{grad} \varphi = \operatorname{grad} \frac{q}{r} = \left(\frac{q}{r}\right)' \operatorname{grad} r = -\frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = -q \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

而电位  $\varphi$  沿方向  $\mathbf{r}$  的变化率为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{r}^0 = \operatorname{grad} \varphi \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = -q \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{q}{r^2}.$$

例 4 设场  $u$  具有连续的偏微商;  $\tau$  是光滑曲线  $L$  在点  $M$  处的单位切向量, 并指向弧长  $s$  的增加方向. 试证明该场在点  $M$  处沿切线方向  $\tau$  的方向微商等于它对曲线弧度  $s$  的微商, 即

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{du}{ds}.$$

证 在取定坐标系后, 光滑曲线  $L$  可表示为以弧长  $s$  为参数的方程

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k},$$

且有

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \boldsymbol{\tau}.$$

由此即得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \text{grad} u \cdot \boldsymbol{\tau} = \text{grad} u \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{ds} = \frac{du}{ds}. \end{aligned}$$

### 复习思考题

1. 叙述方向微商与梯度的概念. 它们有什么密切的关系?
2. 写出方向微商与梯度在直角坐标下的计算公式.
3. 梯度对于数量场的等值面有什么几何意义?
4. 梯度有哪些基本的运算法则?

### 习题 8.1

1. 求场  $u = xyz$  在点  $(1, 2, -1)$  沿方向  $\mathbf{l} = (3, -1, 1)$  的方向微商.

2. 设有平面温度场  $T = x^2 + y^2$ , 求它在点  $(1, 5)$  沿着与  $x$  轴相交成  $\frac{\pi}{6}$  和  $\frac{7\pi}{6}$  角两个方向上的温度变化率.

3. 试求函数  $z = \arctan \frac{y}{x}$  在圆  $x^2 + y^2 - 2x = 0$  上一点

$$P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

处沿该圆周逆时针方向上的方向微商.

4. 求场  $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$  在点  $(1, 1, -1)$  的最大方向微商值及沿方向  $\mathbf{l} = (1, 1, 0)$  的方向微商.

5. 求场  $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$  在点  $(1, 1, -1)$  的梯度和最大的方向微商.

6. 求平面场  $u = x^2 - xy + y^2$  在点  $(1, 1)$  处的梯度及沿方向

$l = (\cos\alpha, \cos\beta)$  的方向微商, 并分别求出在怎样的方向上其方向微商达到最大值, 最小值和 0.

7. 设  $r = xi + yj + zk, r = |r|$ , 试求:

(1)  $\text{grad} \frac{1}{r^2}$ ;            (2)  $\text{grad} \ln r$ .

8. 设电位场  $\varphi = \ln \frac{1}{r}$  ( $r$  同上题), 求它在点  $(1, 2, 4)$  的梯度及沿方向  $l = (1, 1, 1)$  的电位变化率.

9. 设  $u = \frac{1}{r}$ , 其中  $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ , 试求具有  $|\text{gradu}| = 1$  的那些点.

10. 设在区域  $G$  内场  $u$  的梯度恒等于零向量:  $\text{gradu} \equiv 0$ , 求证  $u$  必定是一个常数.

11. 证明在区域  $G$  内  $\text{gradu}$  为常向量的充分必要条件是  $u$  为线性函数, 即  $u = ax + by + cz + d$  ( $a, b, c, d$  为常数).

12. 求场  $u(x, y, z)$  沿着场  $v(x, y, z)$  梯度方向的方向微商, 问什么情况下这个方向微商等于零?

13. 设  $\omega$  是常向量,  $r = xi + yj + zk$ , 证明下列各式:

(1)  $\text{grad}(\omega \cdot r) = \omega$ ;

(2)  $\text{grad}(|\omega \times r|^2/2) = \omega^2 r - (\omega \cdot r)\omega$ .

## 8.2 向量场的通量与散度

### 8.2.1 双侧曲面及其定侧

#### (一) 双侧曲面

在下面的讨论中, “双侧曲面” 这个概念占有重要的地位.

设  $S$  是一张光滑曲面, 即设在  $S$  上每一点处, 都有确定的切平面, 并且切平面的位置随切点位置的变化而连续地变化. 又设曲面  $S$  具有这样的性质, 对于  $S$  上的任意两点, 都存在一条完全属于  $S$

的曲线将这两个点连接起来. 如果在  $S$  上存在这样的向量值函数  $n(M)$ , 它满足以下两个条件: (i) 对于任意的  $M \in S$ ,  $n(M)$  是曲面  $S$  在  $M$  点处的一个单位法向量, (ii) 当  $M$  沿着  $S$  上的任意一条不越过边界的闭曲线环行一周时,  $n(M)$  都连续地变化到原来的方向, 则称曲面  $S$  为**双侧曲面**, 否则称  $S$  为**单侧曲面**. 在双侧曲面上给出了满足上述条件的单位法向量值函数  $n(M)$ , 就叫做指定了双侧曲面的一个侧. 指定了侧的双侧曲面也称为**有向曲面**或**定侧曲面**.

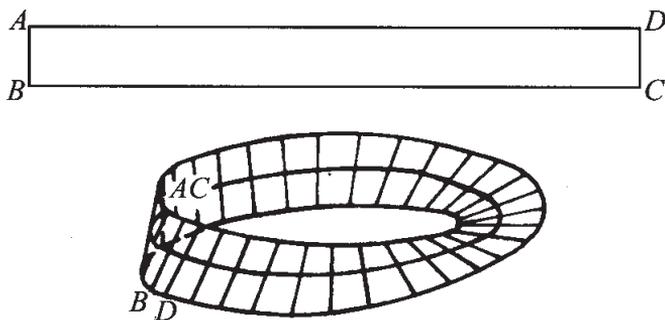


图 8.5

著名的“墨比乌斯(Möbius)带”是单侧曲面的一个典型的例子. 将一长方形纸条  $ABCD$  扭转  $180^\circ$ , 沿  $AB$  和  $CD$  两边粘起来, 使  $A$  和  $C$  重合,  $B$  和  $D$  重合, 就得到了这种带形的模型(图 8.5). 这时, 长方形上的一条中位线, 被粘合成带上的一条闭曲线, 当动点沿该闭曲线环行一周时, 动点处的单位法向量从一个方向连续变化为相反的方向, 因此这种带形是单侧曲面.

今后我们只研究双侧曲面.

在双侧曲面上任意取定一点  $M_0$ , 并在  $M_0$  处选定一个单位法向量  $n(M_0)$ , 对于曲面  $S$  上任意一点  $M$ , 在  $S$  上作一条连接  $M_0$ 、 $M$  的曲线, 由  $n(M)$  沿曲线连续变化的原则, 就可以唯一地确定  $M$  处的单位法向量  $n(M)$ , 从而就完全确定了双侧曲面的一个侧. 曲面

$S$  在  $M_0$  处的单位法向量有且仅有两个, 它们是互为相反方向的单位向量, 这两个向量正好确定了曲面的两个侧.

## (二) 参数曲面的定侧

设

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad ((u, v) \in D)$$

给出了一张光滑的双侧曲面. 由参数曲面法向量的求法可知, 在曲面上一点  $M_0(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$  处有且仅有两个方向相反的单位法向量, 它们是

$$\mathbf{n}(M_0) = \pm \frac{\mathbf{r}'_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}'_v(u_0, v_0)}{|\mathbf{r}'_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}'_v(u_0, v_0)|},$$

由于曲面是双侧曲面, 故

$$\mathbf{n}(M) = \varepsilon \frac{\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)}{|\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)|},$$

恰好表示了曲面的两个侧, 其中  $\varepsilon$  是常数,  $\varepsilon = 1$  或  $\varepsilon = -1$ ,  $\varepsilon$  的符号由曲面的定侧唯一确定. 或当  $\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v$  与  $\mathbf{n}$  构成右手系统时,  $\varepsilon = 1$ .

## (三) 显式曲面的定侧

连续可微的二元函数

$$z = f(x, y) \quad ((x, y) \in \text{区域 } D)$$

给出了一张光滑的双侧曲面, 这时,

$$\mathbf{n} = \varepsilon \frac{-f'_x \mathbf{i} - f'_y \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{f_x'^2 + f_y'^2 + 1}}$$

给出了曲面的两侧, 其中  $\varepsilon = 1$  或者  $\varepsilon = -1$ . 易见,  $\varepsilon$  的符号与  $\mathbf{n}$  的第三个分量同号, 用  $\alpha, \beta, \gamma$  分别表示单位向量  $\mathbf{n}$  与  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  的夹角, 则

$$\cos \gamma = \frac{\varepsilon}{\sqrt{f_x'^2 + f_y'^2 + 1}}.$$

$\varepsilon = +1$  表示  $\mathbf{n}$  与  $\mathbf{k}$  的夹角是锐角, 因而  $\mathbf{n}$  指向  $z$  轴正方向, 由此给出的曲面的侧称为曲面  $z = f(x, y) \quad ((x, y) \in D)$  的上侧, 有时也

称它为正则；对应于  $\varepsilon = -1$  的一侧称为下侧或负侧。

同样，显式曲面  $y = g(z, x)$  可由法向量

$$\mathbf{n} = \varepsilon \frac{-g_x' \mathbf{i} + \mathbf{j} - g_z' \mathbf{k}}{\sqrt{1 + g_x'^2 + g_z'^2}}$$

给出。 $\varepsilon = 1$  时， $\mathbf{n}$  指向  $y$  增加的方向，称为正则或右侧； $\varepsilon = -1$  时， $\mathbf{n}$  指向  $y$  减少的方向，称为负侧或左侧。对于显式曲面  $x = x(y, z)$ ，也可作出类似的结论，请读者自行完成。

#### (四) 简单封闭曲面的定侧

设一简单封闭曲面围着一个有界的立体区域，则称朝向立体的一侧为封闭曲面的内侧，而称朝向周围空间的一侧为封闭曲面的外侧。封闭曲面的外侧常被称为正则，而内侧常被称为负侧。

例 1 试确定椭球面

$$\begin{cases} x = a \sin \theta \cos \varphi \\ y = b \sin \theta \sin \varphi \\ z = c \cos \theta \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

( $a > 0, b > 0, c > 0$ ) 的外侧单位法向量。

解  $\mathbf{n} = \varepsilon \frac{\mathbf{r}_\theta' \times \mathbf{r}_\varphi'}{|\mathbf{r}_\theta' \times \mathbf{r}_\varphi'|}$ ，因  $\mathbf{n}$  指向外侧，故  $\mathbf{n}$  与  $\mathbf{r}$  的夹角为锐角，即  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} > 0$ 。由计算可得

$$(\mathbf{r}_\theta' \times \mathbf{r}_\varphi') \cdot \mathbf{r} = \begin{vmatrix} a \cos \theta \cos \varphi & b \cos \theta \sin \varphi & -c \sin \theta \\ -a \sin \theta \sin \varphi & b \sin \theta \cos \varphi & 0 \\ a \sin \theta \cos \varphi & b \sin \theta \sin \varphi & c \cos \theta \end{vmatrix}$$

$= abc \sin \theta > 0$  ( $\theta \neq 0, \pi$  时)，或  $\mathbf{r}_\theta', \mathbf{r}_\varphi', \mathbf{n}$  组成右手系统，故  $\varepsilon = 1$ 。读者可自行算出  $\mathbf{n}$  的各个分量的具体表达式。

#### (五) 分片光滑双侧曲面的定侧

假设曲面  $S$  是由一条或几条简单闭曲线所围成的光滑的双侧曲面，我们指出，曲面  $S$  的定侧与其边界曲线的环行方向有着密切的联系。给定了曲面  $S$  的一个侧，我们总可以唯一地选定其边界曲线的环行方向，使得当观察者与选定的侧的法方向同向地站在曲

面的边界上,并按照选定的环行方向沿着边界曲线环行时,他总是在自己的左边看到与他紧接的曲面的部分;如果改变曲面的定侧,就要改变观察者站立的方向,为使观察者仍然是在左边看到与他紧接的曲面的部分,必须改变边界曲线的环行方向.这样,给定了曲面的一侧,就确定了其边界曲线的环行方向;反之,选定了曲面的某一条边界曲线的环行方向,就唯一地确定了曲面的一个侧.

上面所规定的曲面的侧与其边界曲线环行方向之间相互确定的原则也称为右手系法则.

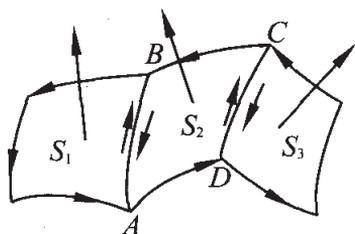


图 8.6

现在来规定分片光滑双侧曲面的定侧问题. 设分片光滑曲面  $S$  由三片光滑的双侧曲面  $S_1, S_2, S_3$  组成, 如图 8.6.

$S_1$  与  $S_2$  有公共边界  $\widehat{AB}$ ,  $S_2$  与  $S_3$  有公共边界  $\widehat{CD}$ , 此外它们没有公共点. 给  $S_1$  一个定向, 可导出  $S_1$  的边界曲线的环行方向, 在  $\widehat{AB}$  弧上的方向是从  $A$  到  $B$ . 给  $\widehat{AB}$  弧以相反的方向, 即自  $B$  到  $A$  的方向, 从而

导出  $S_2$  的方向及弧  $\widehat{CD}$  的方向, 作为  $S_2$  的边界, 弧  $\widehat{CD}$  上的方向是从  $D$  到  $C$ . 最后可导出  $S_3$  的一个定向, 使得  $\widehat{CD}$  弧作为  $S_3$  的边界时, 其方向为从  $C$  到  $D$ . 这样, 就给出了分片光滑曲面  $S$  的一个定侧. 最后应当指出, 由几片光滑的双侧曲面所组成的曲面未必是双侧曲面, 例如墨比乌斯带, 就可以看成是由两片光滑的双侧曲面粘接而成的曲面.

### 8.2.2 向量场的通量

#### (一) 通量的概念

设  $v(M)$  是某种不可压缩流体的速度场,  $S$  是场中一有向曲面, 我们来计算单位时间内流体沿指定侧通过  $S$  的流量.

为方便起见, 不妨假定流体的密度为 1. 将曲面分成许多小曲

面块  $S_i$ , 其面积记为  $\Delta S_i$ , 在每小块曲面  $S_i$  上任取一点  $M_i$ , 若将流体在  $S_i$  上各点的速度近似地视为  $\mathbf{v}(M_i)$ , 则在单位时间内通过  $S_i$  的流体体积  $\Delta N_i$  就近似等于以  $S_i$  为底,  $|\mathbf{v}(M_i)|$  为斜高的柱体的体积(图 8.7). 用  $\mathbf{n}(M_i)$  表示曲面  $S$  在点  $M_i$  处指向指定侧的单位法向量, 则通过  $S_i$  的流量为

$$\Delta N_i \approx (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_{M_i} \Delta S_i.$$

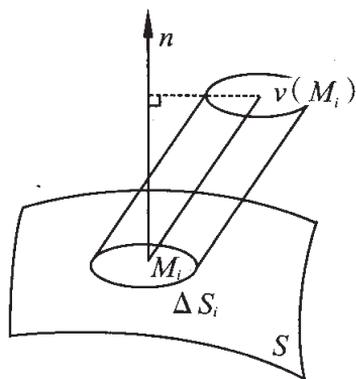


图 8.7

作出这些流量的和, 并令各面块的最大直径  $\lambda$  趋于零, 若和的极限存在, 则称该极限

$$N = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_{M_i} \Delta S_i$$

为流体通过整个曲面  $S$  流向指定侧的流量.

这种形式的“和数”也常会在别的向量场中遇到, 例如在求电场的电通量与磁场的磁通量时, 因此有必要概括成一般的概念.

**定义** 设  $\mathbf{v}(M)$  是定义在空间区域  $V$  上的一个向量场,  $S$  是  $V$  内的一张光滑的双侧曲面, 并指定了曲面的一侧,  $\mathbf{n}(M)$  是这一侧上的单位法向量. 如果按照上述方式构成的和数

$$\sum_i (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_{M_i} \Delta S_i$$

当  $\lambda \rightarrow 0$  时收敛, 并且与分割及取点无关, 则称此极限为向量场  $\mathbf{v}$  通过曲面  $S$  指定侧的通量, 记为  $\iint_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS$ , 即

$$\iint_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_{M_i} \Delta S_i.$$

## (二) 通量的计算

设

$$\mathbf{v} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

如果双侧曲面指向指定侧的单位法向量

$$\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

较易算出,则通量可用第一型曲面积分算出:

$$\iint_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) dS.$$

例1 求  $\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{r^3}$  通过球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  外侧的通量,其中  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

解 球面外侧,  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mathbf{r}}{R}$ , 故通量为

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_S \frac{q\mathbf{r}}{r^3} \cdot \frac{\mathbf{r}}{R} dS = \iint_S \frac{qr^2}{r^3 R} dS \\ &= \iint_S \frac{q}{R^2} dS = \frac{q}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi q. \end{aligned}$$

在一般情况下,双侧曲面由向径式方程

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \quad ((u, v) \in D)$$

给出,设在曲面  $S$  上,给定了一个连续变化的单位法向量

$$\mathbf{n} = \varepsilon \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|},$$

由(一),向量场  $\mathbf{v}$  通过曲面  $S$  流向指定侧的通量等于函数  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  在  $S$  上的第一型曲面积分,由第一型曲面积分的计算公式可得通量的计算公式:

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds &= \iint_D \mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|} \cdot |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| dudv \\ &= \varepsilon \iint_D \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) dudv \\ &= \varepsilon \iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} dudv \\ &= \varepsilon \iint_D \left( P \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + Q \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + R \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) dudv \end{aligned}$$

这就是通量的一般计算公式.

若  $S$  是显式曲面  $z = f(x, y), (x, y) \in D$ , 则  $x, y$  相当于参数  $u, v$ , 我们有

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS &= \epsilon \iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} dx dy \\ &= \epsilon \iint_D (-Pf'_x - Qf'_y + R) dx dy. \end{aligned}$$

更特殊的情形, 例如  $\mathbf{v} = P\mathbf{i}$  (可看成  $Q = R = 0$  的特殊情形), 则通量为

$$\iint_S P\mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS = \epsilon \iint_D -Pf'_x dx dy,$$

$\epsilon = 1$ , 即上例,  $\epsilon = -1$ , 即下列.

同样可考虑  $\mathbf{v} = Q\mathbf{j}$  及  $\mathbf{v} = R\mathbf{k}$  的特殊情形. 类似地, 还可写出显式曲面  $y = g(z, x)$  及显式曲面  $x = h(y, z)$  情形下的通量的计算公式. 在所有上面的公式中,  $\epsilon$  都是常量 1 (即右侧与前侧) 或  $-1$  (即左侧与后侧), 其符号由曲面的定向唯一确定.

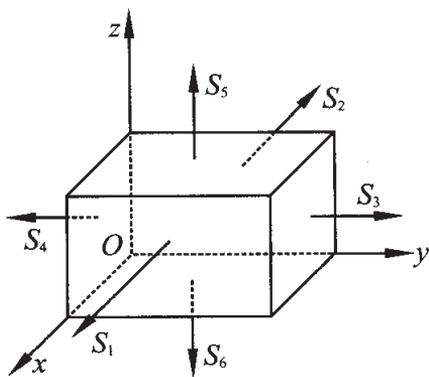


图 8.8

**例 2** 设向量场  $\mathbf{v} = y(x-z)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + (y^2 + xz)\mathbf{k}$ , 求  $\mathbf{v}$  通过长方体:  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$  的外表面的通量(图 8.8).

**解** 曲面  $S$  是由长方体的六个外侧面构成, 其前侧  $S_1$  的单位法向量为  $\mathbf{i}$ , 曲面方程为  $x = a, y, z$  是参数, 其变化范围为  $D_{yx}: 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$ ; 后侧法向量  $-\mathbf{i}$ , 方程  $x = 0$ , 参数  $y, z$  的变化范围也是  $D_{yx}$ , 故

$$\begin{aligned}
& \iint_{S_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_{S_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \\
&= \iint_{D_{yz}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}) \Big|_{x=a} dydz + \iint_{D_{yz}} [\mathbf{v} \cdot (-\mathbf{i})] \Big|_{x=0} dx dz \\
&= \int_0^b dy \int_0^c y(a-z) dz - \int_0^b dy \int_0^c y(0-z) dz \\
&= \frac{1}{2} ab^2 c,
\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}
& \iint_{S_3} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_{S_4} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \\
&= \int_0^c dz \int_0^a x^2 dx - \int_0^c dz \int_0^a x^2 dx = 0 \\
& \iint_{S_5} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_{S_6} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \\
&= \int_0^a dx \int_0^b (y^2 + cx) dy - \int_0^a dx \int_0^b (y^2 + 0 \cdot x) dy \\
&= \frac{1}{2} a^2 bc,
\end{aligned}$$

所以所求通量为

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \sum_{i=1}^6 \iint_{S_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{2} abc(a+b).$$

### 8.2.3 第二型曲面积分

#### (一) 有向面积元

为将表示通量的积分式中的有关曲面的因素集中起来,我们改写被积表达式如下:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{n} dS),$$

并记

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS,$$

称它为定侧曲面  $S$  的有向面积元. 即有向面积元是个向量, 其大小等于面积元  $dS$ , 其方向就是曲面上的指向指定侧的法方向. 用  $\alpha, \beta$  和  $\gamma$  表示单位向量  $\boldsymbol{n}$  的方向角 (即  $\boldsymbol{n}$  与  $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$  和  $\boldsymbol{k}$  的夹角), 那么  $\boldsymbol{n} = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k}$ . 因为  $\alpha$  是曲面元  $dS$  的法向量  $\boldsymbol{n}$  与平面  $Oyz$  的法向量  $\boldsymbol{i}$  的夹角, 所以曲面元  $dS$  在  $Oyz$  平面上的投影的面积为  $|\cos\alpha dS|$ , 为写出  $dS$  的第一个分量, 我们引进可取正、负值的面积元  $dydz$ :

$$dydz = \cos\alpha dS,$$

$dydz$  的大小等于  $dS$  在  $Oyz$  平面上的投影的面积,  $dydz$  的符号与  $\cos\alpha$  的符号相同, 同样, 记

$$dzdx = \cos\beta dS, dx dy = \cos\gamma dS,$$

于是

$$d\boldsymbol{S} = dydz\boldsymbol{i} + dzdx\boldsymbol{j} + dx dy\boldsymbol{k}$$

这就是有向面积元的分量的表示式, 其中  $dydz, dzdx, dx dy$  取正或负值取决于双侧曲面  $S$  的定向.

## (二) 第二型曲面积分及其计算

利用有向面积元, 表示通量的积分式中的被积表达式可以写成下面形式:

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS = \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S} = P dydz + Q dzdx + R dx dy.$$

**定义** 设  $S$  是光滑的双侧曲面,  $\boldsymbol{n}$  是  $S$  上指向指定侧的单位法向量,  $\boldsymbol{v} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$  是在  $S$  上有定义的向量场. 规定

$$\iint_S P dydz + Q dzdx + R dx dy = \iint_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS,$$

并称表达式  $\iint_S P dydz + Q dzdx + R dx dy$  为向量场  $\boldsymbol{v}$  在定向曲面  $S(\boldsymbol{n})$  上的第二型曲面积分.

由定义及通量的计算公式可得第二型曲面积分的计算公式. 设曲面  $S$  的方程是  $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) = x(u, v)\boldsymbol{i} + y(u, v)\boldsymbol{j} + z(u, v)\boldsymbol{k}$ ,  $(u, v) \in D$ , 指定侧单位法向量  $\boldsymbol{n} = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k} =$

$\epsilon \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|}$ , 则

$$\begin{aligned} & \iint_S P dydz + Q dzdx + R dx dy \\ &= \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \\ &= \epsilon \iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} dudv \\ &= \epsilon \iint_D \left( P \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right) dudv. \end{aligned}$$

### (三) 第二型曲面积分的简单性质

由积分  $\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$  的性质可直接得到第二型曲面积分的性质,

今列举几条如下:

1° 对于向量场的可加性: 设  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ ,  $\mathbf{v}_1 = P_1 \mathbf{i} + Q_1 \mathbf{j} + R_1 \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{v}_2 = P_2 \mathbf{i} + Q_2 \mathbf{j} + R_2 \mathbf{k}$ , 则

$$\begin{aligned} & \iint_S (P_1 + P_2) dydz + (Q_1 + Q_2) dzdx + (R_1 + R_2) dx dy \\ &= \iint_S P_1 dydz + Q_1 dzdx + R_1 dx dy \\ & \quad + \iint_S P_2 dydz + Q_2 dzdx + R_2 dx dy. \end{aligned}$$

特别  $\mathbf{v}_1 = P \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{v}_2 = Q \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{v}_3 = R \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ , 有

$$\begin{aligned} & \iint_S P dydz + Q dzdx + R dx dy \\ &= \iint_S P dydz + \iint_S Q dzdx + \iint_S R dx dy. \end{aligned}$$

2° 对积分区域的可加性: 若定向曲面  $S$  由  $k$  片定向曲面  $S_1, S_2, \dots, S_k$  连接而成, 则等式

$$\begin{aligned} & \iint_S P dydz + Q dzdx + R dx dy \\ &= \sum_{i=1}^k \iint_{S_i} P dydz + Q dzdx + R dx dy. \end{aligned}$$

就作为  $S$  上第二型曲面积分的定义式; 当用逐段光滑曲线将定向曲面  $S$  分割成  $S_1, S_2, \dots, S_k$  时, 以上等式就是第二型曲面积分对区域的可加性.

3° 方向性: 用  $S^+$  和  $S^-$  表示双侧曲面  $S$  的两个不同的定侧, 则有

$$\begin{aligned} & \iint_{S^+} P dydz + Q dzdx + R dx dy \\ &= - \iint_{S^-} P dydz + Q dzdx + R dx dy. \end{aligned}$$

(这条性质是第二型曲面积分的显著特点)

4° 设  $S_x$  是母线平行于  $x$  轴的定向柱面,  $S_y$  是母线平行于  $y$  轴的定向柱面,  $S_z$  是母线平行于  $z$  轴的定向柱面, 则

$$\iint_{S_x} P dydz = 0, \iint_{S_y} Q dzdx = 0, \iint_{S_z} R dx dy = 0.$$

证  $S_x$  上  $n \perp i$ ,  $\cos\alpha = 0$ , 故

$$\iint_{S_x} P dydz = \iint_S \cos\alpha dS = 0.$$

同理可证另外两式.

(四) 例

作为一个一般性的特例, 设  $S$  是由显式  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$  给出, 则由一般计算公式易得

$$\begin{aligned} \iint_{S_{\text{上侧}}} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy &= \iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ 1 & 0 & z_x' \\ 0 & 1 & z_y' \end{vmatrix} dx dy \\ &= \iint_D (-P \cdot z_x' - Q \cdot z_y' + R) dx dy. \end{aligned}$$

特别,

$$\iint_{S_{\text{上侧}}} R(x, y, z) dx dy = \iint_D R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

若定向曲面  $S$  可分割成有限块, 每一小块上或者可表示成显式  $z = z(x, y)$  的形式, 或者是母线平行于  $z$  轴的柱面, 则积分  $\iint_S R dx dy$  就可以利用上面的特例及简单性质 3°、4° 进行(分块)计算了.

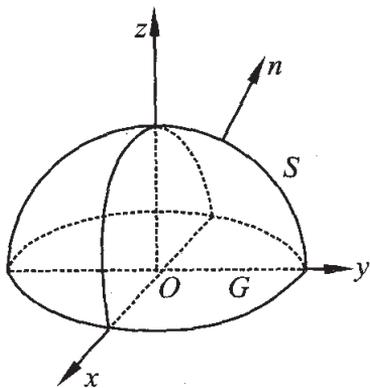


图 8.9

更特殊的例子是:  $S: z = 0, (x, y) \in D$ , 上侧,  $R = R(x, y)$ , 则

$$\iint_{S_{\text{上侧}}} R(x, y) dx dy = \iint_D R(x, y) dx dy.$$

可见, 二重积分可看成是一种特殊形式的第二型曲面积分.

#### 例 1 计算曲面积分

$$\iint_S x^2 dx dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy,$$

其中  $S$  是半球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$  的上侧(图 8.9).

解 将半球面  $S$  分成子曲面  $S_1, S_2$ , 其方程分别是

$$x = \sqrt{a^2 - y^2 - z^2} (z \geq 0),$$

$$x = -\sqrt{a^2 - y^2 - z^2} (z \geq 0).$$

于是

$$\iint_S x^2 dydz = \iint_{S_1} x^2 dydz + \iint_{S_2} x^2 dydz,$$

等式右边第一个积分取在  $S_1$  的前上侧, 第二个积分取在  $S_2$  的后上侧. 应用曲面积分的计算公式, 化为二重积分得

$$\begin{aligned} \iint_S x^2 dydz &= \iint_D (\sqrt{a^2 - y^2 - z^2})^2 dydz \\ &\quad - \iint_D (-\sqrt{a^2 - y^2 - z^2})^2 dydz = 0, \end{aligned}$$

其中  $D$  是  $S_1$  及  $S_2$  在平面  $Oyz$  上的投影区域, 即半圆  $y^2 + z^2 \leq a^2 (z \geq 0)$ .

同样算得

$$\iint_S y^2 dzdx = 0.$$

因为在球面  $S$  上  $z^2 = a^2 - x^2 - y^2$ , 而  $S$  在平面  $Oxy$  上的投影区域  $G$  为圆  $x^2 + y^2 \leq a^2$ , 所以应用曲面积分上侧的计算公式又得

$$\begin{aligned} \iint_S z^2 dx dy &= \iint_G (a^2 - x^2 - y^2) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a (a^2 - r^2) r dr = \frac{1}{2} \pi a^4. \end{aligned}$$

从而所求的曲面积为

$$\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dx dy = \frac{1}{2} \pi a^4.$$

**例 2** 计算曲面积分

$$\iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx,$$

其中  $S$  是上半椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 (z \geq 0)$  的上侧.

**解** 将椭球面  $S$  表示成参数方程

$$x = a \sin \theta \cos \varphi, y = b \sin \theta \sin \varphi, z = c \cos \theta,$$

其中  $\theta, \varphi$  的变化范围是矩形  $\Delta$ :

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

因为

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(\theta, \varphi)} = bc \sin^2 \theta \cos \varphi, \frac{\partial(z, x)}{\partial(\theta, \varphi)} = a \sin^2 \theta \sin \varphi.$$

且向量  $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi$  指向  $S$  的上侧,  $\varepsilon = 1$ , 故由曲面积分的计算公式得

$$\begin{aligned} \iint_S x^3 dydz &= \iint_S a^3 \sin^3 \theta \cos^3 \varphi \cdot bc \sin^2 \theta \cos \varphi d\theta d\varphi \\ &= a^3 bc \int_0^{2\pi} \cos^4 \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta d\theta = \frac{2}{5} \pi a^3 bc. \end{aligned}$$

同样可得

$$\iint_S y^3 dzdx = \frac{2}{5} \pi ab^3 c.$$

从而所求曲面积分的值为

$$\iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx = \frac{2}{5} \pi abc (a^2 + b^2).$$

#### 8.2.4 散 度

考察向量场  $\mathbf{v}$  通过一个封闭曲面  $S$  外侧的通量, 记成  $N$ ,

$$N = \oiint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS.$$

这种形式的通量具有重要的物理意义. 例如, 若  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(M)$  是流体的速度场, 则它就表示从  $S$  内部向外流出的流量. 当  $N$  大于零时, 表示总有流体从  $S$  内流出, 因而  $S$  内含有“源”; 当  $N$  小于零时, 表示总有流体注入  $S$  内部,  $S$  内含有“汇”或“负源”. 为了刻画流体在各处的这种源汇的强度, 可在一点  $M_0$  的附近围绕  $M_0$  作封闭曲面  $S$ , 把通过  $S$  的流量和  $S$  所围成的区域  $V$  之体积  $\Delta V$  相比, 并考虑当  $V$  无限收缩于点  $M_0$  的极限

$$\lim_{V \rightarrow M_0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS,$$

它表示点  $M_0$  附近单位体积所流出的流量,称为  $M_0$  处源的密度.这显然是描述流场中各点局部性态的重要物理量.

将上述对于流体建立起来的概念推广到一般的向量场,便引出如下定义.

**定义** 设  $\mathbf{v}(M)$  是区域  $G$  上的向量场,  $M$  是  $G$  内一点.在场中围绕点  $M$  作任意的闭曲面  $S$ ,  $V$  是  $S$  所围成的闭区域,其体积记作  $\Delta V$  (图 8.10).  $\mathbf{n}$  是  $S$  外侧的单位法向量.若当区域  $V$  无限收缩于点  $M$  时,比式

$$\frac{1}{\Delta V} \oiint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

的极限存在,就称该极限为向量场  $\mathbf{v}$  在点  $M$  的散度,记成  $\operatorname{div} \mathbf{v}$ ,即

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \lim_{V \rightarrow M} \frac{1}{\Delta V} \oiint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS.$$

散度的定义与坐标系统无关.

利用散度的定义,容易证明散度符合下列运算法则.若  $u$  是可微的数量场,  $c_1, c_2$  是任意常数,则有

$$1^\circ \operatorname{div}(c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2) = c_1 \operatorname{div} \mathbf{v}_1 + c_2 \operatorname{div} \mathbf{v}_2.$$

$$2^\circ \operatorname{div}(u\mathbf{v}) = u \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{v}.$$

### 8.2.5 高斯定理

由 8.2.4 知道,若  $\mathbf{v}$  是流体的速度场,则散度  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  就是点  $M$  处源的密度,它表示点  $M$  附近每单位体积所流出的流量.在点  $M$  处取体积元  $dV$ ,则从  $dV$  流出的流量应是  $\operatorname{div} \mathbf{v} dV$ ,而从整个区域  $V$  所流出的流量就可以表成

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{v} dV.$$

以  $S$  记围成区域  $V$  的封闭曲面,由物质守恒定律,这个从  $V$  内所流出的流量就必须等于从  $S$  的内部向外流出  $S$  的流量

$$\oiint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS,$$

于是就有

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{v} dV.$$

这个公式对一般的向量场也成立.

**高斯定理** 设  $V$  是由分片光滑的闭曲面  $S$  所围在的有界闭区域; 函数  $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$  在  $V$  上有连续的一阶偏微商, 则有

$$\begin{aligned} & \oiint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy \\ &= \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz, \end{aligned}$$

其中左边的曲面积分是取在闭曲面  $S$  的外侧.

**证** 先设曲面  $S$  具有这样的性质, 任何平行于坐标轴的直线至多与它相交于两点. 特别, 曲面  $S$  可以分成分别由方程  $z = z_1(x, y)$  与  $z = z_2(x, y)$  表示的上下两半曲面  $S_1$  与  $S_2$ , 并且它们在平面  $Oxy$  上有共同的投影区域  $D$ . 于是

$$\begin{aligned} \iint_S R dxdy &= \iint_{S_1+S_2} R(x, y, z) dxdy \\ &= \iint_D [R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))] dxdy \\ &= \iint_D \left( \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dxdy \\ &= \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz. \end{aligned}$$

如果组成  $S$  的曲面除  $S_1$  与  $S_2$  外, 还有母线平行于  $z$  轴的柱面  $S_3$  (参见图 7.32), 则由于

$$\iint_{S_3} R(x, y, z) dxdy = 0,$$

所以仍有公式

$$\iint_S R dx dy = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz.$$

同样可得

$$\iint_S P dy dz = \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz.$$

$$\iint_S Q dz dx = \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz.$$

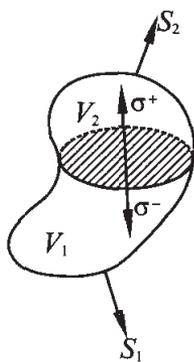


图 8.12

合并这些公式,从而就在 \$S\$ 是特殊的闭曲面下证明了高斯定理.

再考察一般的情形,即曲面 \$S\$ 与平行于坐标轴的直线相交多于两点. 这时可作辅助曲面把区域 \$V\$ 分成有限个子区域,使得每个子区域的边界曲面满足上述条件. 为确定起见,可设辅助曲面 \$\sigma\$ 分 \$V\$ 为两个这样的子区域 \$V\_1\$ 与 \$V\_2\$ (图 8.12), 围成 \$V\_1, V\_2\$ 的闭曲面分别记作 \$S' = S\_1 + \sigma^+, S'' = S\_2 + \sigma^-\$. 应用高斯定理到这些子区域就得到

$$\oiint_{S'} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_{V_1} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

$$\oiint_{S''} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_{V_2} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

将此二式相加,右边就是整个区域 \$V\$ 上的体积分;而左边的面积分可以化成沿 \$S\$ 外侧的积分与沿辅助曲面 \$\sigma\$ 的两个积分之和. 后面这两个积分中,一个是沿 \$\sigma\$ 的正侧 \$\sigma^+\$ 所取的积分,另一个是沿 \$\sigma\$ 的负侧 \$\sigma^-\$ 所取的积分,因而沿这两侧所取的积分之和为零. 于是又在一般的情形下证明了高斯定理

$$\begin{aligned} & \oiint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy \\ &= \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz. \end{aligned}$$

这样一来,高斯定理的适用范围就被扩充到了在实际问题中所遇到的相当广泛的一类空间区域.例如对于由两个封闭曲面所围成的环形区域,高斯定理也成立.

作为高斯定理的应用,我们来证明散度的直角坐标表达式.

设向量场  $\boldsymbol{v}$  的分解式为

$$\boldsymbol{v} = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k},$$

且分量  $P, Q, R$  具有连续的一阶偏微商.在场中任取一点  $M(x, y, z)$ , 围绕点  $M$  作分片光滑的闭曲面  $S$ , 它围成的区域记作  $V$ , 于是由高斯定理有

$$\begin{aligned} \oiint_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS &= \oiint_S P dydz + Q dzdx + R dx dy \\ &= \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz; \end{aligned}$$

由积分中值定理得

$$\oiint_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_{M'} \Delta V,$$

其中  $M'$  是区域  $V$  中的一点,  $\Delta V$  是  $V$  的体积. 令区域  $V$  收缩到点  $M$ , 则  $M'$  趋于  $M$ , 所以

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \lim_{V \rightarrow M} \frac{1}{\Delta V} \oiint_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

从而高斯定理又可以用向量的形式写成

$$\oiint_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS = \iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{v} dV,$$

这里法向量  $\boldsymbol{n}$  指向曲面  $S$  的外侧.

高斯定理中的公式又称为高斯公式,它是场论中最基本的公式之一,今后还要多次地用到它.

**例 1** 求向量场  $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$  在任一点的散度.

**解** 
$$\operatorname{div} \boldsymbol{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

例2 求电场强度  $E = \frac{q}{r^3} \mathbf{r}$  ( $r = |\mathbf{r}|$ ) 的散度.

解 根据散度的运算法则及上例的结果

$$\begin{aligned} \operatorname{div} E &= \operatorname{div} \left( \frac{q}{r^3} \mathbf{r} \right) = \frac{q}{r^3} \operatorname{div} \mathbf{r} + \operatorname{grad} \left( \frac{q}{r^3} \right) \cdot \mathbf{r} \\ &= \frac{3q}{r^3} + \left( \frac{q}{r^3} \right)' \operatorname{grad} r \cdot \mathbf{r} = \frac{3q}{r^3} - \frac{3q}{r^4} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r} \\ &= \frac{3q}{r^3} - \frac{3q}{r^3} = 0. \end{aligned}$$

例3 利用高斯公式再计算曲面积分

$$\oiint_S y(x-z) dydz + x^2 dzdx + (y^2 + xz) dx dy,$$

其中  $S$  是立方体  $V$  ( $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$ ) 的外侧表面.

解 因为

$$P = y(x-z), Q = x^2, R = y^2 + xz,$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = x + y,$$

所以算得

$$\begin{aligned} &\oiint_S y(x-z) dydz + x^2 dzdx + (y^2 + xz) dx dy \\ &= \iiint_V (x+y) dx dy dz = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (x+y) dz \\ &= \frac{1}{2} abc(a+b). \end{aligned}$$

与直接计算曲面积分的方法对比,这是何等的简易!

例4 求场  $\mathbf{v} = yz\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$  通过任意闭曲面  $S$  外侧的通量.

解 因为

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x}(yz) + \frac{\partial}{\partial y}(zx) + \frac{\partial}{\partial z}(xy) \equiv 0,$$

故由高斯公式即得

$$\oiint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

就中所给向量场沿任意闭曲面外侧的通量恒为零.

**例 5** 证明电场强度  $\mathbf{E} = \frac{q}{r^3} \mathbf{r}$  通过包围点电荷的任意闭曲面  $S$  外侧的通量都等于其电量  $q$  的  $4\pi$  倍.

**证** 在  $S$  内以点电荷为中心作一半径为  $\epsilon$  的球面  $S_\epsilon$ , 用  $V$  表示由闭曲面  $S$  和  $S_\epsilon$  所围成的环形区域(图 8.13), 则由高斯定理得

$$\oiint_{S+S_\epsilon} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS + \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV,$$

这里  $\mathbf{n}$  指向边界曲面的外侧, 具体地说, 在  $S$  上指向封闭曲面  $S$  的外侧, 而在  $S_\epsilon$  上, 指向封闭曲面  $S_\epsilon$  的内侧, 并记为  $S_\epsilon^-$ , 由于当  $r$  不等于零时,  $\operatorname{div} \mathbf{E}$  恒等于零, 故得

$$\oiint_{S+S_\epsilon^-} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 0,$$

或者写成

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \oiint_{S_\epsilon^+} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS,$$

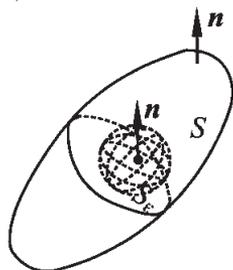


图 8.13

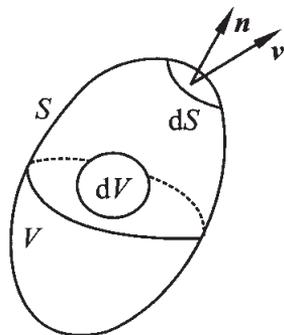


图 8.14

其中法向量  $\mathbf{n}$  都是指向  $S$  和  $S_\epsilon$  的外侧(图 8.13). 应用 8.2.2 的例 1 就得到所要证明的公式

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi q.$$

顺便指出,如果  $S$  是不包围点电荷的任意闭曲面,那么显然有

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

例 6 设有某种流体作不定常的流动,它的速度场与密度场分别为

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(M, t), \rho = \rho(M, t),$$

且这些场对时间  $t$  及点  $M$  的坐标都有连续的偏微商,试证在场  $\mathbf{v}$  与  $\rho$  之间成立连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

证 在流场中任取闭曲面  $S$ ,它所围成的区域为  $V$ , $\mathbf{n}$  是  $S$  的外法线单位向量(图 8.14).考察在单位时间内流过  $S$  的流体质量.由于单位时间内流过面积元  $dS$  的质量  $dm = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$ ,所以流过整个  $S$  的质量为

$$m = \oiint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS.$$

另一方面,根据质量守恒定律,从  $S$  流过的流体质量应等于区域  $V$  内流体质量的减少.而在单位时间内, $V$  内流体质量的减少量是

$$-\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV,$$

所以

$$\oiint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

根据高斯公式有

$$\oiint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = -\iiint_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV,$$

由此推知

$$\iiint_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0.$$

这个等式对于任意的区域  $V$  都成立, 又因被积函数是连续的, 所以必须在流场的空间中处处成立

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

对于不可压缩的流体, 密度  $\rho$  是常数, 因此它的连续性方程是

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

根据散度的意义, 这个式子表明不可压缩流体的速度场  $\mathbf{v}$  是处处无源的.

### 复习思考题

1. 什么样的曲面可以定向? 试述一般参数曲面的定向方法以及分片光滑双侧曲面的定向方法.
2. 叙述流量与通量的概念.
3. 叙述第二型曲面积分的概念, 它与第一型曲面积分有何区别和联系?
4. 写出通量和第二型曲面积分的计算公式.
5. 叙述向量场散度的概念, 它与向量场的通量有何密切关系?
6. 写出散度在直角坐标系下的表达式.
7. 何谓高斯公式? 写出它的坐标形式和向量形式. 高斯公式描述向量场的什么性质? 用高斯公式时应注意什么条件?
8. 散度有哪些运算法则?

### 习题 8.2

1. 计算曲面积分

$$(1) \iint_S z^2 dx dy; \quad (2) \iint_S y^2 dz dx;$$

$$(3) \iint_S x^2 dydz; \quad (4) \iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy,$$

其中  $S$  为平面  $x + y + z = 1$  在第一卦限的部分, 远离原点的一侧.

2. 计算曲面积分

$$(1) \iint_S dx dy; \quad (2) \iint_S (x + y^2) dx dy;$$

$$(3) \iint_S z dx dy; \quad (4) \iint_S z^2 dx dy,$$

其中  $S$  为椭圆面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  的外侧.

3. 计算曲面积分  $\iint_S xy^2 z^2 dydz$ , 其中  $S$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  的  $x \leq 0$  的一半, 远离球心的一侧.

4. 计算曲面积分  $\iint_S xyz dx dy$ , 其中  $S$  是柱面  $x^2 + z^2 = R^2$  在  $x \geq 0, y \geq 0$  两卦限内被平面  $y = 0$  及  $y = h$  所截下部分的外侧.

5. 计算曲面积分

$$\iint_S (y - z) dydz + (z - x) dzdx + (x - y) dxdy,$$

其中  $S$  是圆锥面  $x^2 + y^2 = z^2 (0 \leq z \leq 1)$  的下侧.

6. 计算曲面积分

$$\iint_S f(x) dydz + g(y) dzdx + h(z) dxdy,$$

其中  $f(x), g(y), h(z)$  为连续函数,  $S$  是直角平行六面体  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$  的外侧.

7. 求场  $\mathbf{v} = (x^3 - yz)\mathbf{i} - 2x^2 y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  通过长方体 ( $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$ ) 的外侧表面  $S$  的通量.

8. 求场  $\mathbf{v} = xz^2\mathbf{i} + x^2 y\mathbf{j} + y^2 z\mathbf{k}$  通过上半球面

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

的上侧的通量.

9. 求下列向量场在指定点的散度:

(1)  $\mathbf{v} = x^2 yz\mathbf{i} + y^2 xz\mathbf{j} + z^2 xy\mathbf{k}$  在  $M(1,1,1)$  处;

(2)  $\mathbf{A} = e^{xy}\mathbf{i} + \cos(xy)\mathbf{j} + \cos(xz^2)\mathbf{k}$  在  $M(0,1,2)$  处;

(3)  $\mathbf{E} = (3x^2 - 2yz, y^3 + yz^2, xyz - 3xz^2)$  在  $M(1, -2, 2)$  处;

(4)  $\mathbf{v} = x^2 \sin y\mathbf{i} + y^2 \sin(xz)\mathbf{j} + xysin(\cos z)\mathbf{k}$  在  $M(x, y, z)$  处.

10. 设  $\boldsymbol{\omega}$  是常向量,  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ . 求:

(1)  $\operatorname{div}[(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}]$ ;      (2)  $\operatorname{div}[(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}]$ ;

(3)  $\operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r}$ ;      (4)  $\operatorname{div}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ ;

(5)  $\operatorname{div}(r^2 \boldsymbol{\omega})$ ;      (6)  $\operatorname{div}[f(r)\mathbf{r}]$ .

11. 求下列数量场的梯度场的散度:

(1)  $\varphi = x^3 y^4 z^2$ ;      (2)  $u = xyz e^{x+y+z}$ .

12. 利用 Gauss 公式计算下列曲面积分:

(1)  $\oiint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$ ,

$S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  的外侧;

(2)  $\oiint_S xydydz + yzdzdx + zxdxdy$ ,

$S$ : 由  $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$  所围成的四面体的外侧表面;

(3)  $\oiint_S (x-y+z)dydz + (y-z+x)dzdx + (z-x+y)dxdy$ ,

$S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  的外侧;

(4)  $\iint_S (x-z)dydz + (y-x)dzdx + (z-y)dxdy$ ,

$S$ : 旋转抛物面  $z = x^2 + y^2$  ( $0 \leq z \leq 1$ ) 的下侧;

$$(5) \oiint_S dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy,$$

S: 球面  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$  的外侧;

$$(6) \oiint_S (x+1)dydz + ydzdx + (xy+z)dxdy,$$

S: 以  $O(0,0,0), A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$  为顶点的四面体的外表面;

$$(7) \oiint_S xy^2 dydz + yz^2 dzdx + zx^2 dxdy,$$

S: 是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = z$  的外侧;

$$(8) \iint_S (y^2 + z^2)dydz + (z^2 + x^2)dzdx + (x^2 + y^2)dxdy,$$

S: 上半球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$  的上侧.

13. 求引力场  $\mathbf{F} = -km \frac{\mathbf{r}}{r^3}$  通过下列闭曲面外侧的通量:

- (1) 空间中任一包围质量  $m$  (在原点) 的闭曲面;
- (2) 空间中任一不包围质量  $m$  的闭曲面;
- (3) 质量  $m$  的光滑闭曲面上.

14. 计算  $\oiint_S \frac{dxdy}{z}$ , S:  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  的外侧.

15. 设场  $\mathbf{v} = \frac{\varphi(r)}{r^3} \mathbf{r}$ , 其中  $\varphi(r)$  有一阶连续微商, 求

- (1)  $\mathbf{v}$  通过球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  外侧的通量;
- (2) 若  $\varphi(1) = 1$ , 确定  $\varphi(r)$ , 使  $\mathbf{v}$  是除了原点以外的无源场 ( $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, r = |\mathbf{r}|$ ).

16. 求场  $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$  通过椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

外侧的通量.

17. 求向径  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  通过圆锥面

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (0 \leq z \leq 1)$$

上侧的通量.

18. 求场  $\mathbf{A} = (\cos x, \cos y, (x^2 + y^2)z + \frac{z^3}{3})$  通过球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  外侧的通量.

19. 求场  $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + (e^x - 2yz)\mathbf{k}$  通过椭圆柱面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, 0 \leq z \leq 1$  外侧的通量.

20. 证明任意光滑闭曲面  $S$  围成的立体体积可以表成

$$V = \frac{1}{3} \oint_S x dydz + y dzdx + z dx dy,$$

其中积分沿  $S$  的外侧进行.

21. 设  $\mathbf{c}$  是常向量,  $S$  是任意的光滑闭曲面, 证明:

$$\oint_S \cos(\mathbf{c}, \mathbf{n}) dS = 0,$$

其中  $(\mathbf{c}, \mathbf{n})$  表示向量  $\mathbf{c}$  与曲面法向  $\mathbf{n}$  的夹角.

22. 证明:

$$\frac{1}{2} \oint_S \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) dS = \iiint_V \frac{dv}{r},$$

其中  $S$  是包围区域  $V$  的光滑闭曲面,  $\mathbf{n}$  是它的外侧法向,  $\mathbf{r}$  是从点  $(x_0, y_0, z_0)$  指向点  $(x, y, z)$  的向径,  $r = |\mathbf{r}|$ ,  $(x_0, y_0, z_0)$  是  $V$  内的一点.

## 8.3 向量场的环量与旋度

### 8.3.1 向量场沿有向曲线的积分及其计算

#### (一) 曲线的定向

设曲线  $L: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, t \in [\alpha, \beta]$ , 考虑

动点沿曲线  $L$  从一个端点到另一个端点的运动, 它有且仅有两种方向, 一是沿着参数  $t$  增加的方向, 这个方向有时也被称为正向; 另一个是沿着参数  $t$  减少的方向, 这个方向常被称为负向. 为指出曲线的方向, 只要指出曲线的起点和终点就行了.

如果  $\mathbf{r}'(t)$  连续且处处不为零, 这时  $L$  是光滑曲线, 因为  $\mathbf{r}'$  始终是指向  $t$  增加的方向, 所以指定  $t$  增加的方向相当于指定了曲线  $L$  上连续变化的单位切向量  $\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$ , 反之, 相当于指定  $\boldsymbol{\tau} = -\frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$ . 给定了方向的曲线称为定向曲线.

所谓给定了一条简单封闭曲线的定向, 是指给出了它的一个环行方向. 如果简单封闭曲线位于  $Oxy$  平面内, 可从  $z$  轴正方向去观察曲线, 其环行方向, 可分为逆时针方向 (常称为正向) 和顺时针方向 (常称为负向) 两种. 如果简单封闭曲线是某定向曲面的边界, 由 8.2.1 的讨论, 曲面的定向诱导出边界曲线的一个环行方向, 这时, 曲线的环行方向可以分为与诱导定向同向或反向两种情形.

## (二) 力场做功, 向量场沿有向曲线的积分

首先考虑变力做功的问题.

设在空间区域  $V$  上存在一力场  $\mathbf{F}(\mathbf{M})$ ,  $L$  是  $V$  内一条光滑的曲线, 它的起点和终点分别记成  $A$  和  $B$ . 今有质点在场力  $\mathbf{F}$  的作用下, 从点  $A$  沿  $L$  运动至点  $B$ , 求场力对它作的功.

为此, 将曲线  $L$  任意分成  $n$  个小弧段  $l_i$ , 其弧长记成  $\Delta l_i$ , 在每个小弧段  $l_i$  上任取一点  $M_i$ , 则力场  $\mathbf{F}$  在此小段上所作的功可近似表为

$$(\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau})_{M_i} \Delta l_i,$$

其中  $\boldsymbol{\tau}$  表示曲线  $L$  在点  $M$  处的单位切向量, 它是指向质点运动的方向. 作出这些微功的和, 并令所有小段的最大弧长  $\lambda$  趋于零, 则其极限就是力场  $\mathbf{F}$  对质点所作的功  $W$ , 即有

$$W = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau})_{M_i} \Delta l_i.$$

这类在曲线上构成的“积分和”也出现在其它的物量场中,所以有必要抽去其中的实际意义,而把它根据成下述一般的概念.

**定义** 设  $L$  是一条光滑的定向曲线,  $\tau$  是  $L$  上指向指定方向的单位切向量,  $F = F(M) = Pi + Qj + Rk$  是在  $L$  上有定义的向量场,如果按上述方式构成的和数

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau})_{M_i} \Delta l_i$$

当小段的最大弧长  $\lambda$  趋于零时收敛,且与分割及取点无关,就称这个极限为场  $F$  沿曲线  $L$  指定方向的积分,记作  $\int_L (\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}) dl$ ,即

$$\int_L \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau})_{M_i} \Delta l_i.$$

### (三) 向量场沿有向曲线积分的计算

当  $\boldsymbol{\tau} = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}$  较易算出时,向量场沿有向曲线的积分可用第一型曲线积分来计算:

$$\int_L \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) dl.$$

一般情况下,设  $L: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, t \in [\alpha, \beta]$ ,  $\boldsymbol{\tau} = \varepsilon \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$  是指向指定方向的切向量,由第一型曲线积分的计算公式得

$$\int_L \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = \varepsilon \int_{\alpha}^{\beta} (Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)) dt.$$

在上式右端的定积分中,  $P, Q, R$  是  $t$  的复合函数,  $P = P(x(t), y(t), z(t)), Q = Q(x(t), y(t), z(t)), R = R(x(t), y(t), z(t)), \varepsilon = +1$  或  $-1$ , 它的符号是由  $L$  的指定方向确定的.

## 8.3.2 第二型曲线积分

### (一) 第二型曲线积分及其计算

记  $\boldsymbol{\tau} dl = d\mathbf{l}$ , 称为曲线的有向弧长元素, 它是个向量, 大小等于

$dl$ , 方向指向定向曲线  $L$  的切线方向. 设  $\tau = \cos\alpha i + \cos\beta j + \cos\gamma k$ , 并记

$$\cos\alpha dl = dx, \cos\beta dl = dy, \cos\gamma dl = dz,$$

易见,  $dx$  的符号与  $\cos\alpha$  的符号相同,  $dx$  的大小恰是  $dl$  在  $x$  轴上的投影长度, 同样  $dy$ 、 $dz$  的大小是  $dl$  在  $y$  轴和  $z$  轴上的投影长, 符号分别与  $\cos\beta$ 、 $\cos\gamma$  同号. 于是

$$dl = \tau dl = dx i + dy j + dz k$$

$$F \cdot \tau dl = P dx + Q dy + R dz$$

**定义** 设  $L$  是一条光滑的定向曲线,  $\tau$  是  $L$  上指向指定方向的单位切向量,  $F = P i + Q j + R k$  是在  $L$  上有定义的向量场, 规定

$$\int_L P dx + Q dy + R dz = \int_L F \cdot \tau dl,$$

并称表达式  $\int_L P dx + Q dy + R dz$  为第二型曲线积分.

由定义及向量场沿有向曲线积分的计算公式, 可得第二型曲线积分的计算公式. 设曲线  $L$  的方程是  $r = r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ , 指定方向的单位切向量是  $\tau = \cos\alpha i + \cos\beta j + \cos\gamma k = \varepsilon \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$ , 则

$$\begin{aligned} \int_L P dx + Q dy + R dz &= \int_L (P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma) dl \\ &= \varepsilon \int_L [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) \\ &\quad + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt. \end{aligned}$$

第二型曲线积分还有一些简单性质:

1° 对向量场的可加性: 设  $F = F_1$ ,  $F_1 = P_1 i + Q_1 j + R_1 k$ ,  $F_2 = P_2 i + Q_2 j + R_2 k$ , 则

$$\begin{aligned} &\int_L (P_1 + P_2) dx + (Q_1 + Q_2) dy + (R_1 + R_2) dz \\ &= \int_L P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz + \int_L P_2 dx + Q_2 dy + R_2 dz, \end{aligned}$$

特别的,  $F_1 = Pi, F_2 = Qj, F_3 = Rk, F = F_1 + F_2 + F_3$ , 则有

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_L Pdx + \int_L Qdy + \int_L Rdz.$$

2° 对筒分曲线的可加性: 若定向曲线  $L$  是由  $k$  条光滑的定向曲线  $L_1, L_2, \dots, L_k$  连接而成,  $L_i$  的终点与  $L_{i+1}$  的起点相垂合,  $i = 1, 2, \dots, k-1$ , 则等式

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \sum_{i=1}^k \int_{L_i} Pdx + Qdy + Rdz$$

作为向量场  $Pk + Qj + Rk$  在  $L$  上的第二型曲线积分的定义式; 当用  $k-1$  个点将定向曲线  $L$  分成  $k$  段  $L_1, L_2, \dots, L_k$  时, 以上等式就是第二型曲线积分对积分曲线的可加性.

3° 方向性: 用  $L^+$  和  $L^-$  表示曲线  $L$  的两个不同的定向, 则有

$$\int_{L^+} Pdx + Qdy + Rdz = - \int_{L^-} Pdx + Qdy + Rdz.$$

4° 若定向曲线  $L$  在垂直于  $x$  轴的平面内, 则  $\int_L Pdx = 0$ ; 若定向曲线  $L$  在垂直于  $y$  轴的平面内, 则  $\int_L Qdy = 0$ ; 若定向曲线  $L$  在垂直于  $z$  轴的平面内, 则  $\int_L Rdz = 0$ .

证 例如证第一部分, 设  $L$  在垂直于  $x$  轴的平面内, 这时必有  $\tau \perp i, \cos\alpha = 0$ , 故

$$\int_L Pdx = \int_L P \cos\alpha dl = 0.$$

对于不封闭的简单曲线, 常用  $L_{AB}$  表示起点为  $A$  终点为  $B$  的定向曲线.

$Oxy$  平面上的平面曲线及平面场可看成空间曲线和空间场的特例, 例如平面曲线  $y = f(x) (a \leq x \leq b)$ , 起点  $A(a, f(a))$ , 终点  $B(b, f(b))$ , 则

$$\begin{aligned} & \int_{L_{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\ &= \int_a^b [P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) f'(x)] dx. \end{aligned}$$

更特殊情况:  $P(x, y) = \varphi(x), Q(x, y) = 0$ , 则

$$\int_{L_{AB}} \varphi(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx, \int_{L_{BA}} \varphi(x) dx = \int_b^a \varphi(x) dx,$$

也就是说, 定积分可以看成是具有特殊形式的第二型曲线积分.

例 1 计算曲线积分  $\int_L xy dx + x^2 dy$ , 其中  $L$  是三角形  $OAB$  的有向周界(图 8.15).

解 因为

$$\begin{aligned} \int_L xy dx + x^2 dy &= \int_{L_1} xy dx + x^2 dy + \int_{L_2} xy dx + x^2 dy \\ &\quad + \int_{L_3} xy dx + x^2 dy, \end{aligned}$$

故可分别计算沿  $L_1, L_2$  与  $L_3$  上的三个曲线积分.

在  $L_1$  上  $y = 0, x$  从 0 变到 1, 所以

$$\int_{L_1} xy dx + x^2 dy = \int_0^1 x \cdot 0 dx + x^2 d(0) = 0;$$

在  $L_2$  上  $x = 1, y$  从 0 变到 2, 所以

$$\int_{L_2} xy dx + x^2 dy = \int_0^2 1 \cdot y d(1) + 1 \cdot dy = 2;$$

在  $L_3$  上  $y = 2x, x$  从 1 变到 0, 所以

$$\int_{L_3} xy dx + x^2 dy = \int_1^0 2x dx + x^2 d(2x) = -\frac{4}{3}.$$

从而算得

$$\int_L xy dx + x^2 dy = \frac{2}{3}.$$

例 2 设在力场  $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  的作用下, 质点由点  $A$  沿圆柱螺旋线  $L$ :

$$x = R \cos t, y = R \sin t, z = kt \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

运动到点  $B$ , 试求力场  $F$  对质点所作的功(图 8. 16).

解 显然点  $A$  和  $B$  对应的参数值分别是  $t = 0$  和  $t = 2\pi$ , 而在圆柱螺旋线上

$$dx = -R \sin t dt, dy = R \cos t dt, dz = k dt,$$

故力场  $F$  对质点作的功为

$$\begin{aligned} \int_{L_{AB}} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} dl &= \int_{L_{AB}} y dx - x dy + z dz \\ &= \int_0^{2\pi} (-R^2 + k^2 t) dt = 2\pi(\pi k^2 - R^2). \end{aligned}$$

顺例指出, 如果质点沿直线段由  $A$  运动到  $B$ , 由于在这线段上有  $dx = dy = 0$ , 所以力场对它作的功为

$$\int_{AB} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = \int_0^{2\pi k} z dz = 2\pi^2 k^2.$$

可见这个力场所作的功与质点从  $A$  运动到  $B$  所经过的路径有关.

例 3 设质量为  $m$  的质点在重力场的作用下沿任意路径  $L$  从点  $A$  运动到点  $B$ (图 8. 17), 求重力对该质点所作的功.

解 取地面为  $Oxy$  平面,  $z$  轴铅垂向上, 则质量为  $m$  的质点在任一点  $M$  处所受的重力为  $\mathbf{p} = -mg\mathbf{k}$ , 这里  $g$  是重力加速度. 故质点沿任意路径  $L$  从  $A$  到  $B$  时, 这力所作的功为

$$\begin{aligned} W &= \int_{L_{AB}} \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = \int_{L_{AB}} (-mg) dz \\ &= -mg \int_{z_A}^{z_B} dz = -mg(z_B - z_A), \end{aligned}$$

由此可知, 重力场  $\mathbf{p}$  所作的功与路径  $L$  无关, 仅决定于点  $A$  及点  $B$ . 如果把点  $B$  固定在地平面上, 那么质点  $m$  从点  $A$  沿任意路径落到地面时, 重力  $\mathbf{p}$  所作的功等于

$$W(A) = mgz_A.$$

这个功就称为质点  $m$  在点  $A$  处的位能.

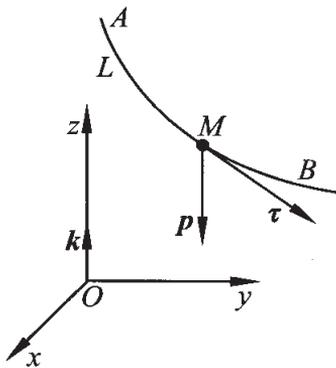


图 8.17

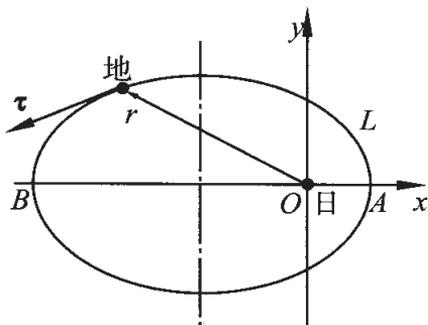


图 8.18

例 4 太阳对地球的引力为

$$\mathbf{F} = -k \frac{mM}{r^3} \mathbf{r},$$

其中  $m$  是地球质量,  $M$  是太阳质量,  $k$  是引力常数,  $\mathbf{r}$  是从太阳指向地球的位置向量, 试求地球从近日点  $A$  到远日点  $B$  运行半周时, 引力所作的功.

解 我们知道, 地球绕太阳运行的轨道是一个椭圆, 太阳位于这椭圆的一个焦点上(图 8.18). 把坐标原点置于太阳上, 这时地球的运动规律可表成  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ , 它也是轨道的参数方程. 因此当地球沿轨道  $L$  从近日点  $A$  到远日点  $B$  时, 引力场做功为

$$W = \int_{L_{AB}} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = \int_{L_{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -kmM \int_{L_{AB}} \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}.$$

但  $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = r dr$ , 所以

$$W = -kmM \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = kmM \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right).$$

其中  $r_A$  及  $r_B$  分别表示近日点  $A$  及远日点  $B$  到太阳的距离.

上述计算的结果表明, 引力场  $\mathbf{F}$  所作的功实际上只与路径的起点  $A$  及终点  $B$  有关, 而与连接  $A, B$  的路径无关.

### 8.3.3 环量与旋度的概念

在上面考察的功量中,特别重要的是场  $\mathbf{v}$  沿闭合曲线  $L$  的功量,记为

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dl,$$

并叫做场  $\mathbf{v}$  沿回路  $L$  的环量. 这种形式的积分同样依赖于回路  $L$  的环行方向,改变环行方向时环量的值就改变符号.

环量的重要性在于它和场  $\mathbf{v}$  的“旋转”性态有关,这可由流体的涡旋运动来说明.

设流体在点  $M$  附近绕过  $M$  的一条轴线  $\omega$  旋转并形成旋涡,它的速度场为  $\mathbf{v}$ . 现任取一条围绕点  $M$  的平面闭合曲线  $L$ ,使  $L$  的环行方向与平面的法向量  $\mathbf{n}$  组成右手螺旋系统(图 8.19). 若设想  $L$  是一个小叶轮的周界,轮轴的方向为法向量  $\mathbf{n}$ ,则在流体的推动下,这个小叶轮开始绕自身的轴旋转. 旋转的快慢除了取决于沿  $L$  的速度环量的大小外,还与轮盘的半径与轮轴的方向有关. 实验表明,当轮轴的方向与流体旋转轴线的方向一致时,叶轮的转动最快. 假定曲线  $L$  围成的平面区域  $S$  之面积为  $\Delta S$ ,于是可用比值

$$\frac{1}{\Delta S} \oint_L \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dl$$

来描写  $L$  内的流体围绕方向  $\mathbf{n}$  旋转的平均强度. 而当  $S$  无限收缩于  $M$  时,自然就把极限

$$\lim_{S \rightarrow M} \frac{1}{\Delta S} \oint_L \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dl$$

称为流体在点  $M$  处绕方向  $\mathbf{n}$  的涡量. 这个涡量刻画了位于  $M$  处的流点绕方向  $\mathbf{n}$  转动的强度. 显然当方向  $\mathbf{n}$  与这流点自身的旋转轴线  $\omega$  的方向一致时,涡量将达到最大值. 为了描述一般的向量场,可把平面曲线推广到任意曲面的边界,并引出如下重要的概念.

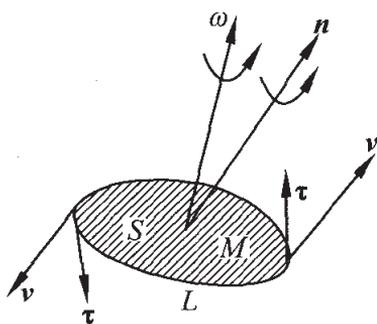


图 8.19

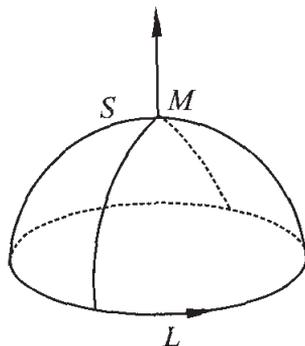


图 8.20

**定义** 设  $v(M)$  是定义在区域  $V$  上的向量场,  $M$  是  $V$  中一点,  $n$  是在点  $M$  处取定的单位向量. 在  $V$  内过  $M$  作任意光滑的且以  $n$  为法向量的曲面元  $S$ , 假定这面元的面积为  $\Delta S$ , 它的边界是逐段光滑的闭曲线  $L$ . 选取  $L$  的环行方向, 使与向量  $n$  组成右手螺旋系统(图 8.20). 如果当面元  $S$  无限收缩于点  $M$ , 而在  $M$  处的法向量  $n$  保持不变时, 平均环量

$$\frac{1}{\Delta S} \oint_L v \cdot \tau dl$$

的极限存在, 就称此极限为场  $v$  在点  $M$  处绕方向  $n$  的涡量, 记作  $\Omega_n(M)$ , 即

$$\Omega_n(M) = \lim_{S \rightarrow M} \frac{1}{\Delta S} \oint_L v \cdot \tau dl.$$

并且把这些涡量的最大值以及取到最大值的方向所构成的一个向量称为  $v$  在点  $M$  的旋度, 记作  $(\text{rot}v)_M$ .

因此, 如同数量场的梯度与方向微商的关系一样, 向量场的旋度与涡量也有类似的关系. 即旋度是一个向量, 它的模等于涡量的最大值, 其方向就是涡量取到最大值时所沿的方向. 同时, 涡量与环量还有密切的联系. 事实上由定义, 涡量  $\Omega_n(M)$  表示在点  $M$  处单位面积上的环量, 于是在点  $M$  附近面积为  $dS$  的环量应是  $\Omega_n(M)dS$ , 而在整个曲面  $S$  上的环量就是曲面积分

$$\iint_S \Omega_n(M) dS;$$

另一方面,如果  $S$  的边界是闭曲线  $L$ , 并取它的环行方向与  $S$  的法线方向构成右手螺旋系统, 则这环量又可以表示成曲线积分

$$\oint_L \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dl$$

因此就有

$$\oint_L \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = \iint_S \Omega_n(M) dS.$$

这就是著名的斯托克斯定理. 下面将在直角坐标系下给出它的数学证明, 并由此导出旋度的计算表达式.

#### 8.3.4 格林定理与斯托克斯定理

先来考虑斯托克斯定理的一个重要的特殊情形, 即格林定理. 它是平面区域上的二重积分与沿这区域边界的曲线积分之间的一个关系式.

**格林定理** 设  $D$  是由分段光滑曲线  $L$  所围成的平面区域; 函数  $P(x, y), Q(x, y)$  在  $D$  上有连续的一阶偏微商, 则有格林公式

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

其中  $L$  的环行方向应这样选取, 使沿此方向行进时, 区域  $D$  始终保持在它的左侧.

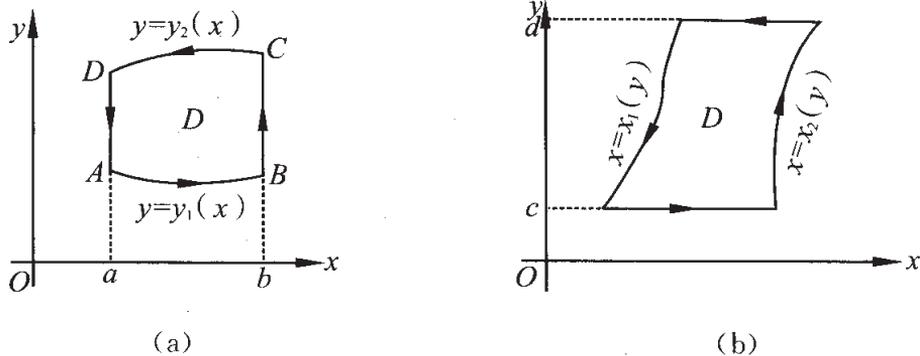


图 8.21

证 若区域  $D$  是由曲线  $y = y_1(x)$  与  $y = y_2(x)$  及直线  $x = a$  与  $x = b$  所围成(图 8. 21(a)), 这时由曲线积分与重积分的计算法则得

$$\begin{aligned}\oint_L P dx &= \int_a^b [P(x, y_1(x)) - P(x, y_2(x))] dx \\ &= - \int_a^b \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.\end{aligned}$$

现在设想在以上的论证过程中, 变量  $x, y$  的地位互换, 于是图 8. 21(a) 所示的区域  $D$  应换成图 8. 21(b) 所示的形状, 即  $D$  的边界是由曲线  $x = x_1(y)$  与  $x = x_2(y)$  及直线  $y = c$  与  $y = d$  所围成. 依照同样的推理可得

$$\oint_L Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy.$$

因此若区域  $D$  既满足图 8. 21(a) 又满足图 8. 21(b) 的条件, 则有

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

从而就在  $D$  是特殊的区域时证明了格林定理. 其实, 格林定理对于更为广泛的一类区域也成立. 事实上, 我们来考察这样的区域, 可以作辅助线段分它为有限个子区域, 使每个子区域满足上面所指出的条件, 即它们的边界既可表成图 8. 21(a) 的形式, 又可表成图 8. 21(b) 的形式. 为确定起见, 假设区域  $D$  可用辅助线段分成两个这样的子区域  $D_1$  与  $D_2$  (图 8. 22), 然后对每个子区域写下格林定理, 并把它们相加, 于是在和式的右边就得到在整个区域  $D$  上的重积分

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy;$$

而左边是取在区域  $D_1$  与  $D_2$  的正向边界上的两个曲线积分之和. 但是在这些积分中, 由于取在辅助线上的方向正好相反, 因而对应于它们的曲线积分就相互抵消, 而余下的积分之和显然就可以合成在  $D$  的正向边界  $L$  上所取的曲线积分. 这样又在区域是一般的

情形下证明了格林定理. 特别对于图 8.23 所示,  $D$  内有一个“洞”,

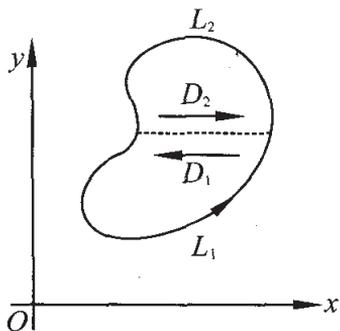


图 8.22

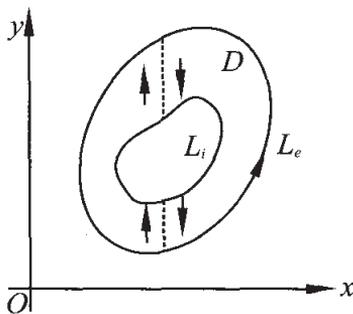


图 8.23

而边界由两个不相交的闭曲线  $L_e$  与  $L_i$  组成的区域, 格林定理依然成立, 只要边界  $L$  的环行方向这样选取, 使按此方向行进时, 区域  $D$  始终保持在它的左侧, 即对于  $D$  的外边界  $L_e$ , 正向就是反时针方向, 而对于内边界  $L_i$ , 正向是顺时针方向. 即

$$\oint_{L_e} P dx + Q dy + \oint_{L_i} P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

再来考察一般的斯托克斯定理. 如上所述, 这个定理是把具有定侧的曲面积分与沿曲面边界的曲线积分联系起来.

**斯托克斯定理** 设  $S$  是以曲线  $L$  为边界的分片光滑曲面, 如果函数  $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$  在包含曲面  $S$  在内的某个空间区域上具有连续的一阶偏微商, 则有

$$\begin{aligned} \oint_L P dx + Q dy + R dz &= \iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz \\ &+ \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \end{aligned}$$

其中  $L$  的环行方向这样选取, 当沿此方向行进时, 曲面上对应于正侧的法线立在它的左侧.

**证** 先设平行于  $z$  轴的直线与曲面  $S$  至多相交于一点, 这时  $S$  可表示为显式方程  $z = z(x, y)$ , 假定  $S$  在平面  $Oxy$  上的投影区域为  $D$ ,  $D$  的边界记作  $L_1$ . 若以

$x = x(t), y = y(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$   
 表示  $L_1$  的参数方程, 则曲线  $L$  的参数方程显然就是

$$\begin{aligned} x &= x(t), y = y(t), \\ z &= z(x(t), y(t)) \quad (\alpha \leq t \leq \beta). \end{aligned}$$

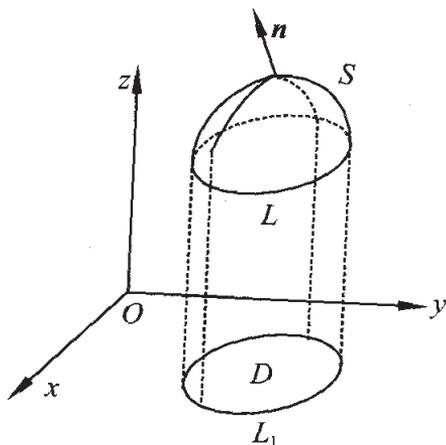


图 8.24

不失一般性, 这里可选取单位法向量  $n$  指向  $S$  的上侧, 且参数  $t$  的增加方向与  $L$  的环行方向一致(图 8.24). 于是由曲线积分的计算法则得

$$\begin{aligned} \oint_L P(x, y, z) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t), z(x(t), y(t))) x'(t) dt \\ &= \oint_{L_1} P(x, y, z(x, y)) dx. \end{aligned}$$

右边的平面曲线积分应用格林公式后再化成曲面积分有

$$\begin{aligned} \oint_{L_1} P(x, y, z(x, y)) dx &= - \iint_D \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, z(x, y)) dx dy \\ &= - \iint_S \left( \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} z'_y \right) dx dy. \end{aligned}$$

由于曲面  $S$  上侧的单位法向量  $n$  的方向余弦可以表示成

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}(-z_x', -z_y', 1).$$

从而求得

$$z_x' = -\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}, z_y' = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

又因

$$dx dy = \cos\gamma dS, dz dx = \cos\beta dS,$$

将这些表示式代入上述的曲面积分就给出

$$\begin{aligned} \oint_L P(x, y, z) dx &= - \iint_S \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} z_y' \right) \cos\gamma dS \\ &= - \iint_S \left( \frac{\partial P}{\partial y} \cos\gamma - \frac{\partial P}{\partial z} \cos\beta \right) dS \\ &= \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy. \end{aligned}$$

如果还假设曲面  $S$  也与平行于  $x$  轴及  $y$  轴的直线相交不多于一点, 则根据同样的推理又得到

$$\begin{aligned} \oint_L Q(x, y, z) dy &= \iint_S \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz; \\ \oint_L R(x, y, z) dz &= \iint_S \frac{\partial R}{\partial y} dx dy - \frac{\partial R}{\partial x} dy dz. \end{aligned}$$

将这三式相加, 就在  $S$  是特殊的曲面下证明了斯托克斯定理.

对于一般的分片光滑曲面, 若可以引辅助曲线把它分成有限个子曲面, 使每个子曲面满足上述的条件, 即任何平行于坐标轴的直线与它相交不多于一点, 则对这些曲面及其边界分别写下斯托克斯定理, 相加以后由于在辅助曲线上的积分相互消去即可得到整个曲面及其边界  $L$  上的斯托克斯定理.

**附注** 在上面两个定理的证明过程中, 对平面区域或空间曲面作了某些假定. 因为确有不少的平面区域或空间曲面, 虽满足定理的条件和结论, 但并不满足这些假定, 所以上面所给出的证明是不完全的. 必须指出, 在更一般的情况下数学上可以给出这两个定

理的证明. 由于篇幅关系, 这里从略. 前面高斯定理的证明也有类似的问题.

斯托克斯定理中的公式又称斯托克斯公式. 当曲面  $S$  是平面  $Oxy$  上的一个区域  $D$  时, 不难看出, 它就化成了格林公式.

例 1  $1^\circ$  利用格林公式计算曲线积分

$$\oint_L (x+y)dx + (y-x)dy,$$

其中积分是沿椭圆周  $L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的逆时针方向.

解 因为

$$P = x + y, Q = y - x,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2,$$

且  $L$  所围成的区域  $D$  是椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ , 所以

$$\oint_L (x+y)dx + (y-x)dy = -2 \iint_D dx dy = -2\pi ab.$$

$2^\circ$  计算  $\int_L (x^2 - y)dx - (x + \sin^2 y)dy$ , 其中  $L$  是上半圆周  $y = \sqrt{2x - x^2}$ , 从点  $O(0,0)$  到点  $A(1,1)$  的一段圆弧.

解 因无法直接计算, 故应用格林公式, 为此补充直线段  $\overline{OA}$ , 使  $\Gamma = L + \overline{OA}$  构成闭曲线, 且围成的平面区域为  $D$ , 故有

$$\oint_{\Gamma} (x^2 - y)dx - (x + \sin^2 y)dy = - \iint_D [-1 - (-1)] dx dy = 0.$$

由于  $\overline{OA}$  为  $y = x, 0 \leq x \leq 1$ , 因此, 有

$$\begin{aligned} & \int_L (x^2 - y)dx - (x + \sin^2 y)dy \\ &= \int_{\overline{OA}} (x^2 - y)dx - (x + \sin^2 y)dy \\ &= \int_0^1 (x^2 - x - x^2 - \sin^2 x)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} - 1 - \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \cos 2x) dx \\
&= \frac{1}{4} \sin 2 - \frac{7}{6};
\end{aligned}$$

3° 应用格林公式证明第七章中的引理.

不失一般性,总可设  $D \subset R^2$  是有界单连通即无洞的区域,其边界  $L$  为逐段光滑的,且  $x, y$  关于  $u, v$  有连续的一阶与二阶混合偏导数. 若不然,可将  $D$  进行分割使假设成立. 这时由 Green 公式知,区域  $D$  的面积为  $\mu(D) = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx$ . 其中曲线积分沿  $L$  的正向,即反时针方向. 在变换式  $\varphi: x = x(u, v), y = y(u, v)$  下,  $D$  一对一地变到  $D'$ , 且  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$ . 这时  $D$  的边界  $L$  变为  $D'$  的边界

$L'$ . 由于  $dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv$ , 故有

$$\begin{aligned}
\mu(D) &= \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx \\
&= \frac{1}{2} \oint_{L'} x(u, v) \left( \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) - y(u, v) \left( \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \\
&= \frac{1}{2} \oint_{L'} \left[ x(u, v) \frac{\partial y}{\partial u} - y(u, v) \frac{\partial x}{\partial u} \right] du \\
&\quad + \left[ x(u, v) \frac{\partial y}{\partial v} - y(u, v) \frac{\partial x}{\partial v} \right] dv.
\end{aligned}$$

在  $o'uv$  平面上关于  $D'$  应用 Green 公式,并由假设得到

$$\begin{aligned}
\mu(D) &= \frac{1}{2} \iint_{D'} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[ x(u, v) \frac{\partial y}{\partial v} - y(u, v) \frac{\partial x}{\partial v} \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial v} \left[ x(u, v) \frac{\partial y}{\partial u} - y(u, v) \frac{\partial x}{\partial u} \right] \right\} dudv \\
&= \iint_{D'} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv.
\end{aligned}$$

例 2 求向量场  $\mathbf{v} = y^2 \mathbf{i} + z^2 \mathbf{j} + x^2 \mathbf{k}$  沿回路  $L$  的环量,其中  $L$

是顶点为  $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$  的三角形周界  $ABCA$  (图 8.25).

解一  $L$  所围成的曲面  $S$  是三角形区域

$$x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$$

故其上侧的单位法向量为  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ . 因为

$$P = y^2, Q = z^2, R = x^2;$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = -2z, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = -2x, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2y,$$

由斯托克斯公式即可算得

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dl &= \oint_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz \\ &= -2 \iint_S z dy dz + x dz dx + y dx dy \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_S (x + y + z) dS = -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_S dS = -1. \end{aligned}$$

解二  $L$  所围成的曲面  $S$  是三角形区域

$$x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$$

其参数方程为

$$x = x, y = y, z = 1 - x - y, \Delta: x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1,$$

于是,  $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y$  与指定侧的  $\mathbf{n}$  一致, 且  $\frac{\partial(y, z)}{\partial(x, y)} = 1, \frac{\partial(z, x)}{\partial(x, y)} = 1,$

$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} = 1$ . 故得

$$\begin{aligned} \oint_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz &= \iint_{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix} dx dy \\ &= -2 \iint_{\Delta} dx dy = -1 \end{aligned}$$

解三 可将  $L$  上张成的曲面看作分片光滑的曲面  $S_1 + S_2 + S_3$  所围成, 其中  $S_1: z = 0, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1, S_2: y = 0, x \geq 0, z \geq 0, z + x \leq 1, S_3: x = 0, y \geq 0, z \geq 0, y + z \leq 1$ , 并由坐标轮换对称性, 有

$$\begin{aligned} \oint_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz &= \iint_{S_1+S_2+S_3} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix} \\ &= 3 \iint_{\substack{S_1 \\ z=0 \\ dz=0}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & 0 & x^2 \end{vmatrix} \\ &= -3 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} 2y dy \\ &= (1-x)^3 \Big|_0^1 = -1. \end{aligned}$$

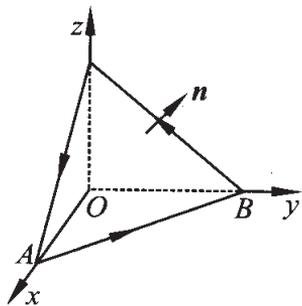


图 8.25

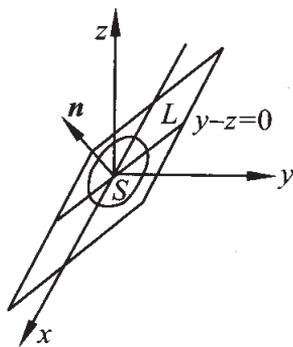


图 8.26

### 例 3 计算曲线积分

$$\oint_L xyz dz,$$

其中  $L$  是圆周  $x = \cos t, y = \frac{\sin t}{\sqrt{2}}, z = \frac{\sin t}{\sqrt{2}}$ , 并验证斯托克斯公式.

解 应用曲线积分的计算法则直接算得

$$\begin{aligned}\oint_L xyz dz &= \int_0^{2\pi} \cos t \cdot \frac{\sin^2 t}{2} \cdot \frac{\cos t}{\sqrt{2}} dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

另一方面,由斯托克斯公式应有

$$\oint_L xyz dz = \iint_S xz dydz - \iint_S yz dzdx,$$

其中  $S$  取为圆周  $L$  所围成的平面区域(图 8.26),它所在的平面方程是  $y-z=0$ . 由于此平面与坐标平面  $Oyz$  正交,故  $S$  在平面  $Oyz$  上的投影为一线段,所以曲面积分  $\iint_S xz dydz$  为零. 再将圆周  $L$  的方程写成

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ y - z = 0 \end{cases},$$

容易看出,它在平面  $Ozx$  上的投影是椭圆周  $x^2 + 2z^2 = 1$ . 而  $S$  的投影区域  $D$  就是这个椭圆周的内部. 因为在  $S$  上  $y = z$ ,且其上侧的法向量  $\boldsymbol{n}$  与  $y$  轴的正向交成钝角,投影面积元  $dzdx$  为负,故也算得

$$\begin{aligned}\iint_S xz dydz - \iint_S yz dzdx &= \iint_S z^2 dzdx \\ &= 4 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} z^2 dz \int_0^{\sqrt{1-2z^2}} dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}} = \oint_L xyz dz.\end{aligned}$$

这就验证了斯托克斯公式对所给曲线积分的正确性.

### 8.3.5 旋度的计算

如同数量场的梯度一样,向量场  $\boldsymbol{v}$  的旋度也是一个与坐标系无关的向量. 但为了便于计算,选取直角坐标系  $Oxyz$ ,并把场  $\boldsymbol{v}$  分解成

$$\mathbf{v} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}.$$

这时若令

$$\boldsymbol{\Omega} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k},$$

则由斯托克斯公式可得

$$\oint_L \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = \iint_S \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} dS.$$

因为  $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}$  在曲面  $S$  上连续, 所以必有

$$\iint_S \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} dS = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n})_M \Delta S,$$

其中  $M'$  是曲面  $S$  中的一点,  $\Delta S$  是  $S$  的面积. 因此当曲面无限收缩于定点  $M$  时,  $M'$  也趋向于  $M$ , 从而就有

$$\lim_{S \rightarrow M} \frac{1}{\Delta S} \oint_L \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n})_M$$

根据定义, 这个极限就是场在点  $M$  绕方向  $\mathbf{n}$  的涡量  $\boldsymbol{\Omega}_n(M)$ , 故得

$$\boldsymbol{\Omega}_n(M) = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n})_M,$$

就是涡量等于向量  $\boldsymbol{\Omega}$  在法方向  $\mathbf{n}$  上的投影. 由此可见, 当  $\mathbf{n}$  的方向与  $\boldsymbol{\Omega}$  一致时, 涡量  $\boldsymbol{\Omega}_n(M)$  必达到最大值, 并等于  $|\boldsymbol{\Omega}|$ . 所以向量  $\boldsymbol{\Omega}$  就是场  $\mathbf{v}$  在  $M$  的旋度, 即  $\boldsymbol{\Omega} = \text{rot} \mathbf{v}$ . 这样就得到旋度在直角坐标下的表达式

$$\text{rot} \mathbf{v} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

为了便于记忆, 可把它写成行列式的形式

$$\text{rot} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

将这个行列式按第一行展开即得旋度的表达式.

利用旋度, 场  $\mathbf{v}$  在点  $M$  绕方向  $\mathbf{n}$  的涡量可写成

$$\boldsymbol{\Omega}_n(M) = (\text{rot} \mathbf{v})_M \cdot \mathbf{n},$$

即涡量  $\Omega_n(M)$  等于旋度  $(\text{rot} \mathbf{v})_M$  在方向  $\mathbf{n}$  的投影. 而斯托克斯公式又可写成向量形式

$$\oint_L \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = \iint_S \text{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS.$$

它反映了向量场在曲面  $S$  的边界  $L$  上的环量与  $S$  中旋度分布的关系.

由旋度表达式可以证明它具有如下的运算法则. 若  $u$  是可微数量场,  $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1$  和  $\mathbf{v}_2$  为可微向量场,  $c_1$  和  $c_2$  是任意常数, 则有

$$1^\circ \quad \text{rot}(c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2) = c_1 \text{rot} \mathbf{v}_1 + c_2 \text{rot} \mathbf{v}_2.$$

$$2^\circ \quad \text{rot}(u\mathbf{v}) = u \text{rot} \mathbf{v} + \text{grad} u \times \mathbf{v}.$$

以  $2^\circ$  为例. 设

$$u = u(x, y, z), \mathbf{v} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

则有

$$\begin{aligned} \text{rot}(u\mathbf{v}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ uP & uQ & uR \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial(uR)}{\partial y} - \frac{\partial(uQ)}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial(uP)}{\partial z} - \frac{\partial(uR)}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \\ &\quad \left( \frac{\partial(uQ)}{\partial x} - \frac{\partial(uP)}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

它在  $x$  轴上的分量是

$$\begin{aligned} \text{rot}_x(u\mathbf{v}) &= \frac{\partial(uR)}{\partial y} - \frac{\partial(uQ)}{\partial z} = u \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} R - \frac{\partial u}{\partial z} Q \\ &= u \text{rot}_x \mathbf{v} + (\text{grad} u \times \mathbf{v})_x; \end{aligned}$$

同理可得

$$\text{rot}_y(u\mathbf{v}) = u \text{rot}_y \mathbf{v} + (\text{grad} u \times \mathbf{v})_y;$$

$$\text{rot}_z(u\mathbf{v}) = u \text{rot}_z \mathbf{v} + (\text{grad} u \times \mathbf{v})_z,$$

因此证得

$$\text{rot}(u\mathbf{v}) = u \text{rot} \mathbf{v} + \text{grad} u \times \mathbf{v}.$$

例 1 设  $\mathbf{r} = xi + yj + zk$ , 求  $\text{rot}\mathbf{r}$ .

解

$$\text{rot}\mathbf{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0.$$

例 2 求电场强度  $\mathbf{E} = \frac{q}{r^3}\mathbf{r}$  的旋度.

解 利用旋度的运算法则与例 1 即得

$$\text{rot}\mathbf{E} = \text{rot}\left(\frac{q}{r^3}\mathbf{r}\right) = \frac{q}{r^3}\text{rot}\mathbf{r} + \text{grad}\frac{q}{r^3} \times \mathbf{r} = -\frac{3q}{r^4}\frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{r} = 0.$$

这就是说,除电荷所在的点外,电场强度  $\mathbf{E}$  在整个空间中是处处无旋的.

### 复习思考题

1. 何谓第二型曲线积分,它有什么力学意义?它与第一型曲线积分有何区别和联系?
2. 写出第二型曲线积分的计算公式.
3. 何谓环量?何谓涡量?它们描述向量场的什么性质?
4. 叙述旋度的概念,它与环量和涡量具有什么密切关系?
5. 写出格林公式与斯托克斯公式,用这两公式时应注意什么条件?
6. 写出直角坐标下旋度的计算表达式.
7. 旋度有些什么基本运算法则?

### 习题 8.3

1. 求曲线积分  $I = \int_L (x^2 + 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$ ,  $L$  是一段抛物线:  $y = x^2 (-1 \leq x \leq 1)$  沿  $x$  增加方向.
2. 设一质点处于弹性力场中,弹力方向指向原点,大小与质

点离原点的距离成正比,比例系数为  $k$ ,若质点沿椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  从点  $(a, 0)$  移到点  $(0, b)$ ,求弹性力所做的功.

3. 计算曲线积分  $I = \oint_L x dy$ ,  $L$  是由直线  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$  和坐标轴所构成的三角形回路,沿反时针方向.

4. 计算曲线积分  $\int_L (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$ ,  $L$  是曲线  $y = 1 - |1 - x|$  从点  $(0, 0)$  到点  $(2, 0)$ .

5. 求曲线积分  $\int_L \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$ , 其中  $L$  是沿正方形  $A(1, 0)$ ,  $B(0, 1)$ ,  $C(-1, 0)$ ,  $D(0, -1)$  逆时针一周的路径.

6. 求向量场  $\mathbf{v} = (y^2 - z^2)\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$  沿曲线  $L: x = t, y = t^2, z = t^3 (0 \leq t \leq 1)$  参数增加方向的曲线积分.

7. 求向量场  $\mathbf{v} = (y + z)\mathbf{i} + (z + x)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$  沿曲线  $L: x = a \sin^2 t, y = 2a \sin t \cos t, z = a \cos^2 t (0 \leq t \leq \pi)$  参数增加方向的曲线积分.

8. 计算曲线积分  $\int_L y^2 dx + xy dy + xz dz$ , 其中  $L$  是从  $O(0, 0, 0)$  到  $A(1, 0, 0)$  再到  $B(1, 1, 0)$  最后到  $C(1, 1, 1)$  的折线段.

9. 计算曲线积分  $\int_{L_{AB}} e^{x+y+z} dx + e^{x+y+z} dy + e^{x+y+z} dz$ , 其中  $L_{AB}: x = \cos \varphi, y = \sin \varphi, z = \frac{\varphi}{\pi}$  从点  $A(1, 0, 0)$  到点  $B(0, 1, \frac{1}{2})$ .

10. 求曲线积分  $\int_C y dx + z dy + x dz$  之值, 其中  $C: (1)$  是  $x + y = 2$  与  $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$  的交线, 从原点看去是顺时针方向;  $(2)$  是  $z = xy$  与  $x^2 + y^2 = 1$  的交线, 在  $z$  轴上方来看是逆时针方向.

11. 利用 Green 公式, 计算下列曲线积分:

(1)  $\oint_L (x + y)^2 dx + (x^2 - y^2) dy$ ,  $L$  是顶点为  $A(1, 1), B(3,$

3,) ,  $C(3,5)$  的三角形的周界,沿反时针方向;

$$(2) \oint_L (xy + z + y)dx + (xy + x - y)dy, L \text{ 是椭圆 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} =$$

1 沿顺时针方向;

$$(3) \oint_L xy^2 dy - x^2 y dx, L \text{ 是 } x^2 + y^2 = R^2 \text{ 沿反时针方向};$$

$$(4) \oint_L (yx^3 + e^y)dx + (xy^3 + xe^y - 2y)dy, L \text{ 是对称于两坐标$$

轴的闭曲线;

$$(5) \oint_L \sqrt{x^2 + y^2} dx + y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})]dy, L \text{ 是 } y^2 = x - 1 \text{ 与 } x = 2 \text{ 围成的封闭曲线沿逆时针方向};$$

$$(6) \int_{AMB} (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy + y^2)dy, L \text{ 是从点 } A(0, -1) \text{ 沿直线 } y = x - 1 \text{ 到点 } M(1, 0), \text{ 再从 } M \text{ 沿圆周 } x^2 + y^2 = 1 \text{ 到点 } B(0, 1).$$

$$(7) \int_{AMO} (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy, \text{ 其中 } AMO \text{ 为由点 } A(a, 0) \text{ 至点 } O(0, 0) \text{ 的上半圆周 } x^2 + y^2 = ax;$$

$$(8) \int_{L_{AB}} [f(y)e^x - my]dx + [f'(y)e^x - m]dy, \text{ 其中 } f(y) \text{ 有连续的一阶偏微商, } L_{AB} \text{ 是连接点 } A(0, y_1), B(0, y_2) \text{ 的任何路径, 且 } L_{AB} \text{ 与直线段 } AB \text{ 所围成区域的面积为定值 } S.$$

12. 利用 Stokes 公式, 计算下列曲线积分:

$$(1) \oint_L ydx + zdy + xdz, L \text{ 是顶点为 } A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1) \text{ 的三角形边界, 从原点看去, } L \text{ 沿顺时针方向};$$

$$(2) \oint_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz, L \text{ 是球面 } x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \text{ 与平面 } x + y + z = a \text{ 的交线, 从原点看去, } L \text{ 沿反时针方向};$$

$$(3) \oint_L (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz, L \text{ 是圆柱面 } x^2 +$$

$y^2 = a^2$  和平面  $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1 (a > 0, h > 0)$  的交线, 从  $x$  轴的正方向看来,  $L$  沿反时针方向;

(4)  $\oint_L (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$ ,  $L$  是平面  $x + y + z = \frac{3}{2}a$  与立方体  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$  表面的交线, 从  $x$  轴正向看来,  $L$  沿反时针方向;

(5)  $\oint_L y^2 dx + xy dy + xz dz$ ,  $L$  是圆柱面  $x^2 + y^2 = 2y$  与平面  $y = z$  的交线;

(6)  $\oint_L (y^2 - y)dx + (z^2 - z)dy + (x^2 - x)dz$ ,  $L$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  与平面  $x + y + z = 0$  的交线,  $L$  的方向与  $z$  轴正向成右手系.

13. 在积分  $\oint_L x^2 y^3 dx + dy + z dz$  中, 路径  $L$  是  $Oxy$  平面上正向的圆  $x^2 + y^2 = R^2, z = 0$ ; 利用 Stokes 公式化曲线积分为以  $L$  为边界所围区域  $S$  上的曲面积分, (1)  $S$  取  $Oxy$  平面上的圆面  $x^2 + y^2 \leq R^2$ ; (2)  $S$  取半球面  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ; 结果相同吗?

14. 求下列向量场的旋度:

(1)  $\mathbf{v} = y^2 \mathbf{i} + z^2 \mathbf{j} + x^2 \mathbf{k}$ ;

(2)  $\mathbf{v} = xyz(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ ;

(3)  $\mathbf{A} = (\sin y + z)\mathbf{i} + (x \cos y + z)\mathbf{j}$ ;

(4)  $\mathbf{E} = (xe^y + y)\mathbf{i} + (z + e^y)\mathbf{j} + (y + 2ze^y)\mathbf{k}$ .

15. 求向量场  $\mathbf{v} = y^2 \mathbf{i} + z^2 \mathbf{j} + x^2 \mathbf{k}$  在点  $(1, 1, 1)$  处的最大涡量及绕方向  $(1, 1, 0)$  的涡量.

16. 求向量场  $\mathbf{v} = xyz(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$  在点  $(0, 1, 1)$  的最大涡量值及绕方向  $\mathbf{n} = (1, 0, 1)$  的涡量值.

17. 求向量场  $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$  在点  $(1, 1, 1)$  处的涡量的

最大值和最小值.

18. 设  $\omega$  是常向量,  $r = xi + yj + zk$ ,  $r = |r|$ , 求:

(1)  $\text{rot}(\omega \times r)$ ;                      (2)  $\text{rot}[f(r)r]$ ;

(3)  $\text{rot}[f(r)\omega]$ ;                      (4)  $\text{div}[r \times f(r)\omega]$ ;

其中  $f(r)$  是  $r$  的任意可微函数.

19. 证明常向量场  $c$  沿任意光滑闭曲线的环量都等于 0.

20. 求向量场  $v = (y - z)i + (z - x)j + (x - y)k$  沿曲线  $L$  的环量.  $L$  是圆柱面  $x^2 + y^2 = a^2$  与平面  $y + z = 0$  的交线, 从  $z$  轴正向看来,  $L$  沿反时针方向.

21. 求向量场  $(a \cdot r)b$  沿曲线  $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$  的环量,

从  $z$  轴正向看来,  $L$  沿反时针方向. 其中  $a, b$  均为常向量, 并且  $a \times b = (1, 1, 1)$ .

22. 不变电流  $I$  通过无穷长的直导线(作  $Oz$  轴)所产生的磁场为  $B = \frac{2I}{x^2 + y^2}(-yj + xj)(x^2 + y^2 \neq 0)$ , 试讨论  $B$  沿  $Oxy$  平面上任意光滑闭曲线的环量  $\Gamma$ .

23. 利用曲线积分计算下列区域的面积:

(1) 星形线  $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t (0 \leq t \leq 2\pi)$  围成的区域;

(2) 旋轮线  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (0 \leq t \leq 2\pi)$  与  $Ox$  轴所围成的区域.

24. 求向量场  $v = (y^2 + z^2)i + (z^2 + x^2)j + (x^2 + y^2)k$  沿曲线  $L$  的环量. (1)  $L$  为  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (z \geq 0)$  与  $x^2 + y^2 = Rx$  的交线, 从  $Ox$  轴正向看来,  $L$  沿反时针方向; (2)  $L$  为  $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx (z \geq 0)$  与  $x^2 + y^2 = 2rx (r < R)$  的交线, 从  $Oz$  轴正向看来,  $L$  沿反时针方向.

## 8.4 保守场和无源场

为方便, 我们用  $C^k(V)$  ( $k$  是自然数) 来表示在空间区域  $V$  内

具有直到  $k$  阶连续偏导函数的三元函数的全体, 用  $C^0(V)$  表示空间区域  $V$  内连续函数的全体. 例如

$$C^1(V) = \{u \mid u = u(x, y, z), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \text{ 和 } \frac{\partial u}{\partial z} \text{ 都在 } V \text{ 内连续}\},$$

而  $P \in C^1(V)$  是指  $P$  在  $V$  内具有连续的偏导函数  $\frac{\partial P}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y}$  和  $\frac{\partial P}{\partial z}$ .

当  $u \in C^k(V)$  时, 由于  $u$  的直到  $k$  阶的偏导数都连续, 故  $u$  是  $k$  次可微的, 并且  $u$  的不超过  $k$  阶的混合偏导数总是可以交换求偏导的次序. 我们常把  $u \in C^k(V)$  简单地说成  $u$  是  $V$  内的  $k$  次连续可微函数.

设  $v = Pi + Qj + Rk$ , 且  $P, Q$  和  $R$  都属于  $C^k(V)$ , 则称  $v$  是空间区域  $V$  内的一个  $C^k$  向量场. 在本节里, 我们总是假定所遇到的向量场具有一定的连续可微性, 使得所出现的偏导函数都是连续的, 从而所出现的混合偏导数都可以任意交换求导的次序.

#### 8.4.1 保守场和势函数

##### (一) 势函数

**定义 1** 设  $v$  是在区域  $V$  内有定义的向量场, 如果存在  $V$  内的数量场  $\varphi$ , 使得在  $V$  内处处有  $v = \text{grad}\varphi$  成立, 则称  $v$  是  $V$  内的有势场, 并称  $\varphi$  为向量场  $v$  在  $V$  内的一个势函数.

记  $v = Pi + Qj + Rk$ , 那么  $v = \text{grad}\varphi$  就是如下等式:

$$Pi + Qj + Rk = \frac{\partial \varphi}{\partial x}i + \frac{\partial \varphi}{\partial y}j + \frac{\partial \varphi}{\partial z}k,$$

由此可得:

**定理 1** 设  $v = Pi + Qj + Rk$  是区域  $V$  内的连续向量场, 则以下三个命题等价:

- (i)  $\varphi(x, y, z)$  是连续向量场  $v = Pi + Qj + Rk$  的势函数.
- (ii) 存在  $\varphi \in C^1(V)$ , 使得在  $V$  内处处有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q, \frac{\partial \varphi}{\partial z} = R;$$

(iii) 存在  $\varphi \in C^1(V)$ , 使得在  $V$  内处处有

$$d\varphi = Pdx + Qdy + Rdz. \quad (1)$$

例 1 设  $\mathbf{v} = yz\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ , 试求出  $\mathbf{v}$  的一个势函数.

解 因为

$$yzdx + zxdy + xydz = d(xyz),$$

所以  $\varphi = xyz$  就是  $\mathbf{v}$  的一个势函数.

例 1 中求势函数的方法称为凑全微分方法.

势函数不是唯一的. 设  $\varphi$  是  $\mathbf{v}$  的一个势函数,  $c$  是任意常数, 因为  $\text{grad}\varphi + \text{grad}c = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ , 所以  $\varphi + c$  也是  $\mathbf{v}$  的一个势函数. 反过来, 若  $\varphi$  和  $\psi$  都是  $\mathbf{v}$  的势函数, 则

$$\text{grad}(\psi - \varphi) = \text{grad}\psi - \text{grad}\varphi = \mathbf{v} - \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

从而  $\frac{\partial}{\partial x}(\psi - \varphi) = \frac{\partial}{\partial y}(\psi - \varphi) = \frac{\partial}{\partial z}(\psi - \varphi) = 0$ , 可得

$$\psi - \varphi = C.$$

综上所述, 有势场  $\mathbf{v}$  的全体势函数可以表示成  $\varphi + c$  的形式, 其中  $\varphi$  是  $\mathbf{v}$  的某一个势函数,  $c$  是任意常数.

最后我们指出, 若定理 1 的 (iii) 成立, 我们称微分式  $Pdx + Qdy + Rdz$  是区域  $V$  内的一个全微分或恰当微分式. 定理 1 告诉我们, 向量场  $\mathbf{v} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$  是区域  $V$  内的有势场当且仅当微分式  $Pdx + Qdy + Rdz$  是区域  $V$  内的一个恰当微分式.

## (二) 全微分式的积分

定理 2 设  $Pdx + Qdy + Rdz$  是区域  $V$  内的一个全微分, (1) 式成立, 又设  $L_{AB}$  是  $V$  内的一条逐段光滑曲线, 起点为  $A$ , 终点为  $B$ , 则

$$\int_{L_{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = \varphi(B) - \varphi(A).$$

证 设  $L_{AB}$  的参数方程为

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha, \beta],$$

并设  $A(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)), B(x(\beta), y(\beta), z(\beta))$ , 由 (1)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi(x(t), y(t), z(t)) &= P(x(t), y(t), z(t))x'(t) \\ &\quad + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) \\ &\quad + R(x(t), y(t), z(t))z'(t), \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} &\int_{L_{AB}} Pdx + Qdy + Rdz \\ &= \int_a^\beta [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) \\ &\quad + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)]dt \\ &= \int_a^\beta \frac{d}{dt}\varphi(x(t), y(t), z(t))dt \\ &= \varphi(x(\beta), y(\beta), z(\beta)) - \varphi(x(a), y(a), z(a)) \\ &= \varphi(B) - \varphi(A). \end{aligned}$$

定理 2 的结果表明,全微分的积分,其积分值由曲线的起点和终点的位置所确定,而与路径(即连接起点  $A$  和终点  $B$  的逐段光滑曲线)的选取无关.当积分与路径无关时,可把积分  $\int_{L_{AB}} Pdx + Qdy$

$+ Rdz$  写成  $\int_A^B Pdx + Qdy + Rdz$ .

### (三) 保守场

**定义 2** 设  $\nu$  是区域  $V$  内的连续向量场.若  $\nu$  沿  $V$  内任意闭路的环量都等于零,则称  $\nu$  是区域  $V$  内的保守场.

定义 2 中“闭路”指的是逐段光滑的简单闭曲线,今后凡提及闭路都指这个意思.由定义 2 可得:

**定理 3** 设  $\nu$  是区域  $V$  内的连续向量场.则  $\nu$  是  $V$  内的保守场的

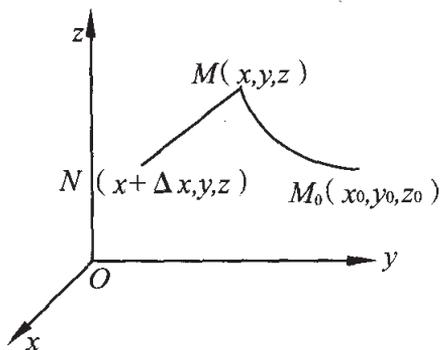


图 8.27

充要条件是,  $\nu$  是  $V$  内的曲线积分与路径无关.

定理 2 已给出了曲线积分与路径无关的一个条件, 其实它也是必要条件.

**定理 4** 设连续的向量场  $\nu = Pi + Qj + Rk$  是区域  $V$  内的保守场, 则存在  $\varphi \in C^1(V)$  使得在  $V$  内处处有

$$Pdx + Qdy + Rdz = d\varphi.$$

**证** 在  $V$  内取定一点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , 用  $M(x, y, z)$  表示  $V$  内的任意一点. 因  $V$  是区域, 故存在全含在  $V$  内的折线将  $M_0$  与  $M$  连接起来. 由定理的条件, 根据定理 3,  $\nu$  在  $V$  内的曲线积分与路径无关. 可令

$$\varphi(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} Pdx + Qdy + Rdz,$$

则  $\varphi(x, y, z)$  在  $V$  内有定义. 因  $V$  是区域,  $M \in V$ , 故  $M$  是  $V$  的内点, 从而存在  $\delta > 0$ , 使得  $M$  的邻域  $\delta$  全落在  $V$  内. 记点  $N(x + \Delta x, y, z)$ , 当  $\Delta x < \delta$  时, 线段  $MN$  全落在  $M$  的  $\delta$  邻域内, 从而全落在  $V$  内. 用  $\overrightarrow{MN}$  表示以  $M$  为起点、 $N$  为终点的有向直线段(图 8.27), 在  $\overrightarrow{MN}$  上显然有  $dy = dz = 0$ , 因此

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} [\varphi(x + \Delta x, y, z) - \varphi(x, y, z)] &= \frac{1}{\Delta x} [\varphi(N) - \varphi(M)] \\ &= \frac{1}{\Delta x} \int_{\overrightarrow{MN}} Pdx + Qdy + Rdz \\ &= \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} P(x, y, z) dx \\ &= P(\xi, y, z), \end{aligned}$$

其中  $\xi$  在  $x$  与  $x + \Delta x$  之间. 由此可得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(N) - \varphi(M)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(\xi, y, z) = P(x, y, z).$$

同理可证

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q(x, y, z), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = R(x, y, z).$$

由  $P, Q$  和  $R$  的连续性可知  $\varphi$  是可微的, 且

$$d\varphi = Pdx + Qdy + Rdz.$$

#### (四) 无旋场

**定义 3** 区域  $V$  内旋度处处为零的向量场称为区域  $V$  内的无旋场.

**定理 5** 设  $\mathbf{v}$  是区域  $V$  内的  $C^1$  向量场. 若  $\mathbf{v}$  是区域  $V$  内的有势场, 则  $\mathbf{v}$  是区域  $V$  内的无旋场.

**证** 因  $\mathbf{v}$  是有势场, 故存在  $\varphi$ , 使得  $\mathbf{v} = \text{grad}\varphi$ , 在直角坐标系下容易验证:  $\text{rot}(\text{grad}\varphi) = \mathbf{0}$ , 由此得  $\text{rot}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

一般情况下, 定理 5 的逆未必成立; 为使它成立, 要对区域加上一定的条件. 先看一个例子:

**例 2** 设  $\mathbf{v} = \frac{1}{x^2 + y^2}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$ , 试证  $\mathbf{v}$  是其定义域  $V$  内的无旋场, 但不是有势场.

**证** 由直接计算可得

$$\text{rot}\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0},$$

故  $\mathbf{v}$  是无旋场. 今选取一闭路  $L$ , 它是  $Oxy$  平面上以原点为心的单位圆周, 逆时针方向, 则有

$$\begin{aligned} & \int_L \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-\sin\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} (-\sin\varphi) d\varphi + \frac{\cos\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} \cos\varphi d\varphi \\ &= 2\pi \neq 0, \end{aligned}$$

故  $\mathbf{v}$  不是区域  $V$  的保守场, 从而它不是  $V$  内的有势场.

**定义 4** 设  $V$  是空间区域. 若对于  $V$  内任意一条闭路, 都存在一张以此闭路为全部边界且完全含在  $V$  内的有界的简单曲面

$S$ (图 8.28), 则称  $V$  是“曲面”单连通区域, 否则称为“曲面”多连通区域.

形象地说, 如果区域  $V$  内任一闭路都可以在区域内收缩为一点, 则称  $V$  为“曲面”单连通区域. 例如去心球体是“曲面”单连通区域, 而环面体不是“曲面”单连通区域.

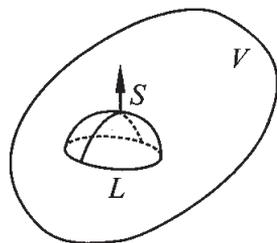


图 8.28

**定理 6** 设  $\mathbf{v}$  是区域  $V$  内的  $C^1$  向量场. 若  $\mathbf{v}$  是区域  $V$  内的无旋场, 并且  $V$  是一个“曲面”单连通区域, 则  $\mathbf{v}$  是  $V$  内的有势场.

**证** 设  $L$  是  $V$  内任意一条闭路, 因  $V$  是“曲面”单连通区域, 故存在以  $L$  为全部边界的曲面  $S$ , 由  $\text{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , 利用斯托克斯定理, 得  $\mathbf{v}$  在  $L$  上的环量为零. 由  $L$  的任意性,  $\mathbf{v}$  为保守场, 从而  $\mathbf{v}$  为有势场.

#### (五) 例

**例 3** 证明向量场

$$\mathbf{v} = (x^2 - yz)\mathbf{i} + (y^2 - zx)\mathbf{j} + (z^2 - xy)\mathbf{k}$$

是有势场, 并求出它的一个势函数.

**解**

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - yz & y^2 - zx & z^2 - xy \end{vmatrix} \\ &= (-x + x)\mathbf{i} + (-y + y)\mathbf{j} + (-z + z)\mathbf{k} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

因此场  $\mathbf{v}$  在整个空间中是无旋场, 所以也是有势场. 若把起点取在原点, 可得场  $\mathbf{v}$  的一个势函数为

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (x^2 - yz)dx + (y^2 - zx)dy + (z^2 - xy)dz \\ &= \int_0^x x^2 dx + \int_0^y y^2 dy + \int_0^z (z^2 - xy)dz \\ &= \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - xyz. \end{aligned}$$

例 4 求电场强度  $\mathbf{E} = \frac{q}{r^3}\mathbf{r}$  的势函数, 其中  $r \neq 0$ .

解 前面已经说明, 电场强度  $\mathbf{E}$  在除去原点的整个空间上是无旋的, 所以它是有势场, 其势函数为

$$\begin{aligned}\varphi(M) &= \int_{M_0}^M \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = \int_{M_0}^M \frac{q}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_0}^r \frac{q}{r^3} r dr \\ &= \int_{r_0}^r \frac{q}{r^2} dr = -\left(\frac{q}{r} - \frac{q}{r_0}\right).\end{aligned}$$

这里点  $M_0$  可以任意选取. 为方便起见, 把点  $M_0$  取在无穷远处. 于是令  $r_0$  趋于无穷就得到  $\mathbf{E}$  的一个势函数为

$$\varphi(M) = -\frac{q}{r}.$$

在静电学中常取

$$V = -\varphi = \frac{q}{r},$$

并称为电场  $\mathbf{E}$  的电位. 因此有

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V.$$

它表明电场  $\mathbf{E}$  指向电位  $V$  减小最快的方向.

例 5 计算积分

$$\int_{(1,0)}^{(3,1)} (e^y + 1)dx + (xe^y - 2y)dy.$$

解 容易看出, 被积表达式是全微分

$$(e^y + 1)dx + (xe^y - 2y)dy = d(xe^y + x - y^2),$$

所以积分与路径无关, 且有

$$\int_{(1,0)}^{(3,1)} (e^y + 1)dx + (xe^y - 2y)dy = (xe^y + x - y^2) \Big|_{(1,0)}^{(3,1)} = 3e.$$

例 6 设由点涡  $O(0,0)$  产生的平面流速场是

$$\mathbf{v} = \frac{c}{x^2 + y^2}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}),$$

其中  $c$  是常数. 试求场  $\mathbf{v}$  沿平面上任意光滑闭曲线的环量.

解 由于平面场  $\mathbf{v} = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$  的旋度为

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

所以平面场无旋的条件相当于

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

容易验证, 当  $x^2 + y^2 \neq 0$  时, 所给流速场  $\mathbf{v}$  满足这个条件, 就是说, 场  $\mathbf{v}$  在整个平面除去原点  $O$  的区域  $G$  上是无旋的. 但是这个平面区域  $G$  并不是单连通的, 因为对于围绕点  $O$  的闭曲线, 它所围成的内部区域不能完全属于  $G$ . 因此, 在这个区域  $G$  上的无旋性并不能保证场  $\mathbf{v}$  是保守的, 即场  $\mathbf{v}$  沿  $G$  内任意闭路的环量不一定都等于零.

事实上, 对于中心在点  $O$  半径为  $R$  的圆周  $L_1$ , 沿其反时针方向的环量为

$$\begin{aligned} \oint_{L_1} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dl &= \oint_{L_1} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} \\ &= c \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2} (R^2 \sin^2 \theta + R^2 \cos^2 \theta) d\theta = 2\pi c. \end{aligned}$$

对于围绕点  $O$  的任意光滑闭曲线  $L_2$ , 可在  $L_2$  的内部取一个以  $O$  为中心的小圆周  $L_1$ ,  $L_1$  与  $L_2$  共同围成的区域记为  $D$  (图 8.29(a)), 因为  $\mathbf{v}$  在  $D$  上是无旋的, 故由格林公式可得

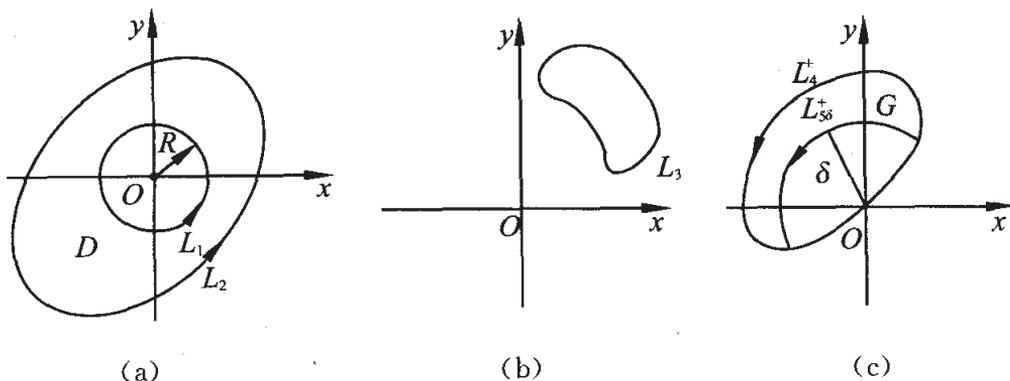


图 8.29

$$\oint_{L_1^- + L_2^+} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = \int_{L_1^-} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dl + \int_{L_2^+} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = 0,$$

其中  $L_1^-$  表示沿  $L_1$  的顺时针方向,  $L_2^+$  沿  $L_2$  的逆时针方向, 所以沿  $L_2$  的环量为

$$\oint_{L_2^+} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = \oint_{L_1^+} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = 2\pi c.$$

对于不包围点  $O$  的任意闭路  $L_3$  (图 8.29(b)), 显然有

$$\oint_{L_3} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = 0.$$

对于过  $O$  点的光滑闭曲线  $L_4$ , 取  $\delta > 0$  足够小, 以  $O$  为心,  $\delta$  为半径作圆周, 记圆周在  $L_4$  内部的一段弧为  $L_{5\delta}$  (8.29(c)), 并记  $L_4$  的不在圆内的曲线段为  $L_{4\delta}$ ,  $L_{4\delta}$  与  $L_{5\delta}$  构成一条闭路, 由于原点在闭路的外部, 故可推出

$$\oint_{L_{4\delta}^+} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = \int_{L_{5\delta}^+} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dl.$$

设  $L_{5\delta}^+$  上点的极角变范围为  $[\alpha, \beta]$ , 则

$$\begin{aligned} \oint_{L_{5\delta}^+} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dl &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{-\delta \sin\varphi (-\sin\varphi) d\varphi}{(\delta \cos\varphi)^2 + (\delta \sin\varphi)^2} + \frac{\delta \cos\varphi \cdot \delta \cos\varphi d\varphi}{(\delta \cos\varphi)^2 + (\delta \sin\varphi)^2} \\ &= \beta - \alpha, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \oint_{L_4^+} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dl &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{L_{4\delta}^+} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{L_{5\delta}^+} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dl \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} (\beta - \alpha) = \pi. \end{aligned}$$

#### 8.4.2 无源场与向量势

##### (一) 无源场

**定义 1** 区域  $V$  内散度处处为零的向量场称为区域  $V$  内的无源场.

为弄清无源场的物理意义, 我们设  $\mathbf{v}$  是  $V$  内的流体速度场, 在流场中任取一段全含在  $V$  内的细小流管, 它的侧面由流线构成, 两

端是正交于流线的横截面(图 8.30). 所谓流线, 是指处处与流速  $v$  相切的曲线. 由于流体不可能从侧面流进或流出流管. 又根据流管内流场的散度处处为零, 从而由高斯定理可知流出流管的总流量也为零, 所以流体从一端流进的量必等于从另一端流出的量. 又因管端的截面积很小, 忽略高阶无穷小量后就有

$$v_1 S_1 = v_2 S_2.$$

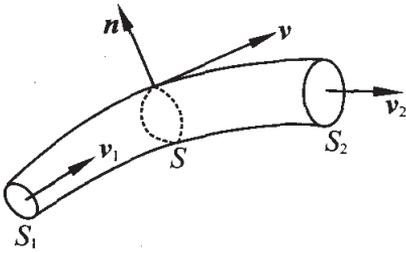


图 8.30

这就是说, 通过流管每个截面的流量  $vS$  是个常数, 叫做管型常数. 根据这个道理可把上述的向量场划分成一道道流管(注意, “管”并不一定指向量场真的只在一根管子内流动, 而是指具有这种性质的向量场). 因为只有无源场才具有这种特性, 所以无源场又称为管型场.

## (二) 向量势

**定义 2** 如果存在一个向量场  $a$ , 使得在空间区域  $V$  内处处有

$$\operatorname{rot} a = v,$$

则称  $a$  为向量场  $v$  在区域  $V$  内的一个向量势.

对于任意的  $\varphi \in C^2(V)$ , 利用直角坐标系容易验证

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) = \mathbf{0},$$

由此可知, 如果  $a$  是  $v$  在  $V$  内的一个向量势,  $\varphi \in C^2(V)$ , 那么  $a + \operatorname{grad} \varphi$  也是  $v$  的向量势, 即向量势不是唯一的. 反过来, 如果  $a, b$  都是  $v$  在  $V$  内的向量势, 则由

$$\operatorname{rot}(b - a) = \operatorname{rot} b - \operatorname{rot} a = v - v = \mathbf{0}$$

可知,  $b - a$  是无旋场, 如果  $V$  还是“曲面”单连通区域, 则  $b - a$  是有势场, 此时有势函数  $\varphi$  满足

$$b - a = \operatorname{grad} \varphi.$$

综上所述, 在“曲面”单连通的区域  $V$  内, 具有向量势的场  $v$  的全体向量势可以表成  $a + \operatorname{grad} \varphi$  的形式, 其中  $a$  是  $v$  的一个向量势,  $\varphi$  是

任意一个在  $V$  内满足  $\text{rot}(\text{grad}\varphi) = 0$  的三元函数, 特别的,  $\varphi$  可取  $C^2(V)$  中的任意函数.

### (三) 无源场与向量势的关系

**定理 1** 设  $\mathbf{a}$  是空间区域  $V$  内的  $C^2$  向量场,  $\mathbf{v} = \text{rota}$ , 则  $\mathbf{v}$  是  $V$  内的无源场.

**证** 在直角坐标系下, 设  $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ ,

$$\begin{aligned} \text{div}\mathbf{v} &= \text{div}[\text{rot}(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})] \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

区域  $V$  内的无源场是否存在全区域  $V$  内的向量势呢? 这是一个与区域本身的性质有关的问题. 请看下例:

**例 1** 设  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ , 试证向量场  $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$  在它的定义域  $V$  内是无源场, 但它在  $V$  内的向量势是不存在的.

**证** 由 8.2.4 例 2 可知  $\mathbf{E}$  是定义域  $V$  内的无源场.

为证其向量势不存在, 用反证法, 如果  $\mathbf{E}$  在  $V$  内有向量势  $\mathbf{a}$ , 则  $\mathbf{E} = \text{rota}$ . 设以原点为心的单位球面与  $Oxy$  平面的交线为  $L$ , 用  $L^+$  和  $L^-$  分别表示  $L$  的逆时针和顺时针的定向, 用  $S_1^+$  表示上半单位球面的上侧, 用  $S_2^-$  表示下半单位球面的下侧. 由斯托克斯定理,

$$\begin{aligned} \int_{L^+} \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau} dl &= \iint_{S_1^+} \text{rota} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S_1^+} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS, \\ \int_{L^-} \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau} dl &= \iint_{S_2^-} \text{rota} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S_2^-} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS, \end{aligned}$$

由此得

$$\iint_{S_1^+} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_{S_2^-} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

但上式左端是向量场  $\mathbf{E}$  指向单位球面外侧的通量, 由 8.2.2 例 1 可知, 左端的值为  $4\pi \neq 0$ , 矛盾. 故  $\mathbf{E}$  在  $V$  内的向量势是不存在的.

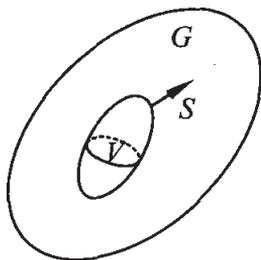


图 8.31

与势函数的情形相仿,上例中的区域不是“空间”单连通的.所谓“空间”单连通区域,是指具有以下性质的空间区域  $V$ : 只要从外面围着一立体  $T$  的一简单闭曲面属于区域  $V$ , 则这一立体也必整个含在  $V$  内(图 8.31). 这种类型的单连通区域的实质就在于没有“洞”, 连点洞也不允许存在. 对于不伸展到无穷的立体来说, 可以简单地这样要求: 要由一个唯一的封闭曲面作为它的边界. 容易明白, 环面体是“空间”单连通的, 而去心球体却不是.

什么样的区域  $V$  内,  $C^1$  无源向量场必具有向量势呢? 我们给出以下定理:

什么样的区域  $V$  内,  $C^1$  无源向量场必具有向量势呢? 我们给出以下定理:

**定理 2** 设向量场  $\mathbf{v}$  是全空间上的  $C^1$  无源场, 则在全空间上必存在向量场  $\mathbf{a}$ , 使得

$$\mathbf{v} = \text{rota}.$$

**证** 这个问题的解决归结为求解下列一阶偏微分方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} = P(x, y, z) \\ \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} = Q(x, y, z) \\ \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} = R(x, y, z) \end{cases}$$

我们的目的是, 要找出它的一组解  $(a_1, a_2, a_3)$ . 不妨令  $a_3 = 0$ , 从第一个方程解得

$$a_2 = - \int_{z_0}^z P(x, y, z) dz + f(x, y),$$

其中  $f(x, y)$  是待定函数. 从第二方程中取

$$a_1 = \int_{z_0}^z Q(x, y, z) dz.$$

把  $a_1, a_2$  的表达式代入第三方程, 由于在区域  $G$  上  $\text{div} \mathbf{v} = 0$ , 所以

得到

$$R(x, y, z) = - \int_{z_0}^z \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dz + \frac{\partial f}{\partial x}$$
$$\int_{z_0}^z \frac{\partial R}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial x} = R(x, y, z) - R(x, y, z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}.$$

由此推知

$$\frac{\partial f}{\partial x} = R(x, y, z_0).$$

从而可取

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x R(x, y, z_0) dx.$$

最后求得

$$\mathbf{a} = \left( \int_{z_0}^z Q(x, y, z) dz \right) \mathbf{i}$$
$$+ \left( - \int_{z_0}^z P(x, y, z) dz + \int_{x_0}^x R(x, y, z_0) dx \right) \mathbf{j}. \quad (*)$$

经验证,  $\text{rota} = \mathbf{v}$ .

**附注 1** 利用上面的证明还可得知, 若  $\mathbf{v}$  是椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  的内部区域或长方体的内部区域  $V$  内的无源场, 则  $\mathbf{v}$  在  $V$  内的向量势也是存在的. 事实上, 只要 (\*) 式中的所有的积分路径全在  $V$  内, 我们就可以直接验证  $\mathbf{a}$  是  $\mathbf{v}$  在  $V$  内的向量势. 由此可知, 对于区域内的无源场, 在该区域内的每一点, 都存在一个小邻域, 使得在此小邻域内, 给定无源场的向量势是存在的.

**附注 2** 区域内偏微分方程组不一定有解, 为使它有解, 通常需要附加一定的条件. 因此, 利用特殊方法求得的“解”必须经过验证, 才能判定这是否真是方程组的解.

**例** 证明向量场

$$\mathbf{v} = (xy + 1)\mathbf{i} + z\mathbf{j} - yz\mathbf{k}$$

是无源场, 并求出其向量势.

解 因  $\operatorname{div} \mathbf{v} = y + 0 - y = 0$ , 故  $\mathbf{v}$  是无源场. 为求  $\mathbf{v}$  的向量势  $\mathbf{a}$ , 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} = xy + 1 \\ \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} = z \\ \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} = -yz \end{cases}$$

取  $a_3 = 0$ , 由第一方程得

$$a_2 = - \int_0^z (xy + 1) dz + f(x, y) = -(xy + 1)z + f(x, y);$$

由第二方程得

$$a_1 = \int_0^z z dz = \frac{z^2}{2}$$

将  $a_1, a_2$  的表达式代入第三方程给出

$$-yz + \frac{\partial f}{\partial x} = -yz,$$

故可取  $f = 0$ . 于是求得

$$\mathbf{a} = \frac{z^2}{2} \mathbf{i} - (xy + 1)z \mathbf{j}.$$

经检验,  $\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{v}$ , 所以  $\mathbf{a}$  就是所要求的向量势.

### 复习思考题

1.  $u \in C^k(V)$  及  $\mathbf{v}$  是区域  $V$  内的  $C^k$  向量场的含义是什么?
2. 何谓有势场、保守场和无旋场? 它们之间有什么联系?
3. 曲线积分与路径无关的条件是什么?
4. 全微分式的曲线积分有什么样的计算公式? 试与定积分的牛顿-莱布尼兹公式作比较.
5. 在讨论无旋场的问题中, “曲面”单连通区域的条件起了什么作用?
6. 什么叫无源场、管型场? 什么叫向量势?

7. 试述无源场与向量势之间的关系.
8. 是否任意区域内的无源场都有向量势存在?试述求向量势的一个方法.

#### 习题 8.4

1. 设平面上有四条路径:

$L_1$ : 折线, 从  $(0,0)$  到  $(1,0)$  再到  $(1,1)$ ;

$L_2$ : 从  $(0,0)$  沿着抛物线  $y = x^2$  到  $(1,1)$ ;

$L_3$ : 从  $(0,0)$  到  $(1,1)$  的直线段;

$L_4$ : 折线, 从  $(0,0)$  到  $(0,1)$  再到  $(1,1)$ ,

求下列力场  $F$  沿上述四条路径所作的功, 并说明它们的值为什么会相等或不等.

(1)  $F = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ ;

(2)  $F = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ .

2. 证明下列向量场是有势场, 并求出它们的势函数:

(1)  $\mathbf{v} = (2x\cos y - y^2\sin x)\mathbf{i} + (2y\cos x - x^2\sin y)\mathbf{j}$ ;

(2)  $\mathbf{v} = yz(2x + y + z)\mathbf{i} + xz(2y + z + x)\mathbf{j} + xy(2x + x + y)\mathbf{k}$ ;

(3)  $\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}, (\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, r = |\mathbf{r}|)$ ;

(4)  $\mathbf{v} = r^2\mathbf{r}, (\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, r = |\mathbf{r}|)$ ;

(5)  $\mathbf{A} = 2xyz^2\mathbf{i} + (x^2z^2 + z\cos(yz))\mathbf{j} + (2x^2yz + y\cos(yz))\mathbf{k}$ .

3. 求下列曲线积分:

(1)  $\int_L (2x + y)dx + (x + 4y + 2z)dy + (2y - 6z)dz$ , 其中  $L$

由点  $P_1(a, 0, 0)$  沿曲线  $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = 0 \end{cases}$  到  $P_2(0, a, 0)$ , 再由  $P_2$  沿直线  $\begin{cases} y + z = a \\ x = 0 \end{cases}$  到点  $P_3(0, 0, a)$ .

$$(2) \int_{\widehat{AmB}} (x^3 - yz) dx + (y^2 - zx) dy + (z^2 - xy) dz, \text{ 其中 } \widehat{AmB}$$

是柱面螺线  $x = a \cos \varphi, y = a \sin \varphi, z = \frac{h}{2\pi} \varphi$  上从点  $A(a, 0, 0)$  到  $B(a, 0, h)$  这一段.

4. 当  $\alpha$  取何值时, 向量场  $\mathbf{F} = (x^2 + 5\alpha y + 3yz)\mathbf{i} + (5x + 3\alpha xz - 2)\mathbf{j} + [(\alpha + 2)xy - 4z]\mathbf{k}$  是有势场, 并求出这时的势函数.

5. 设可微向量场  $\mathbf{v} = f(y, z)\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ , 问  $f$  是  $y, z$  是什么样的函数时,  $\mathbf{v}$  为保守场, 又当  $f(0, 0) = 0$  时, 试求出此保守场的全体势函数.

6. 证明有心力场  $\mathbf{F} = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$  是有势场, 并求出它的势函数.

其中  $\mathbf{r} = (x, y, z), r = |\mathbf{r}|, f(r)$  是  $r$  是任意可微函数.

7. 求位于点  $M_i$ , 质量为  $m_i (i = 1, 2, \dots, n)$  的  $n$  个质点所产生的引力场的势函数.

8. 验证下列积分中的被积表达式是个全微分, 并求积分的值:

$$(1) \int_{(-1,2)}^{(2,3)} x dy + y dx;$$

$$(2) \int_{(1,0)}^{(6,3)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$(3) \int_{(0,0,2)}^{(2,3,-4)} x dx + y^2 dy - z^3 dz;$$

$$(4) \int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right) dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right) dy - \frac{xy}{z^2} dz.$$

9. 求下列全微分的原函数  $u$ :

$$(1) du = (3x^2 + 6xy^2) dx + (6x^2 y - 4y^3) dy;$$

$$(2) du = (x^2 - 2yz) dx + (y^2 - 2xz) dy + (z^2 - 2xy) dz.$$

10. 设  $f(u)$  是个连续函数, 但不一定是可微,  $L$  是分段光滑的任意闭曲线, 证明:

$$(1) \oint_L f(x^2 + y^2)(x dx + y dy) = 0;$$

$$(2) \oint_L f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})(x dx + y dy + z dz) = 0.$$

11. 验证积分

$$\int_{(1,1)}^{(2,2)} \left( \frac{1}{y} \sin \frac{x}{y} - \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + 1 \right) dx \\ + \left( \frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} - \frac{x}{y^2} \sin \frac{x}{y} + \frac{1}{y^2} \right) dy$$

与路径无关, 并求其值.

12. 证明下列向量场是无源场:

$$(1) \mathbf{v} = xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k};$$

$$(2) \mathbf{v} = (2x + y)\mathbf{i} + (x + 4y + 2z)\mathbf{j} + (2y - 6z)\mathbf{k};$$

$$(3) \mathbf{v} = r^3(\mathbf{c} \times \mathbf{r}), \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, r = |\mathbf{r}|, \mathbf{c} \text{ 为常向量};$$

$$(4) \mathbf{v} = (\mathbf{r} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{b}), \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ 均为常向量}.$$

13. 设有心力场为  $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{r}$ ,  $f(r)$  具有连续微商, 问在什么情况下  $\mathbf{F}$  是无源场?

14. 证明向量场  $\mathbf{v} = (y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$  是无源场, 并求出它的一个向量势.

15. 已知  $\mathbf{F} = (axz + x^2, by + xy^2, z - z^2 + cxz - 2xyz)$ , 试确定常数  $a, b, c$ , 使得  $\mathbf{F}$  是一无源场; 并求出这时它的一个向量势.

16. 设  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  是两个无旋场, 证明  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  是无源场.

17. 证明常向量  $\mathbf{c}$  必有数量势  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}$  与向量势  $\frac{1}{2}(\mathbf{c} \times \mathbf{r})$ .

## 8.5 哈密顿算符及其运算公式

在研究具体的物理场时, 熟练的运用场论各种公式将会给场的运算带来许多方便. 为此, 再引进一个新的算符

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k},$$

称为哈密顿(Hamilton)算符,又读成纳布拉(Nabla),并通过这一算符,重新表达场论的基本公式,进而引出场的另一些运算法则.在所有这些公式与法则中,恒设所出现的场及其微商都是连续的,今后不再分别说明.

### 8.5.1 算符 $\nabla$ 作用在一个场上的运算

算符  $\nabla$  作用在一个数量场  $u$  上定义为

$$\nabla u = \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k},$$

它即是场  $u$  的梯度.

算符  $\nabla$  也可以作用到一个向量场  $\mathbf{v} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ , 具有两种形式, 分别定义为

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot \mathbf{v} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

它们是场  $\mathbf{v}$  的散度和旋度. 因此场论的三度就都统一在算符  $\nabla$  的运算之下

$$\text{grad} u = \nabla u,$$

$$\text{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v},$$

$$\text{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}.$$

算符  $\nabla$  还可以在它的前面点乘一个向量场后, 再作用到数量

场或向量场上,定义是

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{v} \cdot \nabla)u &= \left( P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y} + R \frac{\partial}{\partial z} \right) u \\
 &= P \frac{\partial u}{\partial x} + Q \frac{\partial u}{\partial y} + R \frac{\partial u}{\partial z} = \mathbf{v} \cdot \nabla u; \\
 (\mathbf{v} \cdot \nabla)w &= \left( P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y} + R \frac{\partial}{\partial z} \right) w \\
 &= P \frac{\partial w}{\partial x} + Q \frac{\partial w}{\partial y} + R \frac{\partial w}{\partial z}.
 \end{aligned}$$

还有其它一些类似的定义. 在这些定义中, 可以看到  $\nabla$  好似一个普通的向量. 但是运算时必须注意它的顺序. 例如  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)w$  就不能写成  $(\nabla \cdot \mathbf{v})w$ , 即  $\nabla$  和  $\mathbf{v}$  的位置不能交换. 有下列性质:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \nabla \left( \sum_{i=1}^n C_i u_i \right) &= \sum_{i=1}^n C_i \nabla u_i; \\
 (2) \quad \nabla \cdot \left( \sum_{i=1}^n C_i \mathbf{v}_i \right) &= \sum_{i=1}^n C_i \cdot \nabla \cdot \mathbf{v}_i; \\
 (3) \quad \nabla \times \left( \sum_{i=1}^n C_i \mathbf{v}_i \right) &= \sum_{i=1}^n C_i \nabla \times \mathbf{v}_i, \text{ 其中 } c_1, \dots, c_n \text{ 为任意常}
 \end{aligned}$$

数;

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \nabla \cdot (u\mathbf{a}) &= \nabla u \cdot \mathbf{a}; \\
 (5) \quad \nabla \times (u\mathbf{a}) &= \nabla u \times \mathbf{a},
 \end{aligned}$$

这里的  $\mathbf{a}$  为常向量.

### 8.5.2 算符 $\nabla$ 作用在两个场乘积上的运算

算符  $\nabla$  与两个场乘积上的运算公式可分类举例如下.

算符  $\nabla$  与两个数量场乘积的运算公式为

$$\nabla(u\varphi) = \varphi \nabla u + u \nabla \varphi.$$

算符  $\nabla$  与一个数量场, 一个向量场乘积的运算公式为

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (u\mathbf{v}) &= \mathbf{v} \cdot \nabla u + u \nabla \cdot \mathbf{v}; \\
 \nabla \times (u\mathbf{v}) &= -\mathbf{v} \times \nabla u + u \nabla \times \mathbf{v}.
 \end{aligned}$$

如果把  $\nabla$  视为具有向量与微分运算双重性质的量, 这些公式是不难加以记住的. 例如,  $\nabla$  作为一个向量, 它与向量  $uv$  的点乘得数量;  $\nabla$  作为微分运算应分别作用在  $u$  和  $v$  上, 但无论作用在  $u$  或  $v$  上, 点乘都应置于  $\nabla$  与  $v$  之间, 从而得到上面第二公式. 同样可得其它两个公式. 这时需要注意的是, 在得第三公式时, 由于左边  $\nabla$  在  $v$  之前, 故右边第一项  $\nabla u$  应在  $v$  之前, 次序颠倒后出现一个负号.

若规定:  $\nabla u = u\nabla$ , 由第一个公式得到

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (u\nabla) &= \nabla \cdot (\nabla u) = (\nabla \cdot \nabla)u \\ &= (\nabla \cdot \nabla)u + u(\nabla \cdot \nabla) = 2(\nabla \cdot \nabla)u\end{aligned}$$

或有  $(\nabla \cdot \nabla)u = \nabla^2 u = \Delta u = 0$ , 其中  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ,

称为拉普拉斯算符. 再由第二个公式导出

$$\nabla \times (\nabla u) = \nabla \times (u\nabla) = -\nabla \times (\nabla u) - u(\nabla \times \nabla)$$

故有  $2\nabla \times (\nabla u) = 0$ , 即得

$$\text{rot}(\text{gradu}) = \nabla \times \nabla u = (\nabla \times \nabla)u = 0.$$

算符  $\nabla$  与两个向量场乘积的运算公式为

$$\begin{aligned}\nabla(v \cdot w) &= w \times (\nabla \times v) + (w \cdot \nabla)v + v \times (\nabla \times w) \\ &\quad + (v \cdot \nabla)w; \\ \nabla \cdot (v \times w) &= w \cdot (\nabla \times v) - v \cdot (\nabla \times w); \\ \nabla \times (v \times w) &= (w \cdot \nabla)v - w(\nabla \cdot v) - (v \cdot \nabla)w \\ &\quad + v(\nabla \cdot w).\end{aligned}$$

先考察第一式. 由  $\nabla$  的微分性质, 它应分别作用在  $v$  和  $w$  上, 因此有

$$\nabla(v \cdot w) = \nabla_v(v \cdot w) + \nabla_w(v \cdot w).$$

若把  $\nabla_v$  视为向量, 利用向量代数的公式

$$a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b), \quad (*)$$

则有

$$\nabla_v(v \cdot w) = w \times (\nabla_v \times v) + (w \cdot \nabla_v)v.$$

这里应注意  $\nabla_v$ , 是对  $v$  作用的微分算符, 故  $v$  应移到  $\nabla_v$  之后. 同样得到

$$\nabla_w(v \cdot w) = v \times (\nabla_w \times w) + (v \cdot \nabla_w)w.$$

省去下标后即得

$$\begin{aligned} \nabla(v \cdot w) &= w \times (\nabla \times v) + (w \cdot \nabla)v + v \times (\nabla \times w) \\ &\quad + (v \cdot \nabla)w. \end{aligned}$$

再考察第二式. 因为

$$\nabla \cdot (v \times w) = \nabla_v \cdot (v \times w) + \nabla_w \cdot (v \times w),$$

由向量代数的公式

$$a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c,$$

并把  $\nabla$  作为向量即有

$$\begin{aligned} \nabla_v \cdot (v \times w) &= (\nabla_v \times v) \cdot w, \\ \nabla_w \cdot (v \times w) &= -\nabla_w \cdot (w \times v) = -(\nabla_w \times w) \cdot v. \end{aligned}$$

在省去下标后就得到

$$\nabla \cdot (v \times w) = w \cdot (\nabla \times v) - v \cdot (\nabla \times w).$$

令  $v = \nabla$ , 得到

$$\nabla \cdot (\nabla \times w) = w \cdot (\nabla \times \nabla) - \nabla \cdot (\nabla \cdot w) = 0$$

故有

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}w) = \nabla \cdot (\nabla \times w) = 0.$$

应用(\*)式有

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}v) = \nabla \times (\nabla \times v) = \nabla(\nabla \cdot v) - \Delta v.$$

最后考察第三式. 由  $\nabla$  的微分性质得

$$\nabla \times (v \times w) = \nabla_v \times (v \times w) + \nabla_w \times (v \times w).$$

应用向量代数公式(\*), 并将  $\nabla_v$  作为向量就有

$$\nabla_v \times (v \times w) = v(\nabla_v \cdot w) - w(\nabla_v \cdot v).$$

因为  $\nabla_v$  是作用在  $v$  的微分算符, 所以  $v(\nabla_v \cdot w)$  应写成  $(w \cdot \nabla_v)v$ , 于是得

$$\nabla_v \times (v \times w) = (w \cdot \nabla_v)v - (\nabla_v \cdot v)w;$$

同样可得

$$\nabla_w \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = -(\mathbf{v} \cdot \nabla_w) \mathbf{w} - (\nabla_w \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v}$$

省去下标后得到

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{w}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w} + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{w}).$$

### 8.5.3 高斯公式与斯托克斯公式的其它形式

应用算符  $\nabla$ , 高斯公式与斯托克斯公式分别可以写成

$$\oint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV;$$

$$\oint_L \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = \iint_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS.$$

由此不难得出其它面积分变换为体积分与线积分变换为面积分的公式

$$\oint_S u \mathbf{n} dS = \iiint_V \nabla u dV;$$

$$\oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{v} dS = \iiint_V \nabla \times \mathbf{v} dV;$$

$$\oint_L u \boldsymbol{\tau} dl = \iint_S \mathbf{n} \times \nabla u dS.$$

事实上, 以第二式为例, 用非零常向量  $\mathbf{a}$  点乘后, 再应用高斯定理, 左边有

$$\mathbf{a} \cdot \oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{v} dS = \oint_S (\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{a}) dV$$

由  $\nabla$  与两个场乘积的运算公式推知

$$\iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{a}) dV = \mathbf{a} \cdot \iiint_V \nabla \times \mathbf{v} dV.$$

所以

$$\mathbf{a} \cdot \oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{v} dS = \mathbf{a} \cdot \iiint_V \nabla \times \mathbf{v} dV.$$

由向量  $\mathbf{a}$  的任意性, 即得

$$\oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{v} dS = \iiint_V \nabla \times \mathbf{v} dV.$$

同理可证其余二式.

最后作为算符  $\nabla$  及其运算公式的重要应用,再来证明另外两个面积分转换为体积分的格林公式. 它们在后继的课程中经常会遇到.

设  $V$  是光滑闭曲面  $S$  所围成的区域,且函数  $\varphi$  和  $\psi$  有直到二阶的连续偏微商,则有

$$\begin{aligned}\iint_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS &= \iiint_V (\psi \Delta \varphi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi) dV; \\ \iint_S \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS &= \iiint_V (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) dV,\end{aligned}$$

其中  $\frac{\partial}{\partial n}$  是关于曲面  $S$  外侧法向量  $n$  的方向微商.

证 由方向微商与梯度的关系式

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \text{grad} \varphi \cdot n = \nabla \varphi \cdot n$$

及高斯定理得

$$\iint_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \iint_S \psi \nabla \varphi \cdot n dS = \iiint_V \nabla \cdot (\psi \nabla \varphi) dV.$$

但

$$\nabla \cdot (\psi \nabla \varphi) = \psi \nabla \cdot (\nabla \varphi) + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi = \psi \Delta \varphi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi.$$

所以

$$\iint_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \iiint_V (\psi \Delta \varphi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi) dV.$$

这就证明了格林第一公式. 将  $\varphi$  和  $\psi$  的位置互换又有

$$\iint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = \iiint_V (\varphi \Delta \psi + \nabla \psi \cdot \nabla \varphi) dV,$$

把这两个公式相减即得格林第二公式.

### 习题 8.5

1. 设  $\omega$  是常向量,  $r = xi + yj + zk$ ,  $r = |r|$ ,  $f(r)$  是  $r$  的可

微函数, 试通过  $\nabla$  运算求:

- (1)  $\nabla(\boldsymbol{\omega} \times f(r)\mathbf{r})$ ;
- (2)  $\nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times f(r)\mathbf{r})$ ;
- (3)  $\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times f(r)\mathbf{r})$ .

2. 设函数  $u(x, y, z)$  在光滑曲面  $S$  所围成的闭区域  $V$  上具有直到二阶的连续偏微商, 而且满足拉普拉斯方程:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

试证明:

$$(1) \oint_S \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0;$$

$$(2) \oint_S u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = \iiint_V (\nabla u)^2 dV; \text{ 其中 } \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \text{ 是 } u \text{ 沿 } S \text{ 外侧法向量 } \mathbf{n}$$

的方向微商;

(3) 利用格林第二公式证明  $u$  在  $V$  中的值由它在曲面  $S$  上的值唯一确定.

3. 已知真空中自由电磁场的麦克斯韦尔方程组为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{cases}$$

其中  $\mathbf{E}$  是电场强度,  $\mathbf{B}$  是磁感应强度,  $c$  是光速,  $t$  是时间, 试导出电磁波的运动方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \mathbf{E} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \mathbf{B} \end{cases}$$

4. 证明  $\oint_S u \mathbf{n} dS = \iiint_V \nabla u dV$ , 其中  $u$  在包含  $V$  的区域上有连续

的一阶偏微商,  $S$  是  $V$  的外侧光滑表面.

5. 设  $S$  是以光滑曲线  $L$  为边界的光滑曲面, 场  $\varphi$  在包含  $S$  的区域上有连续的一阶偏微商,  $\psi$  有连续的二阶偏微商, 证明:

$$\oint_L \varphi d\psi = \iint_S (\nabla \varphi \times \nabla \psi) \cdot n dS,$$

其中  $n$  是曲面  $S$  的单位法向量, 并且  $L$  的行进方向与  $n$  构成右手系.

## 8.6 外微分形式

我们知道, 将线积分与面积分联系起来的是斯托克斯定理

$$\begin{aligned} \oint_L P ds + Q dy + R dz &= \iint_B \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx \\ &\quad + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy; \end{aligned}$$

将面积分与体积分联系起来的是高斯定理

$$\begin{aligned} &\oiint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy \\ &= \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz. \end{aligned}$$

如此不同的两个定理, 它们之间有没有内在的联系? 能不能把它们概括成统一的形式, 使之在高维空间中也存在类似的定理? 这些问题只有引入了外微分形式才能导至最终的解决.

### 8.6.1 外微分形式的外积

设在微分  $dx$ ,  $dy$  及  $dz$  之间定义了一种乘积运算, 它满足下述法则: 两个相同微分的乘积为零; 两个不同微分的乘积变换顺序时变号.

这种微分之间的乘积称为微分的外积. 为了有别于微分的普通乘积, 用记号  $\wedge$  表示. 于是就有

$$dx \wedge dx = 0, dy \wedge dy = 0, dz \wedge dz = 0,$$

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= -dy \wedge dx, dy \wedge dz = -dz \wedge dy, \\ dz \wedge dx &= -dx \wedge dz. \end{aligned}$$

按照这些运算法则进行的外积实际上在学习向量代数时就已经遇到过了. 在那里, 定义两个向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  的向量积就遵守这些法则

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a},$$

所以对微分进行外积就如对向量进行向量积.

由微分的外积乘以三元函数组成的微分形式称为外微分形式. 例如, 若  $P, Q, R, H$  是  $x, y, z$  的函数, 则

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

为一次外微分形式, 它就是通常的微分形式.

$$Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$$

为二次外微分形式. 而三次外微分形式就是

$$Hdx \wedge dy \wedge dz.$$

式中的函数  $P, Q, R, H$  称微分形式的系数. 为了方便有时也称三元函数  $f$  为零次外微分形式. 因此在三维空间中就只可能有这四种外微分形式.

任意两个外微分形式  $\lambda, \mu$  也可以定义外积  $\lambda \wedge \mu$ , 只要相应的各项外微分进行外积就行了. 例如, 若设

$$\lambda = Adx + Bdy + Cdz,$$

$$\mu = Edx + Fdy + Gdz,$$

$$v = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy,$$

则有

$$\begin{aligned} \lambda \wedge \mu &= (Adx + Bdy + Cdz) \wedge (Edx + Fdy + Gdz) \\ &= AE dx \wedge dx + BE dy \wedge dx + CE dz \wedge dx \\ &\quad + AF dx \wedge dy + BF dy \wedge dy + CF dz \wedge dy \\ &\quad + AG dx \wedge dz + BG dy \wedge dz + CG dz \wedge dz. \end{aligned}$$

应用外乘积的运算法则, 并合并同类项得

$$\begin{aligned} \lambda \wedge \mu &= (BG - CF) dy \wedge dz + (CE - AG) dz \wedge dx \\ &\quad + (AF - BE) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

即两个一次外微分形式的外积是二次外微分形式. 同理可得

$$\begin{aligned}\lambda \wedge v &= (A dx + B dy + C dz) \wedge (P dy \wedge dz \\ &\quad + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy) \\ &= (AP + BQ + CR) dx \wedge dy \wedge dz.\end{aligned}$$

即一次外微分形式与二次外微分形式的外积是三次外微分形式.

如此不难得出, 外微分形式的外积满足分配律和结合律. 即若  $\lambda, \mu, v$  是任意三个外微分形式, 则有

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \wedge v &= \lambda \wedge v + \mu \wedge v, \\ \lambda \wedge (\mu + v) &= \lambda \wedge \mu + \lambda \wedge v, \\ (\lambda \wedge \mu) \wedge v &= \lambda \wedge (\mu \wedge v).\end{aligned}$$

但是外微分形式的外积不满足交换律. 事实上, 若  $\lambda$  是  $p$  次外微分形式,  $\mu$  是  $q$  次外微分形式, 则有

$$\lambda \wedge \mu = (-1)^{pq} \mu \wedge \lambda.$$

### 8.6.2 外微分形式的外微分

关于外微分形式还可以引进微分算符  $d$ . 若  $\omega$  是零次微分形式, 即为函数  $f$ , 则定义

$$d\omega = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

$d$  就是通常的全微分算符. 若  $\omega$  是一次外微分形式

$$\omega = P dx + Q dy + R dz$$

则定义

$$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz.$$

即对系数  $P, Q, R$  求外微分后再分别与  $dx, dy, dz$  作外积. 为计算出它的最终形式, 将全微分  $dP, dQ, dR$  的表达式代入后给出

$$\begin{aligned}d\omega &= \left( \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \wedge dx \\ &\quad + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \right) \wedge dy\end{aligned}$$

$$+ \left( \frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) \wedge dz,$$

用外积所遵循的运算法则, 上式可简化成

$$\begin{aligned} d\omega &= \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx \\ &+ \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

所以一次外微分形式的外微分是二次外微分形式. 若  $\omega$  是二次外微分形式

$$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy,$$

同样定义

$$d\omega = dP \wedge dy \wedge dz + dQ \wedge dz \wedge dx + dR \wedge dx \wedge dy.$$

将  $dP, dQ, dR$  的表达式代入后并利用外积的性质立即得到

$$d\omega = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

所以二次外微分形式的外微分是三次外微分形式. 若  $\omega$  是三次外微分形式

$$\omega = Hdx \wedge dy \wedge dz,$$

则定义

$$d\omega = dH \wedge dx \wedge dy \wedge dz.$$

再代入  $dH$  的表达式

$$d\omega = \left( \frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial y} dy + \frac{\partial H}{\partial z} dz \right) \wedge dx \wedge dy \wedge dz.$$

展开后因为每一项都含有相同的两个微分, 由外积的运算法则即得

$$d\omega = 0.$$

就是三次外微分形式的外微分为零.

由于外微分形式的外微分仍是外微分形式, 因此对它还可以求外微分, 但是不难证明, 这种“二阶外微分”都为零. 即设  $\omega$  是任意外微分形式, 且系数具有连续的二阶偏微商, 则有

$$d^2\omega = d(d\omega) = 0.$$

### 8.6.3 一般的斯托克斯定理

有了外微分形式的概念以后,我们就可以把斯托克斯定理与高斯定理纳入统一的形式.

因为线积分与面积分都是定向的,而曲面面积元  $dS$  在三个坐标面上的投影  $dydz, dzdx, dxdy$  也是可正可负的量,所以斯托克斯定理可以改写成

$$\begin{aligned} \oint_L P dx + Q dy + R dz &= \iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz \\ &\quad + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx \\ &\quad + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

若把  $\omega = P dx + Q dy + R dz$  视为一次外微分形式,则它的外微分  $d\omega$  就是二次微分形式,且有

$$\begin{aligned} d\omega &= \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx \\ &\quad + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

因此斯托克斯定理又可写成

$$\oint_L \omega = \iint_S d\omega.$$

同样,由于曲面  $S$  是定向的,高斯定理可以改写成

$$\begin{aligned} &\iint_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy \\ &= \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

若把  $\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$  视为二次外微分形式,则它的外微分  $d\omega$  就是三次外微分形式,且有

$$d\omega = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

因此高斯定理也可简写成

$$\oint_S \omega = \iiint_V d\omega.$$

这样一来,斯托克斯定理和高斯定理就都可以统一成下述一般的斯托克斯定理.

**定理** 设  $\omega$  为外微分形式,  $d\omega$  是它的外微分, 则有

$$\int_{\partial G} \omega = \int_G d\omega.$$

其中  $G$  是  $d\omega$  的积分区域,  $\partial G$  表示  $G$  的边界.

这个定理可以推广到更高维的空间去, 它表达了高次外微分形式在区域  $G$  的边界  $\partial G$  的积分等于它的外微分  $d\omega$  在区域  $G$  上的积分.

### 习题 8.6

1. 计算下列外乘积:

- (1)  $(x dx + 7z^2 dy) \wedge (y dx - \sin 3x dy + dz)$ ;
- (2)  $(5 dx + 3 dy) \wedge (3 dx + 2 dy)$ ;
- (3)  $(6 dx \wedge dy + 27 dx \wedge dz) \wedge (dx + dy + dz)$ .

2. 计算下列外微分:

- (1)  $d(\cos y dx - \sin x dy)$ ;
- (2)  $d(2xy dx + x^2 dy)$ ;
- (3)  $d(6z dx \wedge dy - xy dx \wedge dz)$ .

3. 设  $\omega = f$  是零次外微分形式, 且  $f$  具有连续的二阶偏微商, 证明:

$$d^2 \omega = d(d\omega) = 0.$$

4. 设  $\omega = P dx + Q dy + R dz$  是一次外微分形式且系数  $P, Q, R$  具有连续的二阶偏微商, 证明:

$$d^2 \omega = d(d\omega) = 0.$$

## 8.7 梯度、散度与旋度在正交曲线坐标系下的表达式

场论中的梯度、散度与旋度都是与坐标系统无关的量,但为便于计算,前面已经导出了它们在直角坐标系下的表达式.而在物理上,常因问题的性质,需采用其它曲线坐标系,因此有必要再求出这三度在一般正交曲线坐标系下的表达式.

### 8.7.1 曲线坐标的概念

设由关系式

$$x = x(q_1, q_2, q_3), y = y(q_1, q_2, q_3), z = z(q_1, q_2, q_3)$$

联系着一组变量  $x, y, z$  与另一组变量  $q_1, q_2, q_3$ , 且对每组有序数  $(q_1, q_2, q_3)$  就完全确定了空间中一点  $M$  的直角坐标  $(x, y, z)$ ; 反之, 空间中每一点  $M$  的直角坐标  $(x, y, z)$  都对应着一组有序数  $(q_1, q_2, q_3)$ , 这时就称有序数组  $(q_1, q_2, q_3)$  为点  $M$  的曲线坐标, 而上述关系式又称为从曲线坐标  $(q_1, q_2, q_3)$  到直角坐标  $(x, y, z)$  的坐标变换.

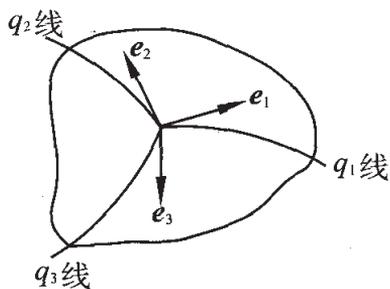


图 8.32

在坐标变换中, 分别令  $q_1, q_2, q_3$  取不同的常数值, 就得到三族不同的曲面, 称为坐标曲面. 不同族的坐标曲面相交而成的曲线称为坐标曲线. 如此, 在坐标曲面上, 曲线坐标之一例如  $q_i$ , 必为常数, 所以又称为  $q_i$  面; 而在坐标曲线上, 只有一个曲线坐标例如  $q_i$  变化, 所以又称为  $q_i$  线(图 8.32).

如果在空间中任意一点处, 坐标曲线都互相正交, 就称这种坐标系为正交曲线坐标系. 这时, 相应的各坐标曲面也互相正交. 因此, 若在正交曲线坐标系的  $q_1$  线,  $q_2$  线,  $q_3$  线的交点  $M$  处取这些坐标曲线的单位切向量  $e_1, e_2, e_3$ , 则它

们就互相垂直. 现在选定切向量  $e_1, e_2, e_3$  的正向分别指出  $q_1, q_2, q_3$  增加的一侧, 并假定构成右手系统. 于是, 这个系统一般说来是随点而变化的, 而且对于点  $M$  处的任意向量  $v$  就能有分解式

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3,$$

其中  $v_1, v_2, v_3$  分别是  $v$  在  $e_1, e_2, e_3$  方向上的投影.

再来考察坐标曲线的弧微分. 因为在  $q_1$  线上, 只有曲线坐标  $q_1$  变化, 而坐标  $q_2$  与  $q_3$  都保持不变, 所以

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1, dy = \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1, dz = \frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1,$$

由此可得

$$dl_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2} dq_1,$$

这就是  $q_1$  线的弧微分表达式. 同样可得  $q_2$  线,  $q_3$  线的弧微分表达式, 它们分别是

$$dl_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2} dq_2;$$

$$dl_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2} dq_3;$$

若记

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2},$$

则有

$$dl_i = H_i dq_i (i = 1, 2, 3),$$

其中  $H_i$  通常称为拉梅(Lame)系数, 它们都是曲线坐标  $q_1, q_2, q_3$  的函数.

**例** 求柱坐标系和球坐标系的拉梅系数.

在柱坐标系的情形, 点  $M$  的柱坐标  $(r, \varphi, z)$  与直角坐标  $(x, y, z)$  之间的关系为

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z.$$

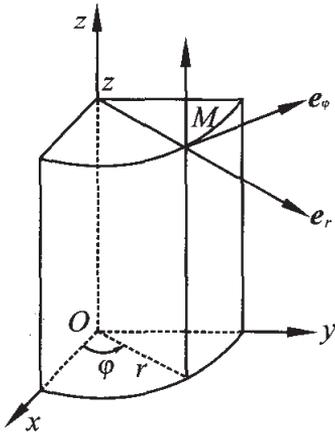


图 8.33

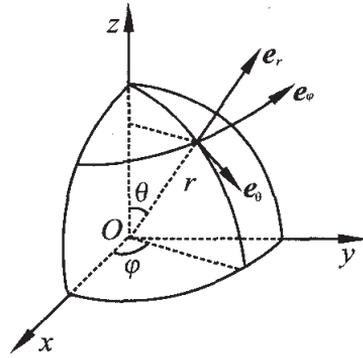


图 8.34

三族坐标曲面是以  $z$  轴为轴的柱面, 过  $z$  轴的半平面及与平面  $Oxy$  平行的平面, 它们分别称为  $r$  面,  $\varphi$  面及  $z$  面(图 8.33). 三族坐标曲线是  $r$  线,  $\varphi$  线及  $z$  线. 它们彼此相互正交而形成正交曲线坐标系. 在这些曲线上取单位切向量  $e_r, e_\varphi, e_z$  使构成右手正交系统, 于是由拉梅系数的定义得

$$H_r = 1, H_\varphi = r, H_z = 1.$$

而坐标曲线的弧微分依次为

$$dl_r = dr, dl_\varphi = d\varphi, dl_z = dz.$$

在球坐标系的情形, 点  $M$  的球坐标  $(r, \theta, \varphi)$  与直角坐标  $(x, y, z)$  之间的关系为

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, y = r \sin\theta \sin\varphi, z = r \cos\theta.$$

三族坐标曲面是以原点为心的球面,  $z$  轴为对称轴、顶点在原点的圆锥面及过  $z$  轴的半平面, 它们分别称为  $r$  面,  $\theta$  面及  $\varphi$  面(图 8.34) 三族坐标曲线是  $r$  线,  $\theta$  线及  $\varphi$  线, 它们彼此相互正交而构成正交曲线坐标系, 在这些曲线上取单位切向量  $e_r, e_\theta, e_\varphi$ , 使成右手正交系统, 于是得拉梅系数为

$$H_r = 1, H_\theta = r, H_\varphi = r \sin\theta.$$

而坐标曲线上的弧微分为

$$dl_r = dr, dl_\theta = r d\theta, dl_\varphi = r \sin\theta d\varphi.$$

此外,在正交曲线坐标系下,体积元素可用拉梅系数表达式

$$dV = dl_1 dl_2 dl_3 = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3.$$

特别在柱坐标系及球坐标系的情形应有

$$dV = r dr d\varphi dz,$$

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi.$$

这正是在三重积分的坐标变换中早已熟知的体积元素的表达式.

### 8.7.2 梯度的表达式

我们知道,数量场  $u(q_1, q_2, q_3)$  的梯度在  $q_i$  线的单位切向量  $e_i$  方向上的投影等于场  $u$  沿这个方向的微商,即

$$\text{grad}u \cdot e_i = \frac{\partial u}{\partial e_i}.$$

但由 8.1.3 的例 4 可知,这个方向微商也等于场  $u$  对  $q_i$  线的弧长  $l_i$  的微商  $\frac{du}{dl_i}$ . 在  $q_i$  线上,由于其它两个曲线坐标的微分为零,故有

$$du = \frac{\partial u}{\partial q_i} dq_i,$$

而  $dl_i = H_i dq_i$ , 所以

$$\frac{du}{dl_i} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial u}{\partial q_i},$$

于是

$$\text{grad}u \cdot e_i = \frac{du}{dl_i} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial u}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

由此即得正交曲线坐标系下梯度的表达式

$$\text{grad}u = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} e_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} e_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} e_3.$$

在柱坐标系与球坐标系的特殊情形,则分别有

$$\text{grad}u = \frac{\partial u}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} e_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} e_z;$$

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi.$$

### 8.7.3 散度的表达式

设在正交曲线坐标系下, 向量场  $\mathbf{v}$  可以表示成

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3.$$

今在点  $M(q_1, q_2, q_3)$  附近取由坐标曲面  $q_1 - \Delta q_1$  面,  $q_1 + \Delta q_1$  面,  $q_2 - \Delta q_2$  面,  $q_2 + \Delta q_2$  面,  $q_3 - \Delta q_3$  面,  $q_3 + \Delta q_3$  面所围成的小曲六面体, 这六面体的各面依次记为  $S_1^-, S_1^+, S_2^-, S_2^+, S_3^-, S_3^+$ , 它们都是很

小的曲边矩形(图 8.35). 考察场  $\mathbf{v}$  在左右二  $q_1$  面  $S_1^-$  及  $S_1^+$  所流过的通量. 这时在  $q_1 - \Delta q_1$  面  $S_1^-$  上, 外单位法向量  $\mathbf{n}$  为  $-\mathbf{e}_1$ , 而在  $q_1 + \Delta q_1$  面, 法向量  $\mathbf{n}$  为  $\mathbf{e}_1$ , 面积元素  $dS = H_2 H_3 dq_2 dq_3$ , 故得

$$\begin{aligned} \iint_{S_1^+ + S_1^-} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_D [(H_2 H_3 v_1)(q_1 + \Delta q_1, q_2', q_3')] \\ &\quad - (H_2 H_3 v_1)(q_1 - \Delta q_1, q_2', q_3')] dq_2' dq_3' \\ &= \iint_D \left[ \int_{q_1 - \Delta q_1}^{q_1 + \Delta q_1} \frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 v_1) dq_1' \right] dq_2' dq_3' \\ &= \iiint_G \frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 v_1) dq_1' dq_2' dq_3', \end{aligned}$$

其中  $D$  是矩形区域  $q_2 - \Delta q_2 \leq q_2' \leq q_2 + \Delta q_2, q_3 - \Delta q_3 \leq q_3' \leq q_3 + \Delta q_3$ .  $G$  是与  $D$  相应的长方体区域. 应用积分中值定理有

$$\iint_{S_1^+ + S_1^-} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 8 \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 v_1) \right]_{M_1} \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3;$$

同理, 通过前后  $q_2$  面  $S_2^-$  与  $S_2^+$  流出的通量为

$$\iint_{S_2^+ + S_2^-} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 8 \left[ \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 H_1 v_2) \right]_{M_2} \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3;$$

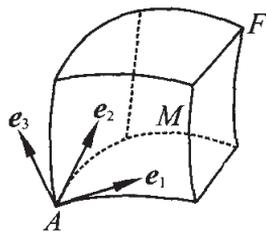


图 8.35  
 $A (q_1 - \Delta q_1, q_2 - \Delta q_2, q_3 - \Delta q_3)$   
 $F (q_1 + \Delta q_1, q_2 + \Delta q_2, q_3 + \Delta q_3)$

图 8.35

通过上下  $q_3$  面  $S_3^-$  与  $S_3^+$  流出的通量为

$$\iint_{S_3^+ + S_3^-} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 8 \left[ \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 v_3) \right]_{M_3} \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3;$$

其中  $M_1, M_2$  及  $M_3$  是小曲面六面体内的三点. 于是从此小曲面六面体内向外流出的总通量为

$$\begin{aligned} \oiint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = & 8 \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 v_1) \right]_{M_1} + \left[ \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 H_1 v_2) \right]_{M_2} \right. \\ & \left. + \left[ \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 v_3) \right]_{M_3} \right\} \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3. \end{aligned}$$

而曲面六面体的体积为  $\Delta V = 8H_1 H_2 H_3 \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3$ , 故在点  $M$  附近单位体积中平均流出的通量等于

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta V} \oiint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = & \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 v_1) \right]_{M_1} \right. \\ & \left. + \left[ \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 H_1 v_2) \right]_{M_2} + \left[ \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 v_3) \right]_{M_3} \right\}. \end{aligned}$$

当曲面六面体收缩至点  $M$  取极限就得出

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} = & \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 v_1) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 H_1 v_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 v_3) \right]. \end{aligned}$$

这就是散度在正交曲线坐标系下的表达式. 在柱坐标系和球坐标系的特殊情形, 散度的表达式就分别化成

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

与

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}.$$

如果  $\mathbf{v}$  是一有势场, 势函数是  $u$ , 这时有  $\mathbf{v} = \operatorname{grad} u$ , 则由  $\Delta u = \operatorname{div} (\operatorname{grad} u)$  可得拉普拉斯算符在正交曲线坐标系下的表达式

$$\Delta u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right].$$

特别在柱坐标系和球坐标系下拉普拉斯算符分别可以表成

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

与

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

#### 8.7.4 旋度的表达式

设在正交曲线坐标系中, 向量场  $\mathbf{v}$  与其旋度  $\text{rot} \mathbf{v}$  分别可以表成

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3,$$

$$\text{rot} \mathbf{v} = g_1 \mathbf{e}_1 + g_2 \mathbf{e}_2 + g_3 \mathbf{e}_3.$$

为求出  $g_1$  的表达式, 在  $q_1$  面上取由坐标曲线——对应于曲线坐标  $q_3 - \Delta q_3, q_3 + \Delta q_3$  的两条  $q_2$  线与对应于曲线坐标  $q_2 - \Delta q_2, q_2 + \Delta q_2$  的两条  $q_3$  线——所围成的曲边矩形, 使点  $M(q_1, q_2, q_3)$  含于其内(图 8.36). 矩形的周界与四条曲边分别记成  $l$  与  $l_1, l_2, l_3, l_4$ . 考察场  $\mathbf{v}$  沿  $l$  的环量. 因

为在  $l_1$  上, 单位切向量  $\boldsymbol{\tau}$  为  $\mathbf{e}_2$ , 而在  $l_3$  上  $\boldsymbol{\tau}$  为  $-\mathbf{e}_2$ , 所以

$$\begin{aligned} \int_{l_1+l_3} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dl &= \int_{q_2-\Delta q_2}^{q_2+\Delta q_2} [(H_2 v_2)(q_1, q_2', q_3 - \Delta q_3) \\ &\quad - (H_2 v_2)(q_1, q_2', q_3 + \Delta q_3)] + dq_2' \\ &= - \iint_D \left( \frac{\partial}{\partial q_3} H_2 v_2 \right) (q_1, q_2', q_3') dq_2' dq_3', \end{aligned}$$

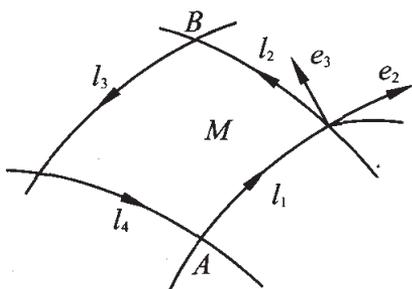


图 8.36

其中  $D$  是矩形区域

$$q_2 - \Delta_2 q_2 \leq q_2' \leq q_2 + \Delta_2 q_2, q_3 - \Delta_3 q_3 \leq q_3' \leq q_3 + \Delta_3 q_3.$$

应用积分中值定理得

$$\int_{l_1+l_3} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = -4 \left( \frac{\partial}{\partial q_3} H_2 v_2 \right)_{M_1} \cdot \Delta q_2 \Delta q_3,$$

其中  $M_1$  是曲边矩形中的一点. 在  $l_2$  上单位切向量  $\boldsymbol{\tau}$  为  $\mathbf{e}_3$ , 而在  $l_4$  上  $\boldsymbol{\tau}$  为  $-\mathbf{e}_3$ , 所以

$$\begin{aligned} \int_{l_2+l_4} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dl &= \int_{q_3-\Delta q_3}^{q_3+\Delta q_3} [(H_3 v_3)(q_1, q_2 + \Delta q_2, q_3) \\ &\quad - (H_3 v_3)(q_1, q_2 - \Delta q_2, q_3')] dq_3' \\ &= \iint_D \left( \frac{\partial}{\partial q_2} H_3 v_3 \right) (q_1, q_2', q_3') dq_2' dq_3'. \end{aligned}$$

应用积分中值定理得

$$\int_{l_2+l_4} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = 4 \left( \frac{\partial}{\partial q_2} H_3 v_3 \right)_{M_2} \Delta q_2 \Delta q_3,$$

其中  $M_2$  也是曲边矩形中的一点. 从而场  $v$  沿  $l$  的环量为

$$\int_l \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = 4 \left[ \left( \frac{\partial}{\partial q_2} H_3 v_3 \right)_{M_2} - \left( \frac{\partial}{\partial q_3} H_2 v_2 \right)_{M_1} \right] \Delta q_2 \Delta q_3.$$

但曲边矩形的面积是  $\Delta S = 4H_2 H_3 \Delta q_2 \Delta q_3$ , 故在点  $M$  附近单位面积上的平均环量是

$$\frac{1}{\Delta S} \int_l \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = \frac{1}{H_2 H_3} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial q_2} H_3 v_3 \right)_{M_2} - \left( \frac{\partial}{\partial q_3} H_2 v_2 \right)_{M_1} \right].$$

当曲边矩形收缩到点  $M$  并过渡到极限就得到

$$g_1 = \text{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1 = \frac{1}{H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 v_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (H_2 v_2) \right];$$

同样得到

$$g_2 = \text{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2 = \frac{1}{H_3 H_1} \left[ \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 v_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (H_3 v_3) \right];$$

$$g_3 = \text{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_3 = \frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 v_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 v_1) \right].$$

由此即得旋度在正交曲线坐标系下的表达式为

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \begin{vmatrix} H_1 \mathbf{e}_1 & H_2 \mathbf{e}_2 & H_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1 v_1 & H_2 v_2 & H_3 v_3 \end{vmatrix}.$$

在柱坐标系和球坐标系的特殊情形下, 这个旋度表达式就分别化成

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{v} &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r \\ &\quad + \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z; \\ \operatorname{rot} \mathbf{v} &= \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\varphi) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right] \mathbf{e}_r \\ &\quad + \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\varphi) \right] \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned}$$

### 习题 8.7

#### 1. 设有正交坐标变换

$$x = a \operatorname{ch} \eta \cos \varphi, 0 \leq \eta < \infty;$$

$$y = a \operatorname{sh} \eta \sin \varphi, 0 \leq \theta \leq 2\pi;$$

$$z = z, -\infty < z < +\infty;$$

其中曲线坐标 $(\eta, \varphi, z)$ 称椭圆柱坐标, 试求它的坐标曲面, 拉梅系数及梯度、散度、旋度的表达式.

#### 2. 设有正交坐标变换

$$x = a \operatorname{sh} \eta \sin \theta \cos \varphi, 0 \leq \eta < +\infty;$$

$$y = a \operatorname{sh} \eta \sin \theta \sin \varphi, 0 \leq \theta < \pi;$$

$$z = a \operatorname{ch} \eta \cos \theta, 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

其中曲线坐标 $(\eta, \theta, \varphi)$ 称旋转椭球坐标, 试求它的坐标曲面, 拉梅系数及梯度、散度、旋度的表达式.

## 复 习 题

1. 设曲线  $L$  是椭圆抛物面  $z = 3x^2 + 4y^2$  与椭圆柱面  $4x^2 + y^2 = 4y$  的交线, 从  $z$  轴的正方向看,  $L$  的方向是顺时针方向, 求向量场

$$\mathbf{v} = y(z+1)\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + (xy-z)\mathbf{k}$$

沿  $L$  的环量.

2. 设  $S$  是由方程  $z = x^2 + 4y^2$  ( $x^2 + 4y^2 \leq 4$ ) 所确定的曲面块的下侧, 求

$$\iint_S [x + g(y, z)] dydz,$$

其中  $g(y, z)$  是  $(y, z)$  的连续函数.

3. 设  $L$  是  $Oxy$  平面上的光滑的简单闭曲线, 逆时针方向, 立体  $V$  是柱体, 它以  $L$  为准线, 以  $L$  在  $Oxy$  平面内所围平面区域  $D$  为底, 侧面是母线平行于  $z$  轴的柱面, 高为 1, 试写出向量场  $\mathbf{v} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$  在  $V$  上的高斯公式, 并由此来证明格林公式.

4. 设  $V$  是由球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$  与锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  所围成的区域, 点  $(0, 0, R) \in V$ , 试用直接计算来验证

$$\oiint_S P dydz = \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dV, \quad \oiint_S Q dzdx = \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dV,$$

其中  $P = Q = x^3 + y^3$ ,  $S$  是  $V$  的外侧.

5. 设  $f(x)$  和  $g(x)$  是单变量可微函数, 且  $f(0) = 1$ , 问  $f(x)$  和  $g(x)$  满足什么条件时, 向量场

$$\mathbf{v} = (zf(x) + yz)\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + (xg(z) + xy)\mathbf{k}$$

是保守场? 并求出其全部势函数.

6. 设  $V$  是由光滑的简单闭曲面  $S$  所围成的区域,  $\mathbf{n}$  是  $S$  的外法向单位向量,  $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_2\mathbf{k}$  是常向量, 试证

$$\begin{aligned} & \oint_S \mathbf{n} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{v}) dS \\ &= \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{v} dV \mathbf{a} - \iiint_V \left( a_1 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + a_3 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right) dV. \end{aligned}$$

7. 设  $L$  是平面上的闭路, 二元函数  $\varphi$  和  $\psi$  有连续的二阶偏微商,  $\tau$  是  $L$  的指向指定方向的单位切向量, 试证

$$\oint_L \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right) dl = 0,$$

其中  $\frac{\partial f}{\partial \tau}$  表示二元函数  $f$  沿  $\tau$  方向的方向导数.

8. 设  $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$  是区域  $V$  内的一次微分形式. 如果存在三元函数  $\varphi$ , 使得  $Pdx + Qdy + Rdz = d\varphi$ , 则称  $\omega$  为恰当微分形式; 若在区域  $V$  内处处有  $d\omega = 0$ , 则称  $\omega$  为闭形式. 设  $V$  是一个“曲面”单连通区域,  $P, Q$  和  $R$  都属于  $C^2(V)$ , 试证一次微分形式  $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$  是闭的当且仅当  $\omega$  是恰当的.

## 9 无穷级数

客观世界是千变万化的,仅用初等函数难以完全描述它的各种复杂的数量关系,这就要求人们去构造一些新的函数.由于初等函数有限次运算仍是初等函数,为了产生新函数,则必考虑无限次运算,而最简单的运算是加法,把无穷多个初等函数

$$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$$

叠加起来,可能产生新的非初等函数

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

无穷级数是构造新函数的一个重要途径.本章首先研究数项级数,它是级数理论的基础;然后讨论函数项级数,并引出它的特殊形式幂级数.最后讨论如何把函数展开成幂级数.

### 9.1 数项级数

#### 9.1.1 无穷级数的基本概念

设有数列  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , 把它们依次相加, 得形式和

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

称为无穷级数, 其中  $a_n$  称为级数的一般项或通项.

这里的相加仅仅是形式上的, 因为无穷多个数无法逐一相加求和, 那么无穷个数相加的含义是什么呢? 我们给出下面的

**定义** 无穷级数(1)的前  $n$  项的和

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

称为这级数的第  $n$  个部分和; 级数和是指这些部分和构成的数列

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$$

当  $n \rightarrow \infty$  时的极限:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

若此极限存在且有限,则称级数(1)收敛.如果数列 $\{S_n\}$ 没有有限的极限,就说级数(1)是发散的.

由此可见,无穷级数的收敛问题归结为其前  $n$  项的和构成的数列 $\{S_n\}$ 的极限存在问题.反之,研究数列 $\{a_n\}$ 的极限存在问题也可以化为级数

$$a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n-1}) + \dots$$

的收敛问题.数列与级数之间存在的这种密切关系,使我们能够应用已经知道的有关数列的知识去建立无穷级数的相应理论.

例 1 最简单的无穷级数是等比级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$$

如果公比  $|q| \neq 1$ ,则级数的部分和为

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

当  $|q| < 1$  时,由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - q}$ ,因此这时级数收敛,其和  $S = \frac{1}{1 - q}$ ;当  $|q| > 1$  时,由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ ,这时级数发散;当  $q = 1$  时,级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + 1 + \dots + 1 + \dots \quad (2)$$

其部分和  $S_n = n$ ,当  $n \rightarrow \infty$  时,极限为无穷,故级数(2)发散.当  $q = -1$  时,级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad (3)$$

其部分和

$$S_n = \begin{cases} 0 & n \text{ 为偶数} \\ 1 & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

当  $n \rightarrow \infty$  时, 没有极限, 故级数(3) 发散. 综上所述, 等比数列

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  只有当  $|q| < 1$  时才是收敛的.

### 例 2 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n} = \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} + \cdots$$

的部分和

$$\begin{aligned} S_n &= (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + (\ln(n+1) - \ln n) \\ &= \ln(n+1) \end{aligned}$$

显然  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ , 故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$  发散.

研究无穷级数, 最基本的问题是判断它的敛散性, 即收敛或发散性. 只有在级数收敛的情况下, 讨论它的求和问题才有意义, 下面给出收敛的无穷级数的简单性质.

**性质 1** 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**证** 设收敛级数的部分和  $S_n$  的极限为  $S$ , 由于  $a_n = S_n - S_{n-1}$ , 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

由此可见, 如果级数的通项  $a_n$  不趋于零, 则它一定发散. 可以用这个性质判断一些级数的发散性. 例如:

级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$  发散, 这是因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$$

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$  发散, 这是因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = 1 \neq 0$$

必须注意,通项趋于零仅是级数收敛的必要条件,并不充分;有的级数即使通项趋于零仍可能是发散的,如例 2,它的通项  $\ln \frac{n+1}{n}$  趋于零而级数却是发散的.

无穷级数的和既然是有限和的极限,因此具有一些有限和的性质.

**性质 2** 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  都收敛,则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  也收敛,且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

其中  $c$  是任意常数.

**证** 我们证明第二个等式,命

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k, B_n = \sum_{k=1}^n b_k, S_n = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)$$

显然有  $S_n = A_n + B_n$ ,由假定  $A_n, B_n$  都收敛,因此  $S_n$  也收敛,且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n + \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

另一等式可同法证明.

**性质 3** 在级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  前面去掉有限项或加上有限项,不影响级数的敛散性.

**证** 设把级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  去掉前  $k$  项后得另一级数

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = a_{k+1} + a_{k+2} + \dots$$

用  $S_n$  表示第一个级数的前  $n$  项的部分和,用  $\sigma_{n-k}$  表示第二个级数

前  $n-k$  项的部分和,显然有

$$S_n - \sigma_{n-k} = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$

而  $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$  是一与  $n$  无关的常数,故当  $n \rightarrow \infty$  时,数列  $S_n$  与  $\sigma_{n-k}$  具有相同的敛散性,即级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与  $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$  有相同的敛散性. 同样可以证明,加上有限项也不影响级数的敛散性.

**性质 4** 收敛级数的项加括号后所成的新级数仍收敛,且其和不变.

**证** 设原级数的部分和数列为

$$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots \quad (4)$$

它有极限  $S$ .

现将原级数的项加括号后得新级数

$$(a_1 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}) + (a_{n_2+1} + \cdots + a_{n_k}) + \cdots \quad (5)$$

显然级数(5)的部分和数列为

$$S_{n_1}, S_{n_2}, \cdots, S_{n_k}, \cdots$$

它是数列(4)的一个子数列,因而与(4)有相同的极限  $S$ .

由此得知,若加括号后所成的级数发散,则原级数必发散. 但必须注意,这个命题的逆命题是不成立的. 即若级数(5)收敛,不能断言原级数一定收敛,如级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$  是发散的,但把它的项两两结合,便得一收敛级数

$$(1-1) + (1-1) + \cdots = 0$$

为了说明无穷级数的交换律与分配律是否成立,先作如下准备.

### 9.1.2 正项级数

如何判断一个级数是否收敛呢?先讨论正项级数,它是最基本的级数,与一般级数的敛散问题有密切关系.

如果  $a_n \geq 0 (n = 1, 2, \dots)$  则称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  为正项级数. 正项级数的部分和构成一单调不减数列

$$S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_n \leq \dots$$

由此可得

**定理 1** 正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛的充分必要条件是它的部分和数列  $\{S_n\}$  有界.

**证** 必要性显然, 下证充分性.

设  $\{S_n\}$  有界, 则因  $\{S_n\}$  是单调不减数列, 故  $\{S_n\}$  有极限, 即  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

由于正项级数的部分和  $\{S_n\}$  是单调不减数列, 它只有两种可能, 若  $S_n$  有界, 则有有限的极限; 若  $S_n$  无界, 则必发散于正无穷.

**例 1** 证明级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$  收敛.

**证** 因为级数的部分和是有界的,

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \\ &= 2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 3 - \frac{1}{n} < 3 \end{aligned}$$

所以所给级数是收敛的. 稍后就会知道, 它的和就是自然对数的底  $e$ .

应用定理 1 直接证明某些正项级数的部分和有界通常是不容易的, 但可由定理 1 推导出较方便的比较判断法: 只须用一个已知敛散的级数和要判别的级数作比较便能得出结论.

**定理 2(比较判别法)** 设有两个正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , 如果从某项开始有不等式

$$a_n \leq b_n \quad (n > N)$$

那么

(i) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也收敛;

(ii) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  也发散.

**证** 因为调换级数前面有限项不改变级数的敛散性, 故不妨设不等式  $a_n \leq b_n$  对一切  $n$  成立, 命

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k, B_n = \sum_{k=1}^n b_k$$

显然有

(i) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 则  $B_n$  有界, 因而  $A_n$  也有界, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

(ii) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散, 则  $A_n$  无界. 由上不等式知  $B_n$  无界, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散.

**例 2** 证明调和级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散.

**证** 利用不等式

$$x > \ln(1+x) \quad (x > 0)$$

故对任意自然数  $n$  有

$$\frac{1}{n} > \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

由 9.1.1 例 2 知,  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$  发散, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散.

例3 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  称为  $p$ -级数, 讨论它的敛散性.

解 前例已证明, 当  $p = 1$  时, 调和级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散. 当  $p < 1$  时, 由于

$$\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

据比较判别法, 当  $p \leq 1$  时原级数发散.

当  $p > 1$  时, 取级数的第  $2^k - 1$  个部分和, 并由第二项起依次分段加括号, 每段分别有  $2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{k-1}$  项, 即

$$\begin{aligned} S_{2^k-1} &= 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \dots \\ &\quad + \left(\frac{1}{(2^{k-1})^p} + \dots + \frac{1}{(2^k-1)^p}\right) \\ &< 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p}\right) + \dots \\ &\quad + \left(\frac{1}{(2^{k-1})^p} + \dots + \frac{1}{(2^{k-1})^p}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{(2^{p-1})^2} + \dots + \frac{1}{(2^{p-1})^{k-1}} \end{aligned}$$

而后者的和显然不超过公比为  $\frac{1}{2^{p-1}}$  的等比级数的和

$$M = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{p-1}}}$$

因此  $S_{2^k-1}$  有上界  $M$ , 于是不难推知级数的任意部分和也以  $M$  为上界, 所以当  $p > 1$  时级数收敛.

例4 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n!}$  收敛.

证 因为对任意自然数  $n$  有

$$\frac{(n!)^2}{2n!} = \frac{n!}{2^n \cdot (2n-1)!!} \leq \frac{1}{2^n}$$

而等比级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  收敛, 所以原级数收敛.

例 5 证明级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$  是发散的.

证 因为当  $n \geq 2$  时有不等式

$$\ln n < n$$

推得

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$$

但调和级数是发散的, 故原级数发散.

作为比较判别法的推论, 再来导出更为适用的比较判别法的极限形式.

定理 3 设有正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  ( $b_n \neq 0$ ) 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A$ ,

那么

(i) 若  $0 < A < +\infty$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  同敛散;

(ii) 若  $A = 0$ , 则当  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也收敛;

(iii) 若  $A = +\infty$ , 则当  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也发散.

证 (i) 当  $0 < A < +\infty$ , 取  $\epsilon = \frac{A}{2}$ , 存在  $N$ , 当  $n > N$  时有

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - A \right| < \frac{A}{2}$$

即

$$\frac{A}{2} b_n < a_n < \frac{3A}{2} b_n$$

如果  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 则从上面的右半不等式得知,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也收敛; 如果

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散, 则从左半不等式得知  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也发散, 因而二者同敛散.

(ii) 当  $A = 0$ , 取  $\varepsilon = 1$ , 存在  $N$ , 当  $n > N$  时

$$0 < \frac{a_n}{b_n} < 1$$

即

$$a_n < b_n$$

故当  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也收敛.

同理证明(iii).

例6 研究级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{\sqrt{(n^2+1)(n^3+2)}}$  的敛散性.

解 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+3}{\sqrt{(n^2+1)(n^3+2)}}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = 1$$

而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$  是收敛的, 故原级数收敛.

例7 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$  是发散的, 这是因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

由调和级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散推知原级数也发散.

从上几例可以看出, 用比较判别法判别一个级数的敛散性时, 常取  $p$ -级数作比较, 这说明  $p$ -级数在研究级数的敛散性上有重要作用.

同时还看到,只要  $p > 0$ , 都有  $\frac{1}{n^p} \rightarrow 0$ , 但级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  只有  $p > 1$  时才收敛; 这说明  $a_n \rightarrow 0$  只是级数收敛的必要条件, 而正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛取决于  $a_n \rightarrow 0$  的速度.

如果把已给的级数与等比级数进行比较, 立即得到在应用上极为方便的柯西判别法与达朗倍尔判别法.

**定理 4 (Cauchy 判别法)** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  是一正项级数, 且有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ , 则

(i) 当  $q < 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

(ii) 当  $q > 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

**证** (i) 当  $q < 1$  时, 可取正数  $\varepsilon$  充分小, 使得  $q + \varepsilon < 1$ , 于是当  $n$  充分大时, 有

$$\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon < 1 \text{ 或 } a_n < (q + \varepsilon)^n = b_n,$$

且  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛.

由定理 2 知  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

(ii) 当  $q > 1$  时, 则可取定这样小的正数  $\varepsilon$ , 使得  $q - \varepsilon > 1$ , 于是当  $n$  充分大时有

$$\sqrt[n]{a_n} > q - \varepsilon > 1 \text{ 或 } a_n > (q - \varepsilon)^n = b_n,$$

且  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散.

由定理 2 知  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

**例 8** 级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$  是收敛的.

因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1$$

例 9 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$  是发散的.

因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1$$

必须注意, 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ , 则对级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的敛散性不能下任何断言. 例如,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  是发散的,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  是收敛的, 但都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ .

**定理 5 (D'Alembert 判别法)** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  是正项级数, 且有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \text{ 则}$$

(i) 当  $q < 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

(ii) 当  $q > 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

证明方法与定理 4 完全类似, 就不在此叙述了. 但同样应注意, 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ , 则对于级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的敛散性也不能下任何断言. 仍以级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  为例, 前者发散的, 后者是收敛的, 但都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ .

例 10 讨论级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{x}{n}\right)^n$  ( $x \geq 0$ ) 的敛散性.

解 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{n! \left(\frac{x}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{x}{e}$$

故级数当  $x > e$  时发散, 而当  $0 \leq x < e$  时收敛.

**例 11** 研究级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$  ( $x > 0$ ) 的敛散性.

**解** 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^{n+1}} = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

因此原级数对任何  $x > 0$  都收敛.

Cauchy 判别法与 D'Alembert 判别法使用起来比较方便, 但当  $q = 1$  时都失效, 故适用面都不算宽, 因为它们只能判断一些比某个几何级数收敛得还快的级数. 在判别级数的敛散性时可考虑柯西积分判别法.

**定理 6** (Cauchy 积分判别法) 设  $f(x)$  是定义在  $x \geq 1$  上非负不增的连续函数, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) + \cdots$$

与积分  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  同敛散.

**证** 由于  $f(x)$  是不增的, 故当  $k \leq x \leq k+1$  时有

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

从  $k$  到  $k+1$  积分后得

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k)$$

将这些不等式对  $k$  求和有

$$\sum_{k=1}^n f(k+1) \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k)$$

如果  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 则从上面左半不等式知,  $\sum_{k=1}^n f(k+1)$  有界,

因而  $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$  收敛; 如果  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  发散, 则从上面右半不等式得

知  $\sum_{k=1}^n f(k)$  无界, 因而级数  $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$  发散.

利用柯西积分判别法, 再来考虑  $p$ -级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  的敛散性, 这时通项  $f(n) = \frac{1}{n^p}$ ; 显然  $f(x) = \frac{1}{x^p}$  在  $x \geq 1$  上非负不增, 且积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1 \\ \infty, & p \leq 1 \end{cases}$$

所以  $p$ -级数当  $p > 1$  时收敛, 当  $p \leq 1$  时发散.

例 12 证明级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^a n}$  当  $a > 1$  时收敛,  $a \leq 1$  时发散.

证 据柯西积分判别法, 这级数与积分  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^a x} dx$  同敛散.

而

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^a x} dx = \begin{cases} \frac{(\ln 2)^{1-a}}{a-1}, & \text{当 } a > 1 \\ \infty, & \text{当 } a \leq 1 \end{cases}$$

所以原级数当  $a > 1$  时收敛,  $a \leq 1$  时发散.

### 9.1.3 交错级数

在研究一般的变号级数以前, 先考察其特殊的一种——交错级数, 即它的各项是正负相间的. 记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

其中  $a_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$ . 对于这类级数, 除了收敛的必要条件通项  $a_n \rightarrow 0$  外, 还要补充什么条件才能保证它收敛呢? 我们有下面的

**定理(莱布尼兹 Leibnitz 判别法)** 如果  $a_n$  单调减趋于 0, 那

么交错级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  收敛.

**证** 考察级数的前  $2n$  项的部分和

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

由于  $a_n$  单调减,  $a_{2n-1} - a_{2n} \geq 0$ , 所以

$$S_{2n} \geq S_{2n-2}$$

即  $S_{2n}$  是一单调不减数列; 又因为

$$\begin{aligned} S_{2n} &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \\ &\leq a_1 \end{aligned}$$

即  $S_{2n}$  有上界  $a_1$ , 故  $S_{2n}$  是一收敛数列. 设其极限为  $S$ , 又

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$$

由假设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = S$$

级数部分和  $S_n$  的偶数项子列  $S_{2n}$  和奇数项子列  $S_{2n+1}$  有相同的极

限  $S$ , 故  $S_n$  也以  $S$  为极限, 即  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  收敛.

顺便指出, 如果在这个级数中用部分和  $S_n$  去代替它的和数  $S$ , 这时所产生的误差是

$$|S - S_n| = |a_{n+1} - a_{n+2} + \dots|$$

但

$$|a_{n+1} - a_{n+2} + \dots| = a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \dots < a_{n+1}$$

所以

$$|S - S_n| < a_{n+1}$$

即误差不超过舍去的项中第一项的绝对值, 这个结论在今后近似计算作误差估计时很有用.

例 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  是交错级数, 且  $a_n = \frac{1}{n}$  单调减趋于零, 所以它是收敛的. 以后将会看到它的和是  $\ln 2$ . 若取

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

作为  $\ln 2$  的近似值, 则所产生的误差不超过  $\frac{1}{n+1}$ .

#### 9.1.4 级数收敛的一般判别法

由于级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的敛散性等价于它的部分和数列  $\{S_n\}$  的敛散性. 利用数列的 Cauchy 收敛原理, 即数列  $\{S_n\}$  收敛的充分必要条件是: 对任给的  $\varepsilon > 0$ , 存在自然数  $N$ , 当  $n > N$  时, 不等式

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

对一切自然数  $p$  成立. 又注意到

$$S_{n+p} - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}$$

从而立即推出判别一般级数收敛性的柯西准则.

**定理 1 (Cauchy 准则)** 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛的充分必要条件是: 对任给的正数  $\varepsilon$ , 存在自然数  $N$ , 当  $n > N$  时, 不等式

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

对一切自然数  $p$  成立.

这个定理告诉我们, 在收敛级数充分靠后的地方任意截取一段 (不论这一段包括多少项) 它的绝对值可以小于任意事先指定的正数  $\varepsilon$ .

柯西准则适用于一切级数, 因而用它去判别某些具体级数的敛散性并不方便. 下面我们介绍两个一般变号级数的判别定理, 先证引理.

**Abel 引理** 设有两组实数  $a_1, a_2, \cdots, a_n$  与  $b_1, b_2, \cdots, b_n$ , 如果有

(i)  $b_i (i = 1, 2, \dots, n)$  为单调的;

(ii)  $S_k = \sum_{i=1}^k a_i$  有界, 即  $|S_k| \leq M (k = 1, 2, \dots, n)$ , 则有

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq M(|b_1| + 2|b_n|)$$

证 由  $a_k = S_k - S_{k-1}$  得

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

$$= S_1 b_1 + (S_2 - S_1) b_2 + \dots + (S_n - S_{n-1}) b_n$$

$$= S_1 (b_1 - b_2) + S_2 (b_2 - b_3) + \dots + S_{n-1} (b_{n-1} - b_n) + S_n b_n$$

由于  $b_i$  为单调的, 因而每个  $b_i - b_{i+1} (i = 1, 2, \dots, n-1)$  都是同符号的, 又  $|S_i| \leq M (i = 1, 2, \dots, n)$ , 则有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| &\leq \sum_{i=1}^{n-1} |b_i - b_{i+1}| |S_i| + |S_n| |b_n| \\ &\leq M \left| \sum_{i=1}^{n-1} (b_i - b_{i+1}) \right| + M |b_n| \\ &\leq M(|b_1| + 2|b_n|) \end{aligned}$$

特别, 在引理中如果  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$ , 则

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq M(b_1 - b_2) + \dots + M(b_{n-1} - b_n) + M b_n = M b_1$$

**定理 2 (Dirichlet 判别法)** 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  满足下面两个条件:

件:

(i) 数列  $\{b_n\}$  单调减趋于零,

(ii)  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  有界, 即  $|S_n| \leq M (n = 1, 2, \dots)$ ,

那么级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛.

证 由条件(ii)得

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| = |S_{n+p} - S_n| \leq 2M$$

再据 Abel 引理

$$|a_{n+1} b_{n+1} + a_{n+2} b_{n+2} + \dots + a_{n+p} b_{n+p}| \leq 2M b_{n+1}$$

由于  $\{b_n\}$  趋于零, 故对任给的正数  $\varepsilon$ , 存在自然数  $N$ , 当  $n > N$  时,

$$|b_{n+1}| < \frac{\varepsilon}{2M};$$
 于是当  $n > N$  时

$$|a_{n+1}b_{n+1} + \cdots + a_{n+p}b_{n+p}| < \varepsilon$$

对任意自然数  $p$  成立. 根据柯西准则, 故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛.

如果在上面的级数中取  $a_n = (-1)^{n-1}$ , 则显然有

$$|S_n| = \left| \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \right| \leq 1$$

故当  $\{b_n\}$  单调下降趋于零时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$  收敛, 这就是莱布尼兹判别法. 可见莱布尼兹判别法只是迪里赫勒判别法的一种特殊情形. 此外从定理 2 还可以得到很重要的阿贝尔判别法.

**定理 3 (Abel 判别法)** 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  满足下面两个条件:

(i) 数列  $\{b_n\}$  单调有界,

(ii) 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛,

则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛.

**证** 因为  $\{b_n\}$  单调有界, 故存在有限的极限  $b$ . 不妨设  $\{b_n\}$  单调减趋于  $b$ , 则  $\{b_n - b\}$  是单调减趋于零的数列. 又因为  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收

敛, 则部分和有界. 据 Dirichlet 判别法, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_n - b)$  收敛, 于是级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_n - b) + b \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

也收敛.

**例 1** 研究级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$  的收敛性.

解 取  $b_n = \frac{1}{n}$ ,  $a_n = \cos nx$ , 则数列  $\{b_n\}$  单调减趋于零, 且

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n \cos kx \right| = \left| \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{1}{2}x} \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}$$

因此只要  $x$  不是  $2\pi$  的整数倍,  $\sum_{k=1}^n a_k$  有界, 故由 Dirichlet 判别法知, 所给级数在  $x \neq 2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  时收敛.

事实上, 当  $x = 2k\pi$  时, 上面的级数就变成调和级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , 因而是发散的.

例 2 研究级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  的收敛性.

解 由例 1 知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{n}$  收敛, 而数列  $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right\}$  单调减有界, 故由 Abel 判别法知此级数收敛.

易见, 能用 Abel 判别法判别收敛的级数, 也可以用 Dirichlet 判别法, 但反之未必.

### 9.1.5 绝对收敛与条件收敛

变号级数的每项都取绝对值得正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ , 称为  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的绝对值级数.

对于变号级数还有一个更简单的判定收敛的定理.

定理 1 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也收敛.

证 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  收敛, 据柯西准则, 对任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N$ , 当  $n > N$  时

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon$$

对任意自然数  $p$  成立. 于是, 当  $n > N$  时, 不等式

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon$$

对任意自然数  $p$  成立, 因而  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

由定理 1 易知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{e^n}$$

都是收敛的.

但必须注意, 定理 1 的逆定理不成立. 即当  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 未必有

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  收敛. 交错级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  就是这样的例子.

由此可见, 收敛的变号级数可以分成两类: 一类是  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  收敛; 另一类是  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  发散, 但  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛; 我们把前一类级数叫做绝对收敛级数, 后一类叫做条件收敛级数.

例如上面例题  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{e^n}$  都是绝对收敛级数, 而  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  是条件收敛级数.

**例 1** 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos n}{n}$  条件收敛.

**证** 由 9.1.4 例 1 知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi + n)}{n}$$

收敛, 但  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{\cos n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n}$  是发散的. 事实上

$$\frac{|\cos n|}{n} \geq \frac{\cos^2 n}{n}$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}$$

如果  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n}$  收敛, 则因  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}$  收敛, 便推得调和级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

收敛, 这是不可能的, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n}$  发散, 即得  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n}$  发散.

绝对收敛级数与条件收敛级数具有一些完全不同的性质. 我们知道, 有限个数相加满足结合律、交换律与分配律, 它们给有限个数相加带来很大的方便. 而级数是无限个数相加, 是否也满足结合律、交换律与分配律(指两个级数相乘)呢? 由 9.1.1 性质 4 知, 收敛级数满足结合律. 对于交换律与分配律, 只有绝对收敛级数回答是肯定的.

**定理 2** 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛, 则任意交换此级数各项顺序后所得的新级数也绝对收敛, 且其和不变.

**证** 先证这个定理对于收敛的正项级数是成立的. 设正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛于和  $S$ , 又设任意交换级数各项的顺序后所得的新级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ , 易知新级数的任何一个部分和  $\sum_{n=1}^N a'_n$  都是从  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  中挑选出某有限项构成的和, 因而

$$\sum_{n=1}^N a'_n \leq S \quad (1)$$

从而  $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$  收敛, 且有

$$S' = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \leq S \quad (2)$$

另一方面, 我们也可把  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  看成是由  $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$  经交换各项的顺序后

所得的级数,因而也有

$$S \leq S' \quad (3)$$

比较(2)(3)即得

$$S' = S$$

这就证明了命题对正项级数是成立的.

再证定理对于一般的绝对收敛级数也成立. 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  是具有正负项的绝对收敛级数, 先视  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  为正项级数, 由(1)式容易推得任意交换  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  各项顺序后所得的新级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$  也绝对收敛.

下面我们用

$$b_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \quad c_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}$$

将级数的正负项分开, 则有

$$\sum_{k=1}^n |a_k| = \sum_{k=1}^n b_k + \sum_{k=1}^n c_k \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n b_k - \sum_{k=1}^n c_k \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5)$$

因为  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛, 由(4)式知正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n$  都收敛. 再由(5)式得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

当级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  任意交换各项的顺序而成新级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$  时, 两正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n$  的各项也分别相应改变顺序成  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n', \sum_{n=1}^{\infty} c_n'$ , 由上面已证结论有

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n', \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n'$$

故有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'$$

这就完全证明了定理.

但是,对于条件收敛级数,情形就完全不同.一般说来当任意交换这类级数的各项顺序时,它们的和数是要改变的,甚至还有可能得到发散的级数.以下例为证.

例2 条件收敛级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  的和为  $\ln 2$ . 现交换它的各项,使得在一个正项后面跟着两个负项,如此得到

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots \\ & + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} + \dots \end{aligned}$$

用  $S_n$  表示这个新级数的部分和,则有

$$\begin{aligned} S_{3m} &= \sum_{k=1}^m \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \left( \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2m} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

因此当  $m$  趋于无穷时,  $S_{3m}$  有极限为  $\frac{1}{2} \ln 2$ , 又因

$$S_{3m-1} = S_{3m} + \frac{1}{4m}, \quad S_{3m-2} = S_{3m-1} + \frac{1}{4m-2}$$

也趋于同一极限,所以交换顺序的级数收敛,且和为  $\frac{1}{2} \ln 2$ .

为什么绝对收敛级数与条件收敛级数有如此完全不同的性质呢?下面我们指出产生这种差别的原因.

**推论 1** 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛的充分必要条件是级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  都收敛.

事实上,定理 2 的证明中已给出(4)式

$$\sum_{k=1}^n |a_k| = \sum_{k=1}^n b_k + \sum_{k=1}^n c_k \quad (n = 1, 2, \dots)$$

由(4)式即得推论 1.

**推论 2** 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  条件收敛,则必有  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  都发散.

**证** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  条件收敛.由推论 1 知,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  不能都收敛.如果  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛,  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  发散,于是由(5)式

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n b_k - \sum_{k=1}^n c_k \quad (n = 1, 2, \dots)$$

立即推知  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散,这与假设不符.所以级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  只能都发散.

由此可见,绝对收敛级数收敛是由于各项的绝对值减小的速度造成的,因而与各项的次序无关;而条件收敛级数收敛是由于正负项相互抵消造成的,因此与各项的先后次序有关.

**定理 3(级数的乘法)** 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  都绝对收敛,且其和分别为  $S, T$ ,则它们各项的乘积  $a_i b_j$ ,  $(i, j = 1, 2, \dots)$  按任意顺序依次相加所得到的级数  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  也绝对收敛,其和等于  $S \cdot T$ .

**证** 因  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = S'$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = T'$  都收敛,而  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$  的部分和为

$$\sum_{k=1}^n |c_k| = |c_1| + \cdots + |c_n|,$$

其中

$$|c_k| = |a_{i_k} b_{j_k}|, k = 1, 2, \dots, n.$$

令  $m = \max\{i_1, j_1; \dots; i_n, j_n\}$ . 于是, 有

$$\sum_{k=1}^n |c_k| \leq (|a_1| + \cdots + |a_m|)(|b_1| + \cdots + |b_m|) \leq S' \cdot T'.$$

因正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$  的部分和数列有上界, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$  收敛, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ 绝对收敛. 再证明 } \sum_{n=1}^{\infty} c_n = ST.$$

由于级数

$$a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + \cdots \quad (6)$$

绝对收敛, 因而(6)不但具有可结合性, 而且具有可交换性. 设级

数(6)的和为  $C$ , 则显然有  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = C$ . 我们把级数(6)重新结合成

级数

$$\begin{aligned} & a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2) + \cdots \\ & + (a_1 b_n + a_2 b_n + \cdots + a_n b_n + a_n b_{n-1} + \cdots + a_n b_1) + \cdots \end{aligned} \quad (7)$$

则级数(7)的前  $n$  项和  $U_n$  恰是乘积

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = S_n \cdot T_n$$

命  $n \rightarrow +\infty$ , 即得

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = ST$$

如果两个级数仅仅是条件收敛, 则定理的结论就可能不对. 例如,

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$  是收敛的, 它自乘后得新级数  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ , 其中

$$\begin{aligned} c_n = & (-1)^{n-1} \left( \frac{1}{1 \cdot \sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{n-1}} + \cdots \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{i} \cdot \sqrt{n-i+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n} \cdot 1} \right) \end{aligned}$$

显然

$$|c_n| \geq \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} = 1$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  发散.

### 复习思考题

1. 数项级数与数列之间有什么关系?
2. 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛的必要条件是什么? 如果有  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 能否推出  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛?
3. 对变号级数能否使用比较判别法? 对负项级数呢? 如果  $|b_n| \leq |a_n|$ , 且  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 问  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  是否一定收敛?
4. 柯西根值判别法和达朗贝尔判别法是根据什么判别法推导出来的? 它对一般级数能否适用?
5. 不绝对收敛的级数是否一定发散?
6. 总结一下, 正项级数与变号级数都有哪些收敛判别法. 正项级数的收敛判别法对负项级数适用吗?

### 习题 9.1

1. 证明下列等式:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1 - \sqrt{2}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)} = \ln 2$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$$

2. 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 证明  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$  也收敛; 试举例说明逆命题不成立; 但若  $a_n > 0$ , 则逆命题成立.

3. 证明: 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n \geq 0)$  收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  也收敛; 反之不成立, 试举例说明.

4. 证明: 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$  收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$  也收敛.

5. (1) 证明: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = a \neq 0$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散;

(2) 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 是否有  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ ?

6. 设数列  $n a_n$  和级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$  都收敛, 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也收敛.

7. 研究下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0.001}$$

$$(2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{n-1}}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \sin n$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{\pi}{4n}$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$(9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$(10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$$

$$(11) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$(12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^n}$$

$$(13) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$$

$$(14) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^k}$$

$$(15) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^3}$$

$$(16) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^n \quad (a > 0)$$

8. 研究下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

$$(2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{4}}{\ln n}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$$

9. 研究下列级数的条件收敛性与绝对收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{1}{n}$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$$

## 9.2 函数项级数

### 9.2.1 函数项级数的收敛概念

设  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$  是定义在区间  $[a, b]$  上的一列函数, 称和式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1)$$

是 $[a, b]$ 上的一个函数项级数,且简称为级数.在 $[a, b]$ 上任取一点 $x_0$ ,那么

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots \quad (2)$$

便是一个数项级数.如果级数(2)收敛,就称点 $x_0$ 是函数项级数(1)的收敛点;如果(2)发散,就称点 $x_0$ 是函数项级数(1)的发散点.区间 $[a, b]$ 上的收敛点的全体称为函数项级数的收敛域,而 $[a, b]$ 上的发散点的全体称函数项级数的发散域.

### 例 函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

在整个数轴上都有定义.当 $|x| < 1$ 时它收敛;而当 $|x| \geq 1$ 时发散.因此级数的收敛域是区间 $(-1, 1)$ ;发散域是 $(-\infty, -1]$ 及 $[1, +\infty)$ .如果点 $x$ 在收敛域内,则有

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

尽管 $\frac{1}{1-x}$ 除 $x = 1$ 外处处有定义,但它仅有 $(-1, 1)$ 内才能作为级数的和函数.

在收敛域上,函数项级数在每个收敛点 $x$ 都有一个确定的和数,记为 $S(x)$ ,即

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

若用 $S_n(x)$ 表示函数项级数前 $n$ 项的和,则在收敛域上有

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$$

令

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x)$$

并称为函数项级数的余项.因此对收敛域上每一点 $x$ ,有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$$

### 9.2.2 函数项级数的一致收敛性及判别法

函数项级数的收敛概念是一个“点态”性的概念,即函数项级数在 $[a, b]$ 上收敛是指它在这区间上的每一点都收敛. 现在我们引进另一种所谓整体性的收敛概念,即一致收敛概念. 这种收敛概念在级数理论及其应用中都有十分重要的意义.

设函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \quad (1)$$

在区间 $[a, b]$ 上收敛于和 $S(x)$ . 于是对任意的 $\epsilon > 0$ , 对于 $[a, b]$ 上的每一个值 $x$ , 都可以找到这样的自然数 $N$ , 当 $n > N$ 时, 就有不等式

$$|r_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \epsilon \quad (2)$$

一般说来, 这个自然数 $N$ 不仅依赖于正数 $\epsilon$ , 而且还依赖于值 $x$ , 就是对于 $x$ 的不同值,  $N$ 可以不同, 所以有时把它记成 $N(x)$ . 对于收敛得快的点 $x$ 来说,  $N(x)$ 不必很大, (2) 就能成立; 而对那些收敛得较慢的点 $x$ ,  $N(x)$ 必须很大, 才能使(2)成立. 于是问: 是否能找到这样的 $N$ , 它只依赖于 $\epsilon$ , 而与 $x$ 的取值无关, 即当 $n > N$ 时, 不等式(2)对 $[a, b]$ 上所有的 $x$ 都成立. 这时我们便认为所有的函数

项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  ( $x \in [a, b]$ ) 收敛的速度是“一致”的. 对于这样的收敛级数, 它具有一些一般收敛级数所没有的重要性质, 因此有必要在原来的收敛概念的基础上建立一个更强的收敛概念.

**定义** 设在区间 $I$ 上(开或闭, 有限或无限)收敛的函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  其和函数是 $S(x)$ . 若对任意给定的正数 $\epsilon$ , 都存在与 $x$ 无关的自然数 $N$ , 使当 $n > N$ 时, 不等式

$$|r_n(x)| < \epsilon$$

对区间 $I$ 上一切 $x$ 都成立, 就称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在区间 $I$ 上一

致收敛于函数  $S(x)$ , 或称余项  $r_n(x)$  在区间  $I$  上一致地趋于零. 由于

$$|r_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

或写成

$$S(x) - \varepsilon < S_n(x) < S(x) + \varepsilon$$

上述定义就有直观的几何意义. 在曲线  $y = S(x)$  的上下两侧各作曲线  $y = S(x) + \varepsilon$  与  $y = S(x) - \varepsilon$ , 则从  $N$  以后的所有曲线  $y = S_n(x)$  都应落在这两条曲线所围成的带域中(图 9.1).

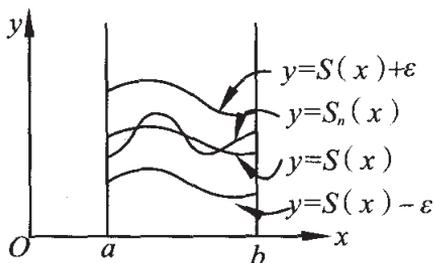


图 9.1

根据级数一致收敛的定义, 非一致收敛又可叙述为: 存在某个正数  $\varepsilon_0$ , 对任意的自然数  $N$ , 存在某个  $n_0 > N$  及  $x_0 \in I$ , 有

$$|r_{n_0}(x_0)| = |S(x_0) - S_{n_0}(x_0)| \geq \varepsilon_0$$

就称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $I$  上非一致收敛或余项  $r_n(x)$  在  $I$  上非一致趋于零.

**例 1** 考察函数项级数

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)(x+2)} - \dots - \frac{1}{(x+n-1)(x+n)} - \dots$$

其中  $x$  在区间  $[0, 1]$  上变化, 不难看出这个级数的前  $n$  项和为

$$S_n(x) = \frac{1}{x+n}$$

所以

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x+n} = 0$$

由于

$$|r_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| = \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}, \quad x \in [0,1]$$

因此对任给的  $\varepsilon > 0$ , 只要取  $N = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right]$ , 当  $n > N$  时

$$|r_n(x)| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

对  $[0,1]$  上的一切  $x$  都成立, 故所给函数项级数在  $[0,1]$  上一致收敛.

例 2 设有定义在区间  $[0,1]$  上的级数

$$x + x(x-1) + x^2(x-1) + \cdots + x^{n-1}(x-1) + \cdots$$

它的前  $n$  项和

$$S_n(x) = x + x(x-1) + \cdots + x^{n-1}(x-1) = x^n$$

所以当  $0 \leq x < 1$  时有

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 0$$

而且

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x) = -x^n$$

当  $x = 1$  时直接由级数得

$$S_n(1) = 1, \quad S(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(1) = 1$$

这时对任意的  $n$

$$r_n(1) = S(1) - S_n(1) = 0$$

于是推知级数在整个区间  $[0,1]$  上收敛, 但在  $[0,1]$  上不一致收敛.

事实上, 存在  $\varepsilon_0 = \frac{1}{3}$ , 对任意的自然数  $N$ , 存在  $n_0 > N$  且  $x_0 =$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n_0}} \in (0,1)$ , 有

$$|r_{n_0}(x_0)| = |-x_0^{n_0}| = \frac{1}{2} > \varepsilon_0$$

所以余项  $r_n(x)$  在  $[0,1]$  上不一致趋于零, 即级数在  $[0,1]$  上是不一致收敛的.

这个级数的非一致收敛从几何上看亦是很明显的. 如果在直

线  $y = S(x) = 0$  的附近作  $\varepsilon$  带形区域, 则不论  $n$  多大, 曲线  $y = S_n(x) = x^n$  永远不会落入这个带形区域内(图 9.2).

一般来说, 按照一致收敛的定义判别函数项级数的一致收敛性是比较麻烦的, 下面介绍一些简便的判别法, 首先介绍类似数项级数的柯西准则.

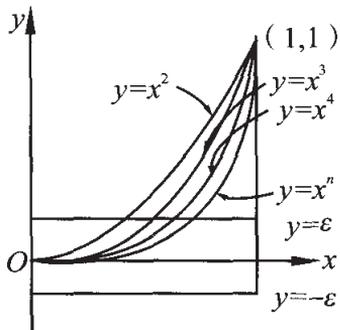


图 9.2

**定理 1** 函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在区间  $I$  上一致收敛的充分必要条件是: 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在与  $x$  无关的自然数  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 不等式

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

对任意自然数  $p$  以及  $I$  上所有的点  $x$  都成立.

**证** 必要性: 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $I$  上一致收敛于  $S(x)$ , 那么对任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N$ , 当  $n > N$  时, 不等式

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |S_{n+p}(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

对任意自然数  $p$  及  $I$  中一切点  $x$  都成立. 于是

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| &= |S_{n+p}(x) - S_n(x)| \\ &\leq |S_{n+p}(x) - S(x)| + |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \end{aligned}$$

再证充分性. 如果对任给  $\varepsilon > 0$ , 总能找到自然数  $N$ , 当  $n > N$  时, 不等式

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| = |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

对任意自然数  $p$  及  $I$  上一切  $x$  都成立. 根据数项级数的柯西准则,

即得  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $I$  中收敛, 设其和为  $S(x)$ , 现在对固定的  $n (> N)$ , 令不等式

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

中的  $p$  无限增大, 取极限就得到

$$|S(x) - S_n(x)| \leq \varepsilon$$

对  $I$  中一切  $x$  成立. 所以级数在  $I$  上一致收敛.

在定理中, 取  $p = 1$ , 就得到函数项级数一致收敛的一个必要条件.

**推论 1** 一致收敛级数的通项必一致趋于零.

这个必要条件常用来判定级数的非一致收敛性.

**例 3** 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$  在  $(0, +\infty)$  上非一致收敛.

**证** 只须证明它的通项  $ne^{-nx}$  在  $(0, +\infty)$  上非一致趋于零.

存在正数  $\varepsilon_0 < \frac{1}{e}$ , 对任给的自然数  $N$ , 总存在  $n_0 > N$ , 且存在  $x_0$

$= \frac{1}{n_0} \in (0, +\infty)$ , 有

$$n_0 e^{-n_0 x_0} = n_0 e^{-1} > \frac{1}{e} > \varepsilon_0$$

故通项  $ne^{-nx}$  在  $(0, +\infty)$  上非一致趋于零. 由定理 1 的推论 1 知,

$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$  在  $(0, +\infty)$  上非一致收敛.

**推论 2** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $(a, b)$  内收敛, 每个  $u_n(x)$  在  $x = b$  处

左连续(或在  $x = a$  处右连续). 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(b)$  (或  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$ ) 发散, 则

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $(a, b)$  内非一致收敛.

**证** 若不然, 假定  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $(a, b)$  内一致收敛, 由定理 1 知, 对  $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ , 当  $n > N$  时, 对一切  $x \in (a, b)$  与  $\forall p \in \mathbb{N}$  有

$$|u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

这里共有  $p$  项, 并由假设知, 当  $x \rightarrow b^-$  时, 及  $n > N$  时, 对  $\forall p \in N$ , 有  $|u_{n+1}(b) + \cdots + u_{n+p}(b)| < \varepsilon$ . 故  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(b)$  收敛, 这与原假设矛盾. 故  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $(a, b)$  内非一致收敛.

例如, 证明:  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$  在  $(0, 1)$  内非一致收敛. 显然, 它在  $(0, 1)$  内收敛, 且每个  $u_n(x) = x^n$  在  $x = 1$  处左连续, 而  $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n$  发散. 故由推论 2 知,  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$  在  $(0, 1)$  内非一致收敛.

如同数项级数一样, 柯西准则在实际应用时通常是很困难的, 但由它可以引出某些更为适用的判别法则.

**定理 2**(维尔斯特拉斯 Weierstrass 判别法) 如果存在一个收敛的正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , 使得在区间  $I$  上从某项起成立

$$|u_n(x)| \leq a_n,$$

则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在区间  $I$  上一致收敛.

**证** 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 由数项级数的柯西准则, 即对任给的正数  $\varepsilon$ , 存在自然数  $N$ , 当  $n > N$  时, 不等式

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon$$

对任意自然数  $p$  成立. 于是对足够大的  $n$  有

$$\begin{aligned} & |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| \\ & \leq |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \cdots + |u_{n+p}(x)| \\ & \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon \end{aligned}$$

对任意自然数  $p$  及区间  $I$  上的所有  $x$  都成立, 根据柯西收敛准则,

即得  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在区间  $I$  上一致收敛.

例 4 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上一致收敛.

证 因为对任意实数  $x$  都有

$$\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  是收敛的, 所以原级数在整个数轴上一致收敛.

Weierstrass 判别法用起来很方便, 但条件太强, 它要求  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  绝对收敛, 而且  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$  都一致收敛才行. 实际上存在这样的级数, 它一致收敛但不绝对收敛; 还可能是  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  绝对且一致收敛, 但  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$  却不一致收敛. 对于这类级数, Weierstrass 判别法就无效了, 故需研究更精细一些的判别法, 我们也有类似于数项级数的 Dirichlet 和 Abel 判别法.

**定理 3(迪里赫勒判别法)** 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$  满足下面两个条件

(i) 函数列  $\{b_n(x)\}$  对于每个  $x$  单调, 且在区间  $I$  上一致趋于零;

(ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  的部分和  $S_n(x)$  在  $I$  上一致有界, 即存在与  $n$  及  $x$  无关的常数  $M$ , 使  $|S_n(x)| \leq M$  对于  $I$  上一切  $x$  都成立. 那么该级数在区间  $I$  上一致收敛.

这个定理的证明方法和数项级数中相应定理的证明类似.

**定理 4(阿贝尔判别法)** 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$  满足下面两个条件:

(i) 函数列  $\{b_n(x)\}$  对每一  $x$  值单调, 且在区间  $I$  上一致有界, 即存在与  $n$  及  $x$  无关的常数  $M$ , 使  $|b_n(x)| \leq M$  对  $I$  上一切  $x$

都成立;

(ii) 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  在区间  $I$  上一致收敛.

那么该级数在区间  $I$  上一致收敛.

证 由假设, 存在常数  $M$ ,  $|b_n(x)| \leq M$  对  $I$  上一切  $x$  及自然数  $n$  都成立, 又  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  在  $I$  上一致收敛, 故对任给的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N$ , 当  $n > N$  时,

$$|a_{n+1}(x) + a_{n+2}(x) + \cdots + a_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

对  $I$  上一切  $x$  及任何自然数  $p$  都成立. 由本章 9.1.4 的 Abel 引理, 于是当  $n > N$  时

$$\begin{aligned} & |a_{n+1}(x)b_{n+1}(x) + a_{n+2}(x)b_{n+2}(x) + \cdots + a_{n+p}(x)b_{n+p}(x)| \\ & \leq \frac{\varepsilon}{3M}(|b_{n+1}(x)| + 2|b_{n+p}(x)|) \leq \frac{\varepsilon}{3M} \cdot 3M = \varepsilon \end{aligned}$$

对  $I$  上一切  $x$  及任意自然数  $p$  都成立, 据柯西准则,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$  在  $I$  上一致收敛.

例 5 设  $\{a_n\}$  是单调趋于零的数列, 则在任何一个不含  $2k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 的闭区间上, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

都一致收敛.

这是因为, 比如

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \sin kx \right| = \left| \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}$$

在所给区间上  $\sin \frac{x}{2} \neq 0$ , 故存在与  $n$  及  $x$  无关的界. 由 Dirichlet 判别法, 可知所考察的级数一致收敛.

例 6 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-x}$  在  $x \geq 0$  中一致收敛.

由于  $\left\{ \frac{1}{n^x} \right\}$  对每一  $x$  值在  $x \geq 0$  上单调一致有界, 即  $\frac{1}{n^x} \leq 1$

对  $[0, +\infty)$  中的一切  $x$  都成立. 又  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 根据 Abel 判别法

知  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-x}$  在  $x \geq 0$  中一致收敛.

### 9.2.3 一致收敛级数的性质

我们知道, 有限个连续函数的和仍是连续函数, 且和的积分等于各项积分的和; 有限个可微函数的和仍是可微函数, 且和的微分等于各项微分的和. 但有限和的这些性质对无穷级数的和则未必成立.

例 1 如 9.2.2 中的例 2, 级数

$$x + x(x-1) + x^2(x-1) + \cdots + x^{n-1}(x-1) + \cdots$$

在区间  $[0, 1]$  上处处收敛, 而其和

$$S(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

在点  $x = 1$  处是不连续的, 当然更谈不上可导.

这例子说明, 每项都连续的级数, 其和函数未必连续, 每项都可导的级数, 其和函数未必可导.

例 2 考察级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} [2n^2 x e^{-n^2 x^2} - 2(n-1)^2 x e^{-(n-1)^2 x^2}]$$

它的部分和是  $S_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2 x^2}$ , 因此级数在区间  $[0, 1]$  上的和为  $S(x) = 0$ , 所以

$$\int_0^1 S(x) dx = 0$$

但若把这个级数逐项积分得

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 [2n^2 x e^{-n^2 x^2} - 2(n-1)^2 x e^{-(n-1)^2 x^2}] dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [e^{-(n-1)^2} - e^{-n^2}] = 1 \end{aligned}$$

这个例子说明,一般情况下“逐项积分”也是不允许的.

但有限和的这些性质对一致收敛级数是成立的.

**定理 1** 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在区间  $I$  上一致收敛于  $S(x)$ , 且每项  $u_n(x)$  都在  $I$  上连续, 那么和函数  $S(x)$  也在  $I$  上连续.

**证** 只须证明对区间  $I$  上任意点  $x_0$  有极限等式

$$\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = S(x_0)$$

由于级数在  $I$  上一致收敛于  $S(x)$ . 即对任给正数  $\epsilon$ , 总存在自然数  $N$ , 当  $n > N$  时, 对  $I$  上任意一点  $x$ , 有

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad |S_n(x_0) - S(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$$

在选定这样的  $n$  后, 再由  $S_n(x)$  的连续性, 即有正数  $\delta$ , 使得当  $|x - x_0| < \delta$  时有

$$|S_n(x) - S_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$$

于是当  $|x - x_0| < \delta$  时, 便有

$$\begin{aligned} |S(x) - S(x_0)| &\leq |S_n(x) - S(x)| + |S_n(x) - S_n(x_0)| \\ &\quad + |S_n(x_0) - S(x_0)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

这就证明了  $S(x)$  在  $x_0$  处连续.

**例 3** 设  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} \cos n\pi x^2$ , 计算  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

**解** 在区间  $[-2, 2]$  上, 由于

$$\left| \frac{x^n}{3^n} \cos n\pi x^2 \right| \leq \left( \frac{2}{3} \right)^n$$

因而原级数在 $[-2, 2]$ 上一致收敛, 所以和函数 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上连续, 于是

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{3}{4}$$

定理 1 的条件是充分条件, 不是必要条件, 即和函数 $S(x)$ 连续不一定要要求 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 一致收敛.

例 4 证明 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛, 但在 $(0, +\infty)$ 上是连续的.

证 9.2.2 的例 3 已证明 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛. 利用连续的“点态”性概念, 在 $(0, +\infty)$ 中任取一点 $x_0$ , 由实数的性质, 总能取适当的 $\delta$ , 使得 $0 < \delta < x_0$ , 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $[\delta, +\infty)$ 中一致收敛, 因而 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续; 由于 $x_0$ 是 $(0, +\infty)$ 中任一点, 故知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 中连续.

由定理 1, 又得

推论 如果收敛的函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和函数 $S(x)$ 在区间 $I$ 上不连续, 而每项 $u_n(x)$ 都在 $I$ 上连续, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $I$ 上非一致收敛.

例 5 再看 9.2.2 的例 2, 级数

$$x + x(x-1) + x^2(x-1) + \cdots + x^{n-1}(x-1) + \cdots$$

的和函数

$$S(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

在收敛区间 $[0, 1]$ 上不连续, 所以级数在 $[0, 1]$ 上是不一致收敛的.

**定理 2** 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在区间  $[a, b]$  上一致收敛于  $S(x)$ , 且每项  $u_n(x)$  都在  $[a, b]$  上连续, 则

$$\int_a^b \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx$$

**证** 由定理 1 知  $S(x)$  是  $[a, b]$  上的连续函数, 因而是可积的. 又因为

$$\sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(x) dx = \int_a^b \left( \sum_{k=1}^n u_k(x) \right) dx = \int_a^b S_n(x) dx$$

所以只须证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b S_n(x) dx = \int_a^b S(x) dx$$

由假设, 级数是一致收敛的, 故对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N$ , 当  $n > N$  时, 不等式

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

对  $[a, b]$  中的一切  $x$  都成立. 于是当  $n > N$  时有

$$\left| \int_a^b S_n(x) dx - \int_a^b S(x) dx \right| \leq \int_a^b |S_n(x) - S(x)| dx < \varepsilon$$

即

$$\int_a^b S(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b S_n(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) dx$$

现在讨论函数项级数在什么条件下可以逐项微分?

**定理 3** 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在区间  $[a, b]$  上收敛于  $S(x)$ , 它的每项  $u_n(x)$  在  $[a, b]$  上有连续的微商, 并且由这些微商所组成的级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 则和  $S(x)$  在  $[a, b]$  上有连续的微商, 且可逐项求导

$$S'(x) = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

证 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$  的和为  $\sigma(x)$ , 即

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

我们只须证明  $S'(x) = \sigma(x)$ . 由定理 2 知, 当  $x \in [a, b]$  时有

$$\begin{aligned} \int_a^x \sigma(t) dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n'(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(a)] \\ &= S(x) - S(a) \end{aligned}$$

由  $\sigma(x)$  的连续性, 在上式两端求导即可

$$S'(x) = \sigma(x)$$

例 6 证明  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有连续的微商.

证 显然级数在  $(-\infty, +\infty)$  上收敛, 且它的每项在  $(-\infty, +\infty)$  上有连续的微商, 而微商所组成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sin nx}{n^3} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

在  $(-\infty, +\infty)$  上一致收敛, 因而由定理 3 得,  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有连续的微商.

### 复习思考题

1. 函数项级数与函数序列之间有什么关系? 函数项级数与数项级数二者又有什么关系?

2. 函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在区间  $[a, b]$  上一致收敛的必要条件是什么? 若有通项  $u_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致趋于零, 能否推出  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛?

3. 连续函数项级数的和是否一定连续? 举例说明.

4. 函数项级数在闭区间上收敛是否一定一致收敛? 举例说

明.

5. 如果函数列  $\{b_n(x)\}$  对每个  $x$  而言是单调数列, 且在区间  $I$  上一致有界, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n(x) = b(x)$$

那么  $\{b_n(x) - b(x)\}$  是否在  $I$  上一致趋于零?

### 习题 9.2

1. 确定下列级数的收敛域:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{x}{n}\right)^n$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n^2}$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}}$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sin \frac{\pi}{2^n}$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n-3^n}$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$$

2. 研究下列级数在给定区间上的一致收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n [1 + (nx)^2]}, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n, \quad \text{a) } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad \text{b) } -1 < x < 1$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, \quad 0 \leq x < +\infty$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}, \quad 0 \leq x < +\infty$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, \quad 1 < x < +\infty$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}, \quad 0 < \delta \leq x \leq 2\pi - \delta$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(ne^n)^x}, \quad 0 \leq x < +\infty$$

3. 证明:若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛,则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{e^{nx}}$  在  $0 \leq x < +\infty$  中一致收敛.

4. 证明: $\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$  当  $x > 1$  时是  $x$  的连续函数,并且在此域内有各阶连续导函数.

5. 设  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos \frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}$ , 求  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x)$  及  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

6. 设  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ , 求  $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x) dx$ .

7. 证明: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4}$  当  $|x| < +\infty$  时,具有连续的二阶微商.

## 9.3 幂级数与泰勒展开式

### 9.3.1 幂级数的收敛半径

在函数项级数中,理论上最简单,应用上极广泛的一类级数是幂级数,它的形式是

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad (1)$$

其中  $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$  都是实常数.这类级数的重要性就在于它的部分和是多项式,因而只要级数收敛,则它的和尽管一般说来是很复杂的函数,总可以用易于计算的多项式来近似表达,并且可以

逼近到任意精确的程度. 此外, 由于幂级数的收敛区域结构十分简单, 它总是一个区间, 这就为研究这类级数时带来许多方便. 现在就来揭示这一事实.

**定理 1 (Abel 定理)** 如果幂级数(1) 在点  $x = x_0$  处收敛, 则它在所有满足不等式  $|x| < |x_0|$  的点  $x$  处都绝对收敛; 反之, 若幂级数在点  $x = x_0$  处发散, 则它在所有满足不等式  $|x| > |x_0|$  的点  $x$  处都发散.

**证** 先设级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$  收敛, 这时它的通项趋于零, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$$

故数列  $\{a_n x_0^n\}$  必有界, 于是存在常数  $M$ , 使得

$$|a_n x_0^n| \leq M \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

由于

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

故当  $|x| < |x_0|$  时, 所考察的幂级数各项的绝对值不大于收敛的

等比级数  $\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$  的对应项, 从而级数(1) 绝对收敛.

反之, 如果级数在  $x = x_0$  发散, 而在适合  $|x_0'| > |x_0|$  的一点  $x_0'$  处收敛, 则由定理的前一结论知, 级数在点  $x_0$  收敛, 这与假设矛盾.

如此就能确定幂级数的收敛区域为一区间. 显然任何幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , 在  $x = 0$  总是收敛的. 幂级数的收敛情况不外乎下列三种类型.

- (i) 仅在  $x = 0$  处收敛, 在任何非零点都发散, 这时它的收敛区域就只有一点  $x = 0$ ;
- (ii) 在任一点  $x$  处都收敛, 即在区间  $(-\infty, +\infty)$  上收敛;
- (iii) 具有不为零的收敛点与发散点, 由此考虑所有收敛点  $x_0$

组成的数集  $\{|x_0|\}$ . 显然这个数集  $\{|x_0|\}$  是有上界的, 则它必有上确界  $R$ , 使当  $|x| > R$  时级数发散; 而当  $|x| < R$  时, 依上确界的定义, 一定存在这样的收敛点  $x_0$ , 使  $|x| < |x_0| \leq R$ , 于是由 Abel 定理推知级数收敛 (图 9.3). 这个结果可总结成

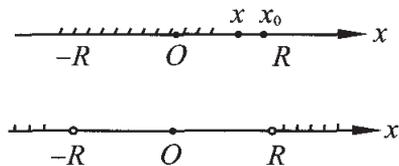


图 9.3

**定理 2** 对于任意的具有非零的收敛点与发散点之幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , 必存在一个确定的正数  $R$ , 使得当  $|x| < R$  时, 级数绝对收敛; 而当  $|x| > R$  时级数发散.

这个数  $R$  称为幂级数的收敛半径, 区间  $(-R, R)$  称为它的收敛区间. 如果幂级数除  $x = 0$  外的一切非零  $x$  值都发散, 就说它的收敛半径为零; 如果幂级数在整个数轴上处处收敛, 就说它的收敛半径是无穷大.

从上面的研究可知, 对于一个幂级数, 重要的问题是知道它的收敛半径, 这在大多数的场合下, 可由下述定理得以解决.

**定理 3** 设有对  $x$  的幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  ( $a_n \neq 0$ ), 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$ , 则此幂级数的收敛半径  $R = \frac{1}{L}$ .

**证** 先考察绝对值级数  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ . 根据达朗贝尔判别法有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = L |x|$$

若  $L |x| < 1$ , 即  $|x| < \frac{1}{L}$ , 则幂级数绝对收敛; 若  $L |x| > 1$ , 即  $|x| > \frac{1}{L}$ , 则幂级数发散. 因此

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

类似地,应用柯西判别法可得计算收敛半径的另一公式

$$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$$

注意:定理3的两个求收敛半径的公式都要求 $x$ 的幂不能有间隔,否则将失效.

例1 用定理3容易算出下列三个幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$$

的收敛半径分别为 $1, +\infty, 0$ .

例2 求幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2} x^{2k}$ 的收敛半径.

解 本题幂级数只含有 $x$ 的偶次幂,因而不能应用定理3的公式,可直接利用达朗贝尔判别法求收敛半径

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_k(x)} \right| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{[2(k+1)]!}{[(k+1)!]^2} x^{2(k+1)} \cdot \frac{(k!)^2}{(2k)!} \cdot \frac{1}{x^{2k}} \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} |x^2| = 4|x|^2 \end{aligned}$$

当 $4|x|^2 < 1$ ,即 $|x| < \frac{1}{2}$ 时级数绝对收敛;当 $4|x|^2 > 1$ ,即

$|x| > \frac{1}{2}$ 时级数发散.所以收敛半径 $R = \frac{1}{2}$ .

必须指出,在幂级数的收敛区间 $(-R, R)$ 的两个端点 $x = \pm R$ 处,级数的收敛性没有肯定的结论.下面三个级数

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \quad (iii) \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

的收敛半径都是 $R = 1$ ,但其中(i)在左端点 $x = -1$ 处条件收敛,在右端点 $x = 1$ 发散,因此收敛域为 $[-1, 1)$ .(ii)在左右两个端点都绝对收敛,因此收敛域为 $[-1, 1]$ .(iii)在两个端点都发散,因此收敛域为 $(-1, 1)$ .

### 9.3.2 幂级数的性质

在说明了幂级数收敛区域的一般形式之后,现在进而讨论关于它的一致收敛性问题并由此导出其和函数的各种性质.

**定理 1** 设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径为  $R \neq 0$ ,则在收敛区间  $(-R, R)$  内的任何闭区间  $[-r, r]$  上,这级数一致收敛.

**证** 因为  $0 < r < R$ ,所以幂级数在点  $x = r$  绝对收敛,但当  $|x| \leq r$  时有

$$|a_n x^n| \leq |a_n| r^n$$

由维尔斯特拉斯判别法知,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $|x| \leq r$  上一致收敛.

幂级数的这一性质保证了它的和函数不仅在收敛区间内是连续的,而且具有任意阶导数.

**定理 2** 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的和函数  $S(x)$  在其收敛区间  $(-R, R)$  内是一个连续函数.

**证** 在  $(-R, R)$  中任取一点  $x_0$ , 因为  $|x_0| < R$ , 故存在正数  $r$ , 使得  $|x_0| < r < R$ . 由定理 1 知幂级数在闭区间  $[-r, r]$  上一致收敛, 而它的每一项又是连续函数, 故其和  $S(x)$  在  $[-r, r]$  上连续, 即在  $x_0$  处连续. 由于  $x_0$  是在  $(-R, R)$  中任意取的, 故  $S(x)$  在  $(-R, R)$  中连续.

**定理 3** 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的和函数  $S(x)$  在收敛区间  $(-R, R)$  内是可微的, 且有

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

即幂级数可以逐项微分, 且微分后所得的幂级数有相同的收敛半径.

**证** 先证明逐项微分后所得的幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \quad (1)$$

的收敛半径仍为  $R$ . 为此在区间  $(-R, R)$  内任取一点  $x_1$ , 由于  $|x_1| < R$ , 故存在正数  $r_1$ , 使  $|x_1| < r_1 < R$ . 因为级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r_1^n$  收敛, 它的通项  $a_n r_1^n$  趋于零, 所以存在自然数  $N$ , 当  $n > N$  时

$$|a_n r_1^{n-1}| < 1$$

如此, 只要  $n$  足够大时就成立

$$|na_n x_1^{n-1}| = \left| na_n r_1^{n-1} \left( \frac{x_1}{r_1} \right)^{n-1} \right| < n \left| \frac{x_1}{r_1} \right|^{n-1}$$

容易证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n \left| \frac{x_1}{r_1} \right|^{n-1}$  收敛, 所以级数(1)在点  $x_1$  绝对收敛, 这就证明了级数(1)在  $(-R, R)$  内收敛. 另一方面, 在区间  $(-R, R)$  外任取  $x_2$ , 因为  $|x_2| > R$ , 故存在正数  $r_2$ , 使  $|x_2| > r_2 > R$ , 由于

$$|na_n r_2^{n-1}| \geq \frac{1}{r_2} |a_n r_2^n|$$

如果  $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x_2^{n-1}$  收敛, 据 Abel 定理知  $\sum_{n=1}^{\infty} |na_n r_2^{n-1}|$  收敛, 便推得原来的级数在  $r_2$  处绝对收敛. 这和已知矛盾, 所以级数(1)在  $x_2$  处发散, 即级数(1)在  $|x| > R$  时发散. 综上所述, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$  的收敛半径仍为  $R$ .

这样的任意  $r \in (0, R)$ , 级数(1)在  $[-r, r]$  中一致收敛. 于是, 9.2.3 中的定理 3 的三个条件都满足, 又由  $r$  的任意性, 从而推得

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$$

在  $(-R, R)$  中成立.

反复应用定理 3, 可得

**推论** 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的和函数  $S(x)$  在收敛区间  $(-R, R)$  内有任意阶微商, 且有

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k} \quad (k=1, 2, \cdots)$$

即幂级数可以逐项微分任意多次, 且微分后所得的幂级数都有同一收敛半径  $R$ .

这条推论所揭示的正是幂级数和多项式的相似之处. 又因为各项为连续函数的一致收敛级数总是可以逐项积分的, 所以由定理 1 又可以推出

**定理 4** 设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在某收敛区间  $(-R, R)$  上的和为  $S(x)$ , 则对于此区间的任意一个内点  $x$ , 恒有

$$\begin{aligned} \int_0^x S(x) dx &= \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \end{aligned}$$

且逐项积分后的级数的收敛半径仍为  $R$ .

**证** 对任意  $x \in (-R, R)$ , 根据 9.2.3 中定理 2 有

$$\int_0^x S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (a_n x^n) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

且逐项积分后的级数的收敛半径仍为  $R$ . 否则由定理 3, 将级数

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$  逐项微分后所得的级数, 即原级数的收敛半径就不是  $R$  了.

利用上面这些定理可以求一些幂级数的和.

**例 1** 已知幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  在整个数轴上收敛, 试求它的和.

**解** 设所考察的级数和为  $S(x)$ , 则有

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = S(x) \quad (-\infty < x < +\infty)$$

解此微分方程得

$$S(x) = Ae^x$$

由于  $S(0) = 1$ , 故  $S(x) = e^x$ , 即

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

**例 2** 求级数  $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$  的和.

**解** 容易知道这个幂级数的收敛半径为 1, 但在  $x = \pm 1$  都发散, 故收敛区间为  $(-1, 1)$ .

令  $S(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ , 再令  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ , 在区间  $[0, x]$  上逐项积分, 得

$$\int_0^x f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

再将等式两端对  $x$  求微商就得到

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

所以原级数的和函数  $S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$ .

由此又可求出一些数项级数的和. 例如令  $x = \frac{1}{2}$ , 得  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$ ; 令  $x = \frac{1}{3}$ , 得  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}$ .

下面顺便指出幂级数在收敛区间的两端点处的一个性质.

**定理 5** 设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径为  $R$ , 如果在  $x = R$  处, 级数收敛, 则其和函数  $S(x)$  在  $x = R$  处左连续; 如果级数在  $x = -R$  处收敛, 则  $S(x)$  在  $x = -R$  处右连续.

证 将幂级数表成形式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$$

因为级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$  收敛, 而数列  $\left\{\left(\frac{x}{R}\right)^n\right\}$  对区间  $[0, R]$  上的每一  $x$  值是单调减少的, 并且一致有界  $\left(\frac{x}{R}\right)^n \leq 1$ , 根据级数一致收敛的

阿贝尔判别法, 知幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在区间  $[0, R]$  上一致收敛, 所以和函数  $S(x)$  在  $x = R$  处左连续. 定理的另一半可同法证之.

最后还要指出, 幂级数的一般形式可以写成

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

这时只要作变换  $y = x - x_0$ , 它就化为上面讨论过的幂级数, 因此有关幂级数的一切结论现在仍然成立, 所不同的是收敛区间的中心已从原点移到点  $x_0$ .

### 9.3.3 函数的泰勒展开式

到此为止, 我们确定了幂级数的收敛区域, 并研究了它的和函数的各种性质. 但在实际应用中, 所遇到的经常是相反的问题, 即函数  $f(x)$  在给定的区间上是否可以展开成一个幂级数?

首先, 如果  $f(x)$  可以展成幂级数, 即它可以表示成

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$$

由 9.3.2 中定理 3 的推论知,  $f(x)$  必有任意阶微商, 并且

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \cdots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \cdots$$

...

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + (n+1)!a_{n+1}(x - x_0) + \frac{(n+2)!}{2!}a_{n+2}(x - x_0)^2 + \cdots$$

...

在上面各等式中令  $x = x_0$  得

$$f(x_0) = a_0, f'(x_0) = a_1, f''(x_0) = 2a_2, \dots$$
$$f^{(n)}(x_0) = n!a_n, \dots$$

得

$$a_0 = f(x_0), a_1 = f'(x_0), a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \dots$$
$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \dots$$

这就是说,如果  $f(x)$  能展为  $x - x_0$  的幂级数,那么这个幂级数一定是下面这种形式:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

反之,对在点  $x_0$  有任意阶微商的一般函数  $f(x)$ , 总能构造幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

并称它为  $f(x)$  在点  $x_0$  的**泰勒级数**, 记作

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

特别当  $x_0 = 0$  时,级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

也称为  $f(x)$  的**马克劳林级数**.

一般说来,  $f(x)$  的泰勒级数除去点  $x_0$  外都有可能发散,而且即使在点  $x \neq x_0$  处收敛,它的和还不一定就是  $f(x)$ ; 因此上面提及的问题就化成具有任意阶微商的函数  $f(x)$ , 其泰勒级数在什么条件下收敛于自身?

由 2.5.1 中的泰勒定理知,若函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某一邻域内具有直至  $(n+1)$  阶的微商,其余项为拉格朗日形式的泰勒公式为

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

而  $\xi$  是介于  $x_0$  与  $x$  之间的一点. 由此可见, 要  $f(x)$  的泰勒级数收敛于自身, 必须而且只须

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

于是有

**定理 1** 设函数  $f(x)$  在区间  $(x_0 - R, x_0 + R)$  上有任意阶微商, 则  $f(x)$  在  $(x_0 - R, x_0 + R)$  上可以展成泰勒级数的充分必要条件是: 对这区间内的任意点  $x$ , 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0$$

其中  $\xi$  是介于  $x_0$  与  $x$  之间的一点.

根据这个定理, 可以得到一个便于应用的充分条件.

**定理 2** 如果函数  $f(x)$  的各阶微商在区间  $(x_0 - R, x_0 + R)$  上一致有界, 则  $f(x)$  在这区间上可以展成泰勒级数, 即

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots \\ & + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots, \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R) \end{aligned}$$

**证** 因为  $f(x)$  的各阶微商在  $(x_0 - R, x_0 + R)$  上一致有界, 即存在这样一个常数  $M$ , 使得在  $(x_0 - R, x_0 + R)$  上成立

$$|f^{(n)}(x)| < M \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

这时

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| < M \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \\ &\leq M \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

由定理 1 知,  $f(x)$  在  $(x_0 - R, x_0 + R)$  上可以展成泰勒级数.

### 9.3.4 初等函数的泰勒展开式

利用 9.3.3 的定理 2 可求一些初等函数的泰勒展开式.

1. 求函数  $e^x$  的马克劳林展开式.

解 由于当  $|x| < M$  时有

$$|(e^x)^{(n)}| = |e^x| \leq e^{|x|} \leq e^M \quad (n = 1, 2, \dots)$$

故推知  $e^x$  在区间  $(-M, M)$  上能展成幂级数. 又从  $M$  的任意性得  $e^x$  可在整个数轴上展成幂级数. 又因为

$$(e^x)^{(n)} \Big|_{x=0} = 1$$

所以有展开式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

这个结果与 9.3.2 中的例 1 是完全一致的. 特别取  $x = 1$  就得到数  $e$  的级数表示

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

2. 求函数  $\sin x$  和  $\cos x$  的马克劳林展开式.

解 由于对任意的实数  $x$  都有

$$\left| \frac{d^n}{dx^n} \sin x \right| = \left| \sin \left( x + \frac{n\pi}{2} \right) \right| \leq 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

故正弦函数  $\sin x$  可在整个数轴上展成幂级数. 又因为

$$\frac{d^n}{dx^n} \sin x \Big|_{x=0} = \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2m \\ (-1)^m, & n = 2m + 1 \end{cases}$$

所以  $\sin x$  的展开式为

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots$$

$$(-\infty < x < +\infty)$$

将这个展开式两端微分即得余弦函数  $\cos x$  的展开式

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{2m!} + \cdots$$

$$(-\infty < x < +\infty)$$

3. 求二项式函数  $f(x) = (1+x)^a$  的马克劳林展开式, 其中  $a$  为任意实数.

**解** 本题可用类似上述方法得到二项式  $(1+x)^a$  的泰勒展开式. 为避免估计余项的困难, 这个展开式还可以用下述方法得到.

因为

$$f^{(n)}(0) = \left. \frac{d^n}{dx^n} (1+x)^a \right|_{x=0} = a(a-1)\cdots(a-n+1)$$

所以二项式  $(1+x)^a$  的马克劳林级数为

$$1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

其中后项系数与前项系数之比的绝对值

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{a-n}{n+1} \right|$$

当  $n$  无限增加时趋于 1, 故得这个级数的收敛半径为 1. 现在进而说明它在收敛区间  $(-1, 1)$  上的和函数就是二项式  $(1+x)^a$ . 为此设

$$F(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} x^n$$

逐项微分得

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1}$$

以  $1+x$  乘此等式的两端, 并合并右端  $x$  的同次幂系数就得到关系式

$$(1+x)F'(x) = aF(x)$$

解此微分方程并注意到  $F(0) = 1$ , 即算得

$$F(x) = (1+x)^a$$

在二项式  $(1+x)^a$  的展开式中, 当  $a$  是自然数时就化成了牛顿二项式定理, 这是我们早已熟知的公式.

如果令  $a = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ , 就得到几个常见的二项式级数

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^n \quad (-1 \leq x \leq 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n \quad (-1 < x \leq 1) \end{aligned}$$

有时从某些函数的泰勒展式通过逐项积分与能得到另一些函数的泰勒展式. 例如, 若将展开式

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1)$$

的两端从 0 到  $x$  积分就得到对数函数  $\ln(1+x)$  的泰勒展式

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (-1 < x < 1)$$

由于展式右端的幂级数在  $x = 1$  收敛, 所以展式的成立区间为  $-1 < x \leq 1$ , 且有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2$$

同样从展开式

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (-1 < x < 1)$$

逐项积分可得反正切函数的泰勒展式

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

当  $x = 1$ , 就得到数  $\frac{\pi}{4}$  的级数表示

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots$$

### 9.3.5 幂级数的运算

**定理** 设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  的收敛半径分别为  $R_1, R_2$ ,

命  $R \leq \min(R_1, R_2)$ , 则在区间  $(-R, R)$  上有

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$$

$$(2) \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

其中  $c_n = \sum_{l=0}^n a_l b_{n-l}$ .

(3) 若  $b_0 \neq 0$ , 当  $|x|$  适当小时, 则有

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n, \quad x \in (-R, R)$$

其中  $R$  应具体分析, 而  $d_n$  可用待定系数法得到.

**证** (1) 与(2)的证明留作练习. 对(3)按假设, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^n b_l d_{n-l} \right) x^n$$

由展开式的唯一性知, 有

$$a_0 = b_0 d_0, a_1 = b_0 d_1 + b_1 d_0, \dots, a_n = b_0 d_n + \dots + b_n d_0, \dots$$

而  $b_0 \neq 0$ , 可依次求出  $d_0 = \frac{a_0}{b_0}, \dots$ .

**例 1** 将函数  $\frac{1}{(1-x)(2-x)}$  展开为幂级数.

**解** 由于

$$\frac{1}{(1-x)(2-x)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x}$$

而

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1, 1)$$

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \quad (-2 < x < 2)$$

因而当  $-1 < x < 1$  时有

$$\frac{1}{(1-x)(2-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n$$

**例 2** 将函数  $\ln^2(1-x)$  展开为幂级数.

**解** 已知在区间  $[-1, 1)$  中有

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

根据幂级数的乘法定理, 且注意到

$$a_n = 0, a_n = -\frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

所以有

$$c_n = \sum_{L=0}^n a_L a_{n-L} = \sum_{L=1}^{n-1} \frac{1}{L(n-L)} = \frac{2}{n} \sum_{L=1}^{n-1} \frac{1}{L} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

从而得到

$$\ln^2(1-x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}\right) x^n \quad (-1 < x < 1)$$

## 复习思考题

1. 幂级数的收敛区域与一般函数项级数的收敛区域有何不同?
2. 幂级数在收敛区域内部不一定一致收敛,为什么其和函数在收敛区域内部一定连续,而且还可以逐项求微商?
3. 如果  $f(x)$  在区间  $(x_0 - R, x_0 + R)$  中有任意阶导数,  $f(x)$  是否能在这一区间上展开成幂级数?
4. 如果  $f(x)$  的泰勒级数在  $(-\infty, +\infty)$  中处处收敛,是否一定收敛到  $f(x)$  本身?
5. 泰勒公式、泰勒级数与泰勒展开是不是等同语?

## 习题 9.3

1. 求下列幂级数的收敛半径:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n^2}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n + \sqrt{n}}$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} x^{2(n-1)}$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n} \quad (a > 0, b > 0)$$

2. 求下列级数的和函数:

$$(1) x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

$$(2) 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots$$

$$(3) 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + \cdots + n(n+1)x^{n-1} + \cdots$$

$$(4) \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{x^n}{n(n+1)} + \cdots$$

$$(5) x + \frac{x^3}{1 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!} + \cdots$$

3. 将下列函数在指定点附近展成幂级数,并求收敛区域:

$$(1) x^3 - 2x^2 + 5x - 7 \quad (x = 1)$$

$$(2) e^x \quad (x = a)$$

$$(3) \ln x \quad (x = 1)$$

$$(4) \cos x \quad \left(x = \frac{\pi}{4}\right)$$

$$(5) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x = 0)$$

$$(6) \ln(1+x-2x^2) \quad (x = 0)$$

$$(7) \frac{1}{x^2 + 3x + 2} \quad (x = -4)$$

4. 将下列函数展成幂级数:

$$(1) \sin^2 x$$

$$(2) \arcsin x$$

$$(3) \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$(4) (1+x)\ln(1+x)$$

5. 将下列积分表成级数形式:

$$(1) \int \frac{e^x}{x} dx$$

$$(2) \int_0^x \cos x^2 dx$$

6. 方程  $y + \lambda \sin y = x$  ( $\lambda \neq -1$ ) 在  $x = 0$  附近确定了一个隐函数  $y(x)$ , 试求它的幂级数展开式中的前四项.

## 9.4 级数的应用

### 9.4.1 幂级数应用于近似计算

若已知函数在点  $x = 0$  处的幂级数展开式, 则在有效区间上其它点处的函数值就可利用这个级数近似地计算出来. 下面将通过对数值的计算来说明这种方法.

例 1 计算  $\ln 2$  的近似值, 使准确到  $10^{-4}$ .

解 利用展开式

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots$$
$$(-1 < x \leq 1)$$

取  $x = 1$ , 则得

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$

但这个级数收敛太慢, 因为若取前  $n$  项和作为近似值, 根据交错级数的性质, 它的误差是

$$|r_n| < |a_{n+1}| = \frac{1}{n+1}$$

要使  $\frac{1}{n+1} < 10^{-4}$ , 则必须  $n \geq 10^4$ , 即至少要计算前 10000 项, 这当然并非上策. 因而有必要用收敛很快的级数去代替这个级数, 为此, 在展开式

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

中以  $-x$  代  $x$  就得到

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots$$

两式相减有

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \right)$$

令  $\frac{1+x}{1-x} = 2$ , 得  $x = \frac{1}{3}$ , 则

$$\ln 2 = 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \dots \right)$$

若用前四项计算, 则由此产生的误差是

$$\begin{aligned} & 2 \left( \frac{1}{9 \cdot 3^9} + \frac{1}{11 \cdot 3^{11}} + \frac{1}{13 \cdot 3^{13}} + \dots \right) \\ & < \frac{2}{9 \cdot 3^9} \left( 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \dots \right) \\ & = \frac{1}{4 \cdot 3^9} < 0.2 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

再加上前四项的计算误差. 总误差就小于

$$0.5 \times 10^{-4} + 0.2 \times 10^{-4} < 10^{-4}$$

于是得

$$\ln 2 \approx 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} \right) = \frac{53056}{76545} \approx 0.6931$$

在第三章中,当定积分的被积函数的原函数不能表达为初等函数时,我们已经介绍过几种关于计算积分的近似方法.但若被积函数在积分区间上能展成为收敛的幂级数,则将这个级数逐项积分后,可由所得级数来计算定积分的近似值,它通常比过去的方法简便许多.

例2 计算积分  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$  的近似值,使精确到  $10^{-4}$ .

解 被积函数  $\frac{\sin x}{x}$  可以在整个数轴上展成幂级数,且为

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

逐项积分得

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \dots$$

这是收敛很快的交错级数.依次算得各项的值并取五位小数有

$$\frac{1}{3 \cdot 3!} \approx 0.05556, \quad \frac{1}{5 \cdot 5!} \approx 0.00167,$$

$$\frac{1}{7 \cdot 7!} = \frac{1}{35280} < 0.3 \times 10^{-4}$$

所以只须算到前三项,这时总误差小于

$$3 \times 0.5 \times 10^{-5} + 0.3 \times 10^{-4} < 10^{-4}$$

于是得

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx 1 - 0.05556 + 0.00167 \approx 0.9461$$

#### 9.4.2 司特林公式

当  $n$  很大时,要计算阶乘  $n!$  的近似值,即使利用对数,也很不方便.下面将借助于幂级数的知识来导出它的近似表达式.这无论在数学理论的研究上或实际问题的计算中,都有着重要的应用.为

此先来证明瓦里斯(Wallis)公式.

**引理** 若 $(2n)!!$ 与 $(2n-1)!!$ 分别表示前 $n$ 个偶数与前 $n$ 个奇数的连乘积,则有

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2$$

**证** 因为当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时有

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x$$

将此不等式从 $0$ 到 $\frac{\pi}{2}$ 积分得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx$$

所以

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

即

$$\left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n}$$

若令

$$a_n = \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1}, \quad b_n = \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n}$$

则容易得出 $\{a_n\}$ 是严格增有上界 $\frac{\pi}{2}$ 的数列, $\{b_n\}$ 是严格减有下界

$\frac{\pi}{2}$ 的数列,并且

$$b_n - a_n = \frac{1}{2n(2n+1)} \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2n}$$

当 $n$ 无限增大时,这个差值趋于零.由此即得瓦里斯公式.

现在就能根据这个引理导出阶乘 $n!$ 的司特林(Stirling)公式.

**定理** 设 $n$ 是自然数,则有

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n e^{\frac{1}{12n}}$$

其中  $0 < \theta_n < 1$ .

证 在展开式

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x \left( 1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + \cdots + \frac{1}{2m+1}x^{2m} + \cdots \right)$$

中令  $x = \frac{1}{2n+1}$ , 就得到

$$\ln \frac{n+1}{n} = \frac{2}{2n+1} \left[ 1 + \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5} \frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots \right]$$

即

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5} \frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots$$

又因为

$$\begin{aligned} 1 &< 1 + \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5} \frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots \\ &< 1 + \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots \right] \\ &= 1 + \frac{1}{12n(n+1)} \end{aligned}$$

所以有不等式

$$1 < \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)}$$

即

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}$$

再考察数列  $\left\{ a_n = \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \right\}$ , 作出它的相邻两项的比

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e}$$

故得

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}}$$

从左边不等式推知  $a_{n+1} < a_n$ , 即  $\{a_n\}$  是严格减数列, 又  $a_n > 0$ , 所以它必存在有限的极限  $a$ ; 从右边不等式推知

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a_{n+1} e^{-\frac{1}{12(n+1)}}$$

即  $\{a_n e^{-\frac{1}{12n}}\}$  是严格增数列, 且仍以  $a$  为其极限. 如此上面两个单调数列的共同极限  $a$  必介于这两个数列的通项  $a_n e^{-\frac{1}{12n}}$  与  $a_n$  之间, 即有

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a < a_n.$$

进而有

$$1 < \frac{a_n}{a} < e^{\frac{1}{12n}}$$

若取  $\theta_n = 12n \ln \frac{a_n}{a}$ , 则  $0 < \theta_n < 1$ , 并且

$$a_n = a e^{\frac{\theta_n}{12n}}$$

代入  $a_n$  的表达式就得到

$$n! = a \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}$$

于是余下的问题就是要确定常数  $a$ . 因为

$$n! = \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n a_n, \quad (2n)! = \sqrt{2n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} a_{2n}$$

所以

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!} = \sqrt{\frac{n}{2}} \frac{a_n^2}{a_{2n}}$$

代入瓦里斯公式得

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2(2n+1)} \frac{a_n^4}{a_{2n}^2} = \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

从而  $a = \sqrt{2\pi}$ . 这就完全证明了司特林公式.

司特林公式给出不等式

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}$$

及当  $n$  无限增大时  $n!$  的阶

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (n \rightarrow +\infty)$$

它们在处理  $n$  很大与  $n!$  有关问题时是很有用的.

例 1 利用  $n!$  的阶很容易算得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[2n]{2n\pi}}{e} = \frac{1}{e}$$

例 2 证明当  $n \rightarrow \infty$  时,  $C_{2n}^n \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}} 2^{2n}$ .

$$\text{证 } C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} 2^{2n} \quad (n \rightarrow +\infty)$$

### 9.4.3 连续函数的多项式逼近

前面已经讲过,把函数  $f(x)$  展成幂级数的重要应用之一就是  
用多项式来逼近函数,且这个多项式的系数可由  $f(x)$  及它的各阶  
导数在  $x=0$  的值表达.但是能展开成幂级数的函数毕竟是很狭  
窄的一类函数,因为它要求函数有任意阶导数,且如 9.3.3 中所看  
到的,即使这样强的条件还是不充分的.因此产生这样一个问题:  
能用多项式逼近的一类函数是否可要求低一些?为此给出

**定义** 设  $f(x)$  是定义在  $[a, b]$  上的函数,如果对任意  $\epsilon > 0$ ,  
总能找到多项式  $p(x)$ ,使得对  $[a, b]$  中所有  $x$  均有

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon$$

成立,则称  $f(x)$  在  $[a, b]$  上能用多项式一致逼近.

显然,一个可以展成幂级数的函数,在这个级数的收敛区间内  
部的任一闭区间上,都可以用多项式来一致逼近.然而幂级数只是  
以多项式  $P_n(x)$  (但其次数不一定为  $n$ ) 作为项的多项式级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$$

的一种特殊情形. 更一般, 只要  $f(x)$  能展成一致收敛的多项式级数:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$$

那么  $f(x)$  就能用多项式一致逼近. 反之, 能用多项式一致逼近的函数也一定能展开成一致收敛的多项式级数. 事实上, 假定  $f(x)$  在  $[a, b]$  上能用多项式一致逼近, 那么对任意自然数  $n$ , 都可以找到一个多项式  $Q_n$ , 使得对  $[a, b]$  中所有  $x$  均有

$$|f(x) - Q_n(x)| < \frac{1}{n} \quad (1)$$

令

$$P_1(x) = Q_1(x), P_n(x) = Q_n(x) - Q_{n-1}(x) \quad (n > 1)$$

则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$  的部分和就是  $Q_n(x)$ , 不等式(1)说明级数

$\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛于  $f(x)$ .

由此可见,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可以用多项式一致逼近, 等价于  $f(x)$  在这个区间上可以展成一致收敛的多项式级数. 又因为所有的多项式是连续的, 因而  $f(x)$  在  $[a, b]$  上能用多项式一致逼近的必要条件是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续. Weierstrass 在 1885 年证明了:  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续也是  $f(x)$  能用多项式一致逼近的充分条件. 在这个定理的各种证明中, 伯恩斯坦(Beixtein) 的证明最普通, 因为它的证明是构造性的. 为了证明这个定理, 先作些准备工作.

设  $f(x)$  是定义在  $[0, 1]$  上的任意函数, 记

$$B_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

则

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x)$$

称为函数  $f(x)$  的  $n$  次伯恩斯坦多项式. 由(2)定义的  $n+1$  个多项式, 叫做“伯恩斯坦基底”; 因为任何  $n$  次多项式可用它们线性表出. 考察以下三个特例:

1.  $f(x) = 1$

$$\begin{aligned} B_n(1; x) &= \sum_{k=0}^n B_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &= [x + (1-x)]^n = 1 \end{aligned}$$

2.  $f(x) = x$

$$\begin{aligned} B_n(x; x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

令  $i = k - 1$ , 于是

$$\begin{aligned} B_n(x; x) &= x \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} x^i (1-x)^{n-1-i} \\ &= x \sum_{i=0}^{n-1} B_{n-1,i}(x) = x \end{aligned}$$

3.  $f(x) = x^2$

有类似上述方法可证

$$B_n(x^2; x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)x^2 + \frac{1}{n}x$$

有了这三个公式之后, 我们便可以证明伯恩斯坦逼近定理.

**定理 1(伯恩斯坦)** 设  $f(x)$  是  $[0, 1]$  上的连续函数, 则对任意  $\epsilon > 0$ , 存在自然数  $N$ , 凡是  $n > N$  便有

$$|B_n(f; x) - f(x)| < \epsilon$$

对  $[0, 1]$  上一切  $x$  成立.

**证** 由于  $\sum_{k=0}^n B_{n,k}(x) \equiv 1$ , 故

$$|B_n(f; x) - f(x)| = \left| \sum_{k=0}^n \left[ f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] B_{n,k}(x) \right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| B_{n,k}(x)$$

因为  $f(x)$  在  $[0, 1]$  连续, 故  $f(x)$  在  $[0, 1]$  一致连续, 即对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 对  $s, t \in [0, 1]$  且  $|s - t| < \delta$  时有

$$|f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3)$$

对于上述的  $\delta$ , 分拆和式

$$\sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| B_{n,k}(x) = \sum_1 + \sum_2$$

其中

$$\begin{aligned} \sum_1 &= \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| B_{n,k}(x) \\ \sum_2 &= \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| B_{n,k}(x) \end{aligned}$$

由于(3)式, 可见

$$\sum_1 < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta} B_{n,k}(x) \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n B_{n,k}(x) = \frac{\varepsilon}{2}$$

因为  $f(x)$  在  $[0, 1]$  连续, 因此  $f(x)$  有界. 设  $|f(x)| \leq M$ , 同时注

意到  $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta$ , 因此  $\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \geq \delta^2$ , 从而有

$$\begin{aligned} \sum_2 &\leq 2M \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta} B_{n,k}(x) \\ &\leq 2M \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta} \frac{\left(\frac{k}{n} - x\right)^2}{\delta^2} B_{n,k}(x) \\ &\leq \frac{2M}{\delta^2} \sum_{k=0}^n \left[ \left(\frac{k}{n}\right)^2 - 2x\left(\frac{k}{n}\right) + x^2 \right] B_{n,k}(x) \\ &= \frac{2M}{\delta^2} [B_n(x^2; x) - 2xB_n(x; x) + x^2] \\ &= \frac{2M}{\delta^2} \left[ \left(1 - \frac{1}{n}\right)x^2 + \frac{1}{n}x - 2x^2 + x^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2M}{\delta^2} \frac{1}{n} x(1-x) \\
 &\leq \frac{2M}{4n\delta^2} = \frac{M}{2n\delta^2}
 \end{aligned}$$

因此,对任给  $\varepsilon > 0$ ,取  $N > \frac{M}{\varepsilon\delta^2}$ ,当  $n > N$  时

$$\begin{aligned}
 |B_n(f;x) - f(x)| &\leq \sum_1 + \sum_2 \\
 &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
 \end{aligned}$$

对  $[0,1]$  中一切  $x$  都成立.

伯恩斯坦逼近定理提供了维尔斯特拉斯的关于闭区间上的连续函数可以用多项式一致逼近的定理的一个构造性的证明,这就使得伯恩斯坦多项式自从本世纪初开始,直到今天仍是函数逼近论中的重要研究对象.把  $[0,1]$  区间推广到一般闭区间  $[a,b]$ ,使得

**定理 2**(维尔斯特拉斯) 有限闭区间  $[a,b]$  上的连续函数  $f(x)$  可以在这个区间上用多项式一致逼近.

**证** 设  $f(x)$  在  $[a,b]$  上连续,命  $x = a + (b-a)t$ ,  $f(x) = f[a + (b-a)t] = g(t)$ ,则  $g(t)$  是  $[0,1]$  上的连续函数,由定理 1,对任意  $\varepsilon > 0$ ,存在多项式

$$P(t) = B_n(g;t)$$

使得

$$|g(t) - P(t)| < \varepsilon \quad (0 \leq t \leq 1)$$

即

$$\left| f(x) - P\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right| < \varepsilon \quad (a \leq x \leq b)$$

显然  $P\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$  仍是  $x$  的多项式,这就证明了  $f(x)$  在  $[a,b]$  上可用多项式一致逼近.

必须注意,如果把有限闭区间  $[a,b]$  改成开区间或者无穷区

间,定理就不一定成立.例如  $f(x) = \frac{1}{x}$  在  $(0, 1]$  上连续. 但它在  $x = 0$  附近是无界的,因此不可能用多项式来一致逼近. 同样,  $f(x) = \frac{1}{x}$  在  $[1, +\infty)$  上连续且有界,但任一多项式在  $[1, +\infty)$  上无界,故也不能用来一致逼近  $f(x)$ .

**例** 证明函数  $f(x) = |x|$  在区间  $[-1, 1]$  上能用多项式一致逼近.

**证** 令  $t = 1 - x^2$ , 在  $|t| < 1$  上有

$$\begin{aligned} |x| &= \sqrt{1 - (1 - x^2)} = \sqrt{1 - t} \\ &= 1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2 \cdot 4}t^2 - \dots - \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}t^n - \dots \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} &\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \\ &= \sqrt{\frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \dots \frac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)^2} \cdot \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{1}{(2n)^2}} \\ &< \frac{1}{2n \sqrt{2n-1}} \end{aligned}$$

因此  $|x|$  的展开式在  $t = \pm 1$  处也收敛,从而可知上述级数在  $|t| \leq 1$  上一致收敛;故级数

$$|x| = 1 - \frac{1}{2}(1 - x^2) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}(1 - x^2)^n$$

在  $|x| \leq 1$  上一致收敛,于是  $|x|$  在  $[-1, 1]$  上可用多项式

$$1 - \frac{1}{2}(1 - x^2) - \sum_{k=2}^n \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}(1 - x^2)^k$$

一致逼近.

#### 9.4.4 隐函数存在定理

在 6.4.1 中,曾叙述了隐函数的存在定理,现在要用逐次逼近

法来证明这个定理. 为简单起见, 这里只论及二元方程  $F(x, y) = 0$  的情形. 但是对于多元方程或方程组的情形, 亦不难作类似的证明.

**定理** 设二元函数  $F(x, y)$  在以点  $(x_0, y_0)$  为中心的正方形区域  $D: |x - x_0| \leq b, |y - y_0| \leq b$  上连续, 且有连续的偏导数  $F_x'(x, y)$  和  $F_y'(x, y)$ , 并设:  $F(x_0, y_0) = 0, F_y'(x_0, y_0) \neq 0$ , 则方程

$$F(x, y) = 0$$

在点  $(x_0, y_0)$  的某一邻域内确定唯一的连续隐函数  $y = y(x)$ , 满足

$$F(x, y(x)) \equiv 0 \text{ 且 } y(x_0) = y_0$$

**证** 作辅助函数

$$\varphi(x, y) = y - y_0 - \frac{F(x, y)}{F_y'(x_0, y_0)}$$

则有  $\varphi(x_0, y_0) = 0, \varphi_y'(x_0, y_0) = 0$ . 由于这个函数及其对  $y$  的微商连续性, 不失一般性, 可设区域足够小, 使在  $D$  上恒有

$$|\varphi_y'(x, y)| < q$$

其中  $q$  是小于 1 的正数. 然后缩小  $x$  的变化范围成为更小的区间  $[x_0 - a, x_0 + a] (a < b)$ , 使得在此区间内, 函数  $\varphi(x, y_0)$  适合不等式

$$|\varphi(x, y_0)| < (1 - q)b$$

这时利用引进的辅助函数所给的方程可以改写成

$$y = y_0 + \varphi(x, y) \tag{A}$$

而在含于  $D$  中的区域  $D'$

$$|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$$

上考虑方程(A)的隐函数之存在.

将  $y_0$  算作是隐函数  $y$  的零次逼近, 并代入到方程(A)的右端, 如此得到函数

$$y_1(x) = y_0 + \varphi(x, y_0)$$

它是  $y$  的一次逼近;再在方程(A)的右端用  $y_1(x)$  替代  $y$  就得到二次逼近函数

$$y_2(x) = y_0 + \varphi(x, y_1(x))$$

依次类推. 如果已知  $n-1$  次逼近函数  $y_{n-1}(x)$ , 则  $n$  次逼近函数  $y_n(x)$  由公式

$$y_n(x) = y_0 + \varphi(x, y_{n-1}(x))$$

确定.

容易看出, 当依照这些公式计算各次逼近时, 所得函数列  $\{y_n(x)\}$  不会越出区间  $[y_0 - b, y_0 + b]$  之外. 以下用归纳法证明这一断言.

由一次逼近函数的定义得

$$y_1(x) - y_0 = \varphi(x, y_0)$$

于是推知

$$|y_1(x) - y_0| = |\varphi(x, y_0)| < (1-q)b < b$$

并且函数  $y_1(x)$  显然是连续的. 设  $n-1$  次逼近函数满足

$$|y_{n-1}(x) - y_0| < b$$

则由此可计算第  $n$  次逼近函数得

$$y_n(x) - y_0 = \varphi(x, y_{n-1}(x))$$

而当函数  $y_{n-1}(x)$  连续时, 函数  $y_n(x)$  也是连续的. 因为

$$\begin{aligned} |\varphi(x, y_{n-1}(x))| &\leq |\varphi(x, y_{n-1}(x)) - \varphi(x, y_0)| \\ &\quad + |\varphi(x, y_0)| \end{aligned}$$

利用微分学的中值定理可知在  $y_0$  与  $y_{n-1}(x)$  之间存在点  $\xi(x)$ , 使得

$$\begin{aligned} &|\varphi(x, y_{n-1}(x)) - \varphi(x, y_0)| \\ &= |\varphi'_y(x, \xi(x))| |y_{n-1}(x) - y_0| < qb \end{aligned}$$

又因

$$|\varphi(x, y_0)| < (1-q)b$$

所以

$$|y_n(x) - y_0| = |\varphi(x, y_{n-1}(x))| < qb + (1-q)b = b$$

现在转向逐次逼近函数列  $\{y_n(x)\}$  的收敛问题. 为此考虑级数

$$y_0 + (y_1(x) - y_0) + (y_2(x) - y_1(x)) + \cdots \\ + (y_n(x) - y_{n-1}(x)) + \cdots$$

并求差式  $y_n(x) - y_{n-1}(x)$  的估计值. 当  $n = 1$  时显然有

$$|y_1(x) - y_0| < (1 - q)b$$

当  $n = 2$  时由微分中值定理与微商  $\varphi_y'(x, y)$  的有界性可得

$$|y_2(x) - y_1(x)| = |\varphi(x, y_1(x)) - \varphi(x, y_0)| \\ < q |y_1(x) - y_0| < q(1 - q)b$$

当  $n = 3$  时依照同样的推理可得

$$|y_3(x) - y_2(x)| = |\varphi(x, y_2(x)) - \varphi(x, y_1(x))| \\ < q |y_2(x) - y_1(x)| < q^2(1 - q)b$$

依此类推, 一般地就有

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| < q^{n-1}(1 - q)b$$

于是上述函数项级数除第一项外其余各项的绝对值就不超过收敛的等比级数

$$(1 - q)b(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + \cdots)$$

的对应各项, 因而这个函数项级数在区间  $[x_0 - a, x_0 + a]$  上一致收敛. 设其极限函数为  $y(x)$ , 就有

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$$

且在  $[x_0 - a, x_0 + a]$  上连续. 在公式

$$y_n(x) = y_0 + \varphi(x, y_{n-1}(x))$$

中令  $n$  无限增大取极限就得到

$$y(x) = y_0 + \varphi(x, y(x))$$

亦即函数  $y(x)$  满足方程

$$F(x, y(x)) \equiv 0$$

又从各次逼近函数  $y_n(x)$  的定义容易看出  $y_n(x_0) = y_0$ , 所以也有

$$y(x_0) = y_0$$

最后余下的问题是要证明隐函数存在的唯一性,假设除函数  $y(x)$  外还有另一函数  $z(x)$ ,它在区间  $[x_0 - a, x_0 + a]$  上连续,并且也满足方程

$$z(x) = z_0 + \varphi(x, z(x))$$

于是推知

$$\begin{aligned} |y(x) - z(x)| &= |\varphi(x, y(x)) - \varphi(x, z(x))| \\ &< q |y(x) - z(x)| \end{aligned}$$

因  $q$  是小于 1 的正数,故  $y(x) \neq z(x)$  是不合理的,即隐函数是唯一的.

从上面的证明中可以看出,这个逐次逼近法不仅能确定隐函数的存在,而且也给出它的实际计算.

#### 习题 9.4

1. 取被积函数所展开的幂级数的前三项计算积分  $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx$ ,

并估计误差.

2. 计算下列定积分的近似值:

(1)  $\int_0^{0.5} \frac{\arctan x}{x} dx$  (精确到 0.001)

(2)  $\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^4} dx$  (精确到 0.001)

3. 利用 Stirling 公式求极限:

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{n!}$                       (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

4. 研究下列级数的敛散性:

(1)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$                       (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+p}}$

5. 证明:当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\ln(n!) \sim \ln n^n$ .

6. 设  $g(x)$  在区间  $[0, \pi]$  上连续,证明对任给  $\epsilon > 0$ ,存在偶三角多项式  $T(x)$ ,使得有

$$|g(x) - T(x)| < \varepsilon$$

7. 设  $x_1, x_2 \in [a, b], x_1 \neq x_2$ , 则存在  $[a, b]$  上的连续函数  $f(x)$ :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = x_1 \\ 0, & x = x_2 \end{cases}$$

且  $f(x)$  在  $[a, b]$  上能被多项式一致逼近.

## 复 习 题

1. 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 且数列  $\{a_n\}$  单调递减, 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ .

2. 设  $a_n > 0$ , 证明  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$  收敛.

3. 研究下列级数的条件收敛性与绝对收敛性:

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^k \tan \frac{\pi}{2^n}$

(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$

(3)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos^2 n}{n}$

(4)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n}{\ln n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

(5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \sin n}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}$

(6)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \sqrt{n^2 + 1} \pi$

(7)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n a^{2n}}$

(8)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{a^{\ln n}} \quad (a > 0)$

4. 研究下列级数在给定区间上的一致收敛性:

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{e^{nx} \cdot \sqrt{n+x}}, \quad 0 \leq x < +\infty$

(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} (1-x) \frac{x^n}{1-x^{2n}} \sin nx, \quad 0 \leq x < 1$

5. 证明: 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{(1+x)^n}$  在  $(0, +\infty)$  内绝对并一致收敛, 但

$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n x}{(1+x)^n} \right|$  在  $(0, +\infty)$  内并不一致收敛.

6. 设  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 又设  $F_0(x) = \int_a^x f(x) dx$ ,  
 $F_1(x) = \int_a^x F_0(x) dx, \dots, F_n(x) = \int_a^x F_{n-1}(x) dx, \dots$  ( $a \leq x \leq b$ )

(1) 证明级数  $F_0(x) + F_1(x) + \dots + F_n(x) + \dots$  在  $[a, b]$  上一致收敛;

(2) 若级数  $F_0(x) + F_1(x) + \dots + F_n(x) + \dots$  在  $[a, b]$  上的和函数为  $S(x)$ , 求证  $S(x)$  满足方程

$$S'(x) - S(x) = f(x)$$

7. 证明:  $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \cos nx$  在  $(0, +\infty)$  上非一致收敛, 但是连续的.

8. 设函数列  $\{f_n(x)\}$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛于  $S(x)$ ; 若  $\int_a^b g(x) dx$  绝对收敛, 则

$$\int_a^b g(x) S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b g(x) f_n(x) dx$$

9. 求下列无穷级数的和

$$(1) 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

$$(2) 1^2 + \frac{2^2}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{4^2}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!}$$

10. 求下列广义幂级数的收敛域, 并在收敛域内求和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n} \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} (x+1)^{n-1}$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)2^n} \quad (4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-2} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^n$$

11. 求下列函数的幂级数展开式, 并求成立区间:

(1)  $x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2}$

(2)  $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$

(3)  $\arctan \frac{4+x^2}{4-x^2}$

12. 将下列积分表成级数形式:

(1)  $\int \frac{\sin x}{x} dx$                       (2)  $\int_0^x e^{-x^2} dx$

(3)  $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx$                       (4)  $\int_0^1 \left( \frac{\ln x}{1-x} \right)^2 dx$

13. 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  是递减的正项收敛级数, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}}{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}} = 1$$

14. 将级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$  的前  $N$  项之和  $S_N$  分为两个项  $S_N^+$  与  $S_N^-$  相

加, 其中  $S_N^+$ 、 $S_N^-$  分别为正项之和与负项之和, 证明:  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_N^-}{S_N^+}$  存在,

并求其值.

## 10 含参变量的积分

构造新函数的另一途径是引入含参变量的积分. 这些积分在本质上与函数项级数并无区别, 因此对于函数项级数的许多定理都可以毫无困难地类推到含参变量的积分中, 从而建立起相应的理论.

### 10.1 广义积分的收敛性判别

#### 10.1.1 无穷区间积分的收敛判别法

在 3.6 节曾介绍过积分区间为无限和被积函数在积分区间上有瑕点这两类广义积分, 并给出其敛散的定义. 但对如何判断这两种积分的敛散, 没有作进一步的讨论. 学过无穷级数后再来学习广义积分的收敛判别法, 就会发现二者有许多类似之处.

首先讨论无穷区间上的积分, 所谓无穷积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛, 是指

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

有有限的极限. 如果记

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx$$

$F(b)$  相当于无穷级数中的部分和. 那么无穷积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛就是指函数  $F(b)$  当  $b \rightarrow +\infty$  时有有限的极限, 由此导出类似于级数中的柯西收敛准则.

**定理 1**(Cauchy 准则) 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, +\infty)$  上连续, 则积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛的充分必要条件是对于任意给定的正数  $\epsilon$ , 总有这样的正数  $B$  存在, 只要  $b_1, b_2 > B$ , 不等式

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| < \epsilon$$

成立. 就是函数  $f(x)$  在距原点充分远的任意区间上的积分之绝对值小于  $\epsilon$ .

**证** 依定义, 积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛相当于函数

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx$$

当  $b \rightarrow +\infty$  时有有限的极限. 根据函数极限存在的柯西准则, 即对任意  $\epsilon > 0$ , 总有这样的正数  $B$  存在, 使得只要  $b_1, b_2 > B$ , 就有

$$|F(b_2) - F(b_1)| < \epsilon$$

成立. 而

$$F(b_2) - F(b_1) = \int_a^{b_2} f(x)dx - \int_a^{b_1} f(x)dx = \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx$$

所以当  $b_1, b_2 > B$  时, 有不等式

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| < \epsilon.$$

也和级数一样, 对任意函数的广义积分引进绝对收敛概念, 并且有类似的定理.

**定理 2** 如果函数  $f(x)$  在区间  $[a, +\infty)$  上连续, 且积分  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  收敛, 则积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛. 这时称后一积分为绝对收敛.

**证** 因为积分  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  收敛, 根据定理 1, 对任意  $\epsilon > 0$ , 总存在正数  $B$ , 使得当  $b_1, b_2 > B$  时有不等式

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} |f(x)| dx \right| < \epsilon$$

但

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \right| \leq \left| \int_{b_1}^{b_2} |f(x)| dx \right|$$

所以也有

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \right| < \epsilon$$

再利用定理 1, 即得积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛.

必须注意, 并不是任何一个收敛的积分都是绝对收敛的. 有的收敛积分, 把被积函数换成它的绝对值后就得到了发散的积分, 这类积分又称为是条件收敛的.

象无穷级数中的正项级数一样, 非负函数的积分也有一些便于应用的判别法.

**定理 3** 设函数  $f(x)$  是  $[a, +\infty)$  上的非负连续函数, 则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

收敛的充分必要条件是  $\int_a^b f(x) dx$  有界 ( $a \leq b < +\infty$ ).

**证** 因为  $f(x) \geq 0$ , 则积分

$$\int_a^b f(x) dx$$

是上限  $b$  的单调不减函数, 所以

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

存在的充分必要条件是  $\int_a^b f(x) dx$  有界.

根据这个定理, 就能得到类似级数中的比较判别法.

**定理 4** 设函数  $f(x)$  和  $g(x)$  在  $[a, +\infty)$  上连续, 且对充分大的  $x$  满足不等式

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

那么

(i) 若  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  收敛, 则  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛;

(ii) 若  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  发散, 则  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  发散.

证明和级数中的比较判别法一样, 留给读者作练习.

由于当  $p > 1$  时, 积分  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  ( $a > 0$ ) 收敛; 当  $p \leq 1$  时, 积分  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  发散; 所以在定理 4 中, 经常拿  $f(x)$  与函数  $\frac{1}{x^p}$  作比较, 即得

**推论** 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上连续 ( $a > 0$ ).

(i) 如果对充分大的  $x$ , 有不等式

$$|f(x)| \leq \frac{c}{x^p} \quad (p > 1, c \text{ 为正常数})$$

那么积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  绝对收敛.

(ii) 如果对充分大的  $x$ , 有不等式

$$f(x) \geq \frac{c}{x^p} \quad (p \leq 1, c \text{ 为正常数})$$

那么积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  发散.

**例 1** 积分  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$  与  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$  绝对收敛.

这是因为当  $1 \leq x < +\infty$  时有

$$\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}, \quad \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

由推论知原积分绝对收敛.

**例 2** 证明对任意实数  $a$ , 积分  $\int_1^{+\infty} x^a e^{-x} dx$  收敛.

**证** 因为对任意确定的实数  $a$ , 有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a e^{-\frac{x}{2}} = 0$$

故对充分大的  $x$  有  $x^a e^{-\frac{x}{2}} < 1$ , 于是推知

$$x^a e^{-x} < e^{-\frac{x}{2}}$$

而积分  $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx$  收敛, 由定理 4 得积分  $\int_1^{+\infty} x^a e^{-x} dx$  收敛.

在实际应用中, 更方便的是比较判别法的极限形式.

**定理 5** 设  $f(x)$  和  $g(x)$  都是  $[a, +\infty)$  上的非负连续函数, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$$

那么

(i) 若  $0 < k < +\infty$ , 则  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  与  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  同敛散;

(ii) 若  $k = 0$ , 则当  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  收敛时,  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  也收敛;

(iii) 若  $k = +\infty$ , 则当  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  发散时,  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  也发

散.

证明和级数中相应的定理一样, 留给读者作练习.

**例 3** 积分  $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x+1}(x^4+x+1)}$  是收敛的.

因为当  $x \rightarrow +\infty$  时

$$\frac{x^2}{\sqrt{x+1}(x^4+x+1)} \sim \frac{1}{x^{5/2}}$$

而  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{5/2}} dx$  收敛, 根据定理 5 的 (i) 知原积分收敛.

**例 4** 研究积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} dx$  的收敛性.

**解** 由于当  $x \rightarrow +\infty$  时,

$$\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} \sim \frac{\pi}{2x^3}$$

而  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$  收敛, 所以原积分收敛.

### 10.1.2 收敛性的精细判别法

下面要指出另一些更为精细的判别法,它能在不绝对收敛的情形下来判定广义积分收敛.为此,先来建立关于两个函数乘积的积分的某些引理.

**引理 1** 如果在区间 $[a, b]$ 上函数 $f(x)$ 连续,而非负函数 $g(x)$ 是单调不增的,则在 $[a, b]$ 上至少存在一点 $\xi$ ,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx$$

**证** 因为 $f(x)$ 连续, $g(x)$ 是非负单调不增的,也是可积的,所以 $f(x)g(x)$ 可积.用任意的分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

把 $[a, b]$ 分成 $n$ 个小区间,于是有

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)dx \\ &= \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)[g(x) - g(x_{i-1})]dx \quad (1) \end{aligned}$$

若以 $k$ 表示 $|f(x)|$ 的上界, $w_i$ 表示 $g(x)$ 在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅,则有

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)[g(x) - g(x_{i-1})]dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)| |g(x) - g(x_{i-1})| dx \\ &\leq k \sum_{i=1}^n w_i \Delta x_i \end{aligned}$$

其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ .因为 $g(x)$ 可积,所以

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n w_i \Delta x_i = 0 \quad (\lambda = \max \Delta x_i)$$

这样一来(1)可以写成

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \quad (2)$$

命

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

那么(2)式右边的和数可写成

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \\ &= \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) [F(x_i) - F(x_{i-1})] \\ &= g(x_0) [F(x_1) - F(x_0)] + g(x_1) [F(x_2) - F(x_1)] + \cdots \\ & \quad + g(x_{n-1}) [F(x_n) - F(x_{n-1})] \\ &= F(x_1) [g(x_0) - g(x_1)] + F(x_2) [g(x_1) - g(x_2)] + \cdots \\ & \quad + F(x_{n-1}) [g(x_{n-2}) - g(x_{n-1})] + F(b)g(x_{n-1}) \end{aligned}$$

因为连续函数  $F(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上有最小值  $m$  与最大值  $M$ , 而所有因式  $g(x_{i-1}) - g(x_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) 都是非负的, 所以当分别用  $m$  与  $M$  代替  $F(x)$  的值时就得到不等式

$$mg(a) \leq \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \leq Mg(a)$$

命  $\lambda \rightarrow 0$ , 即得

$$mg(a) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq Mg(a)$$

由此推得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu g(a)$$

其中  $m \leq \mu \leq M$ . 但据函数  $F(x)$  的连续性, 可知在闭区间  $[a, b]$  上必有一点  $\xi$  存在, 使  $\mu = F(\xi)$ .

从而

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)F(\xi)$$

这就是所要的公式.

如果非负函数  $g(x)$  是单调不减的, 则可用同样的方法证明: 在  $[a, b]$  上至少存在一点  $\xi$ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_a^b f(x)dx$$

如果  $g(x)$  在  $[a, b]$  中有正有负, 这时有

**引理 2** 如果在区间  $[a, b]$  上函数  $f(x)$  连续, 而函数  $g(x)$  是单调的, 则在  $[a, b]$  上至少存在一点  $\xi$ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx$$

**证** 假设  $g(x)$  是单调不增的, 则差式  $g(x) - g(b)$  就是非负的. 应用引理 1 就得到

$$\int_a^b f(x)[g(x) - g(b)]dx = [g(a) - g(b)]\int_a^\xi f(x)dx$$

由此化简后即得所需证明之公式.

同法证明  $g(x)$  是单调不减的情形.

所证明的这些引理统称为第二中值定理, 其中的公式又称波内(Bonnet)公式. 从它可以引出与无穷级数类似的迪里赫勒判别法和阿贝尔判别法.

**定理 1(Dirichlet 判别法)** 如果函数  $f(x)$  与  $g(x)$  在区间  $[a, +\infty)$  上连续, 且满足

(i)  $F(b) = \int_a^b f(x)dx$  ( $a < b < +\infty$ ) 有界;

(ii)  $g(x)$  在  $[a, +\infty)$  中单调, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ .

那么积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

收敛.

**证** 由引理 2, 对任意的  $b_2 > b_1 > a$  都有

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx = g(b_1)\int_{b_1}^\xi f(x)dx + g(b_2)\int_\xi^{b_2} f(x)dx$$

其中  $\xi$  是区间  $[b_1, b_2]$  上的一点. 又据条件 (i), 存在常数  $M$ , 使得

$$|F(b)| = \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M \quad (a < b < +\infty)$$

因而

$$\left| \int_{b_1}^{\xi} f(x) dx \right| = |F(\xi) - F(b_1)| \leq 2M$$

$$\left| \int_{\xi}^{b_2} f(x) dx \right| = |F(b_2) - F(\xi)| \leq 2M$$

又因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ , 故对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在正数  $B$ , 使得只要  $x > B$ , 就有

$$|g(x)| < \frac{\varepsilon}{4M}$$

于是当  $b_2 > b_1 > B$  时, 就得到

$$\begin{aligned} \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x) dx \right| &= |g(b_1)| \left| \int_{b_1}^{\xi} f(x) dx \right| + |g(b_2)| \left| \int_{\xi}^{b_2} f(x) dx \right| \\ &= \frac{\varepsilon}{4M} \cdot 2M + \frac{\varepsilon}{4M} \cdot 2M = \varepsilon \end{aligned}$$

根据 10.1.1 的定理 1, 可见积分  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$  收敛.

**推论** 如果当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $g(x)$  单调减趋于 0, 那么积分

$$\int_a^{+\infty} g(x) \sin x dx, \quad \int_a^{+\infty} g(x) \cos x dx$$

收敛.

**证** 由于对任意  $b > a$ , 都有

$$\left| \int_a^b \sin x dx \right| = |\cos a - \cos b| \leq 2$$

$$\left| \int_a^b \cos x dx \right| = |\sin b - \sin a| \leq 2$$

根据 Dirichlet 判别法, 上面两个积分收敛.

**例 1** 证明积分  $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx (a > 0)$  是条件收敛.

**证** 由上面的推论即得积分  $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  收敛, 但被积函数取

绝对值后构成的积分

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

是发散的. 因为  $|\sin x| \geq \sin^2 x$ , 而

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int_a^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{2x} dx$$

其中积分  $\int_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx$  收敛, 积分  $\int_a^{+\infty} \frac{1}{2x} dx$  发散, 所以积分

$\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$  发散, 由此推得积分  $\int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$  发散. 从而证明了

所给积分是条件收敛的.

同样可得一般的积分

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx, \quad \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx \quad (a > 0)$$

当  $0 < p \leq 1$  时都是条件收敛的.

例 2 判断积分  $\int_a^{+\infty} \sin x^2 dx$ ,  $\int_a^{+\infty} x \sin x^3 dx$  的收敛性.

解 令  $x^2 = t$ , 有

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

故知原积分条件收敛. 用同样方法可以证明积分  $\int_a^{+\infty} x \sin x^3 dx$  也是条件收敛的.

**定理 2 (Abel 判别法)** 如果函数  $f(x)$  与  $g(x)$  在区间  $[a, +\infty)$  上连续, 且满足

(i) 积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛;

(ii)  $g(x)$  在  $[a, +\infty)$  上单调有界.

那么积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$$

收敛.

证 由于  $x$  无限增大时,  $g(x)$  单调有界, 故存在有限的极限, 命

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = b$$

那么差式  $g(x) - b$  就是趋于零的单调函数. 又因积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 故对任意的  $b > a$ ,  $\int_a^b f(x) dx$  是有界的, 从而由定理 1 推知积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)[g(x) - b] dx$$

收敛, 于是积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x)[g(x) - b] dx + b \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

也收敛.

以上只是考察了积分区间  $[a, +\infty)$  上的无穷积分, 但是对它所得到的结论以及收敛性的各种判别法都可以类推到积分区间为  $(-\infty, b]$  或整个数轴上的广义积分.

无穷积分的内容与无穷级数的相应部分是平行的, 很多定理几乎是逐字逐句搬过来的. 原因很简单, 因为无穷积分与无穷级数同样是一个极限过程, 只不过无穷积分是函数的极限, 无穷级数是数列的极限罢了. 但是必须注意, 二者还是有差别的: 数项级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛的必要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

而无穷积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛时, 被积函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow +\infty$  时可以不趋于 0, 甚至可以是无界的. 例 2 的两个收敛积分

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx, \quad \int_0^{+\infty} x \sin x^3 dx$$

就说明这个问题.

### 10.1.3 无界函数积分的收敛判别法

现在转向被积函数有瑕点的另一种类型的广义积分. 这类广义积分与无穷区间上的广义积分有着十分紧密的联系.

假设函数  $f(x)$  在  $(a, b]$  上连续, 且以  $a$  为瑕点, 就是当  $x$  趋于  $a$  时,  $f(x)$  无界. 由定义

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$$

在这个极限等式右边的积分中作变量代换  $x = a + \frac{1}{y}$ , 就得到

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\epsilon}} f\left(a + \frac{1}{y}\right) \frac{dy}{y^2} \\ &= \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(a + \frac{1}{y}\right) \frac{dy}{y^2} \end{aligned}$$

这样一来, 无穷积分所建立的整个理论, 就可以通过这种联系, 完全平移到无界函数的广义积分中来, 从而相应地得到它的基本理论. 这里不再重复这些定理的证明, 只把结果写下来. 为一致起见, 下面的定理中总是假设  $f(x)$  与  $\varphi(x)$  在区间  $(a, b]$  上连续, 且以  $a$  为瑕点.

**定理 1 (柯西收敛准则)** 积分  $\int_a^b f(x) dx$  收敛的充分必要条件是, 对任意  $\epsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 只要  $0 < \delta' < \delta$ ,  $0 < \delta'' < \delta$ , 就有

$$\left| \int_{a+\delta'}^{a+\delta''} f(x) dx \right| < \epsilon$$

**定理 2** 如果积分  $\int_a^b |f(x)| dx$  收敛, 那么积分  $\int_a^b f(x) dx$  也收敛.

**定理 3** 如果对于充分接近  $a$  的  $x (> a)$  有不等式

$$0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$$

那么

(i) 若  $\int_a^b \varphi(x) dx$  收敛, 则  $\int_a^b f(x) dx$  收敛;

(ii) 若  $\int_a^b f(x) dx$  发散, 则  $\int_a^b \varphi(x) dx$  发散.

**推论** 如果对充分接近  $a$  的  $x (> a)$ ,

(i) 有不等式

$$|f(x)| \leq \frac{c}{(x-a)^p} \quad (p < 1, c \text{ 为正常数})$$

那么积分  $\int_a^b f(x) dx$  绝对收敛.

(ii) 有不等式

$$f(x) \geq \frac{c}{(x-a)^p} \quad (p \geq 1, c \text{ 为正常数})$$

那么积分  $\int_a^b f(x) dx$  发散.

**定理 4** 设  $f(x)$  和  $\varphi(x)$  都是  $(a, b]$  上的非负连续函数, 且

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k$$

那么

(i) 若  $0 < k < +\infty$ , 则  $\int_a^b f(x) dx$  和  $\int_a^b \varphi(x) dx$  同敛散;

(ii) 若  $k = 0$ , 则当  $\int_a^b \varphi(x) dx$  收敛时,  $\int_a^b f(x) dx$  收敛;

(iii) 若  $k = +\infty$ , 则当  $\int_a^b \varphi(x) dx$  发散时,  $\int_a^b f(x) dx$  发散.

**例 1** 研究椭圆积分  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$  的敛散性, 其中

$k^2 < 1$ .

这里被积函数以积分上限  $x = 1$  为瑕点, 由于

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} / \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}}$$

又  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$  收敛, 根据定理 4 知椭圆积分收敛.

例2 研究积分  $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$  的敛散性.

解 看上去似乎  $x=0, x=1$  都是瑕点,但实际上,由于

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x^2} = -\frac{1}{2}$$

被积函数在  $x=1$  附近是有界的,因此  $x=1$  并非瑕点.

考虑  $x=0$  附近的情况. 对充分小的  $x$ , 恒有  $1-x^2 \geq \frac{1}{2}$ , 所以

$$\left| \frac{\ln x}{1-x^2} \right| \leq 2 |\ln x|$$

而积分  $\int_0^1 |\ln x| dx = -\int_0^1 \ln x dx$  是收敛的, 因此原积分收敛.

例3 研究积分  $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \arctan x}{2+x^\beta} dx (\beta \geq 0)$  的收敛性.

解 当  $\alpha < 0$  时,  $x=0$  是瑕点, 但它又是无穷积分, 所以把积分分成两部分来考虑:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \arctan x}{2+x^\beta} dx = \int_0^1 \frac{x^\alpha \arctan x}{2+x^\beta} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha \arctan x}{2+x^\beta} dx$$

当  $x \rightarrow 0$  时,

$$\frac{x^\alpha \arctan x}{2+x^\beta} dx \sim \frac{1}{2} x^{\alpha+1}$$

故当  $-\alpha-1 < 1$ , 即  $\alpha > -2$  时, 第一个积分收敛; 当  $x \rightarrow +\infty$  时,

$$\frac{x^\alpha \arctan x}{2+x^\beta} \sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{x^{\beta-\alpha}}$$

故当  $\beta-\alpha > 1$  时, 第二个积分收敛; 所以原积分当  $\alpha > -2$  且  $\beta-\alpha > 1$  时收敛.

### 复习思考题

1. 写出无穷区间上的积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  敛散性的比较判别法及一般收敛性准则.

2. 两类广义积分有何联系?当为瑕点时,试由此建立广义积分  $\int_a^b f(x)dx$  收敛的相应理论.

3. 如果  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛,是否断言  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ?

4. 如果  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  中是非负连续函数,从  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛能否断言  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ?

5. 从  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  收敛能否断言  $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$  收敛?从  $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$  收敛能否断言  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  收敛?举例说明.

### 习题 10.1

1. 判断下列广义积分的收敛性:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} dx$$

$$(3) \int_2^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1-x^2)^2} dx$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx$$

$$(5) \int_0^{+\infty} \frac{x \arctan x}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx$$

$$(6) \int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln \ln x}$$

$$(7) \int_a^b \frac{x dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad (a < b)$$

$$(8) \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(9) \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$$

$$(10) \int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}$$

$$(11) \int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{e^{\sin x} - 1}$$

$$(12) \int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$$

$$(13) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} dx$$

$$(14) \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x(x^2-1)} dx$$

$$(15) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos x}}$$

$$(16) \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$$

$$(17) \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$$

$$(18) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\mu} dx$$

2. 证明对于无穷积分,分部积分公式成立(当公式中各部分都有意义时):

$$\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) \Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} g(x)f'(x)dx$$

并证明

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

3. 研究下列积分的条件收敛性与绝对收敛性:

$$(1) \int_1^{+\infty} \frac{\cos(1-2x)}{\sqrt{x^3} \sqrt[3]{x^2+1}} dx$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2+x+1}} dx$$

$$(3) \int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x \ln x} dx$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(1+\sqrt{x})} dx$$

## 10.2 含参变量的常义积分

### 10.2.1 含参变量的常义积分的性质

设二元函数  $f(x, u)$  在矩形区域  $D(a \leq x \leq b, \alpha \leq u \leq \beta)$  上连续,对于区间  $[\alpha, \beta]$  上的任意固定变量  $u$ ,函数  $f(x, u)$  对变量  $x$  在  $[a, b]$  上 Riemann 可积,这时称积分

$$\int_a^b f(x, u) dx$$

是含参变量  $u$  的常义积分. 如果对于固定的  $u$ ,被积函数  $f(x, u)$  对变量  $x$  在  $[a, b]$  上无界,或者积分区间是无限的,则称相应的参变量积分是含参变量  $u$  的广义积分.

这一节讨论含参变量的常义积分的性质.

**定理 1** 如果函数  $f(x, u)$  在矩形区域  $D(a \leq x \leq b, \alpha \leq u \leq \beta)$  上连续,则

$$\varphi(u) = \int_a^b f(x, u) dx$$

是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的连续函数.

证 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上任取一点 $u_0$ , 于是

$$\begin{aligned} |\varphi(u) - \varphi(u_0)| &= \left| \int_a^b f(x, u) dx - \int_a^b f(x, u_0) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x, u) - f(x, u_0)| dx \end{aligned}$$

由于 $f(x, u)$ 在闭区域 $D$ 上连续, 则必一致连续. 故对任意 $\varepsilon > 0$ , 存在这样的正数 $\delta$ , 只要 $D$ 中两点 $(x_1, u_1)$ 与 $(x_2, u_2)$ 的距离小于 $\delta$ , 就有

$$|f(x_1, u_1) - f(x_2, u_2)| < \varepsilon$$

特别当 $|u - u_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x, u) - f(x, u_0)| < \varepsilon$$

从而得到

$$|\varphi(u) - \varphi(u_0)| < (b-a)\varepsilon$$

这就证明了 $\varphi(u)$ 在点 $u_0$ 处连续.

由于

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \varphi(u) = \varphi(u_0)$$

或写成

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \int_a^b f(x, u) dx = \int_a^b \lim_{u \rightarrow u_0} f(x, u) dx$$

这就是说极限运算与积分运算的次序可以变换.

在确定了 $\varphi(u)$ 是参变量 $u$ 的连续函数之后, 就有可能来考察它在区间 $[\alpha, \beta]$ 上的积分

$$\int_a^\beta \varphi(u) du = \int_a^\beta \left[ \int_a^b f(x, u) dx \right] du$$

当函数 $f(x, u)$ 在矩形区域 $D$ 上连续, 上式右端积分等于 $f(x, u)$ 在 $D$ 上的二重积分, 故也可写成

$$\int_a^\beta \left[ \int_a^b f(x, u) dx \right] du = \int_a^b \left[ \int_a^\beta f(x, u) du \right] dx$$

这便是下面的

**定理 2** 如果函数  $f(x, u)$  在矩形区域  $D(a \leq x \leq b, \alpha \leq u \leq \beta)$  上连续, 则有

$$\int_a^\beta \varphi(u) du = \int_a^\beta \left[ \int_a^b f(x, u) dx \right] du = \int_a^b \left[ \int_a^\beta f(x, u) du \right] dx$$

现在进一步研究函数  $\varphi(u)$  的可微性.

**定理 3** 设函数  $f(x, u)$  在矩形区域  $D(a \leq x \leq b, \alpha \leq u \leq \beta)$  上连续, 且对  $u$  有连续的偏微商, 则函数

$$\varphi(u) = \int_a^b f(x, u) dx$$

在区间  $[\alpha, \beta]$  上是可微的, 并且

$$\varphi'(u) = \int_a^b \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx$$

证 令

$$\int_a^b \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx = g(u)$$

则  $g(u)$  是区间  $[\alpha, \beta]$  上的连续函数, 根据定理 2, 当  $\alpha \leq v \leq \beta$  时有

$$\begin{aligned} \int_a^v g(u) du &= \int_a^b \left[ \int_a^v \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} du \right] dx \\ &= \int_a^b [f(x, v) - f(x, \alpha)] dx = \varphi(v) - \varphi(\alpha) \end{aligned}$$

由定理 1 知,  $g(u)$  是  $[\alpha, \beta]$  上的连续函数, 上式对  $v$  求导数即得

$$\varphi'(v) = g(v)$$

这就是所要证明的公式.

这个定理告诉我们, 在  $f(x, u)$  与  $\frac{\partial f(x, u)}{\partial u}$  连续的条件下, 微分和积分的次序可以变换.

例 1 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} dx$ .

$$\text{解 令 } f(x, u) = \begin{cases} \frac{1}{1 + (1 + xu)^{1/u}}, & u \neq 0 \\ \frac{1}{1 + e^x}, & u = 0 \end{cases}$$

这时,二元函数  $f(x, u)$  在闭区域  $D(0 \leq x \leq 1, 0 \leq u \leq 1)$  上连续. 故有

$$\varphi(u) = \int_0^1 f(x, u) dx, \quad u \in [0, 1]$$

应用定理 1, 得

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^1 f(x, u) dx &= \int_0^1 \lim_{\mu \rightarrow 0} f(x, u) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1 + e^x} dx = \ln \frac{2e}{1 + e}. \end{aligned}$$

若在其中取  $u = \frac{1}{n}$ , 当  $u \rightarrow 0$  时, 有  $n \rightarrow \infty$ . 故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} dx = \ln \frac{2e}{1 + e}.$$

例 2 试求积分  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$  的值.

解 考虑含参变量的积分

$$I(u) = \int_0^1 \frac{\ln(1+ux)}{1+x^2} dx$$

这个积分的被积函数  $\frac{\ln(1+ux)}{1+x^2}$  及其关于  $u$  的偏微商

$\frac{x}{(1+x^2)(1+ux)}$  都在矩形区域  $D(0 \leq x \leq 1, 0 \leq u \leq 1)$  上连

续, 由定理 3 就有

$$\begin{aligned} I'(u) &= \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+ux)} dx \\ &= \frac{1}{1+u^2} \int_0^1 \left( \frac{x}{1+x^2} + \frac{u}{1+x^2} - \frac{u}{1+ux} \right) dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1+u^2} \left[ \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}u - \ln(1+u) \right]$$

将此式的两端关于  $u$  从 0 到 1 积分得

$$\begin{aligned} I(1) - I(0) &= \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} \left[ \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}u - \ln(1+u) \right] du \\ &= \frac{\ln 2}{2} \arctan u \Big|_0^1 + \frac{\pi}{8} \ln(1+u^2) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{1+u^2} du \\ &= \frac{\pi}{4} \ln 2 - I(1) \end{aligned}$$

又  $I(0) = 0$ , 故所求积分的值为  $I(1) = \frac{\pi}{8} \ln 2$ .

另外, 也可根据定理 2 求得积分值  $I(1)$ . 因为

$$\ln(1+ux) = \int_0^u \frac{x}{1+xy} dy$$

所以

$$I(u) = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \left( \int_0^u \frac{dy}{1+xy} \right) dx$$

由于  $\frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}$  在  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq u$  内连续, 故有

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_0^u \left[ \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} dx \right] dy \\ &= \int_0^u \frac{1}{1+y^2} \left[ \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}y - \ln(1+y) \right] dy \\ &= \frac{\ln 2}{2} \arctan u + \frac{\pi}{8} \ln(1+u^2) - \int_0^u \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx \end{aligned}$$

令  $u = 1$ , 有

$$I(1) = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} \ln 2$$

### 10.2.2 积分限依赖于参变量的积分的性质

在实际应用中, 经常要遇到这样的情形, 不仅被积函数含有参变数, 积分限也含有参变数, 这时积分可写成

$$\psi(u) = \int_{a(u)}^{b(u)} f(x, u) dx$$

它显然也确定一个参变量  $u$  的函数.

如同积分限是常数的情形一样, 也有关于函数  $\psi(u)$  的连续性、可微性定理.

**定理 1** 设函数  $f(x, u)$  在矩形区域  $D(a \leq x \leq b, \alpha \leq u \leq \beta)$  上连续, 而函数  $a(u)$  及  $b(u)$  在区间  $[\alpha, \beta]$  上连续, 并且

$$a \leq a(u) \leq b, a \leq b(u) \leq b$$

则

$$\psi(u) = \int_{a(u)}^{b(u)} f(x, u) dx$$

是区间  $[\alpha, \beta]$  上的连续函数.

**证** 在  $[\alpha, \beta]$  上任取一点  $u_0$ , 并将参变量积分  $\psi(u)$  写成

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \int_{a(u_0)}^{b(u_0)} f(x, u) dx + \int_{b(u_0)}^{b(u)} f(x, u) dx \\ &\quad + \int_{a(u)}^{a(u_0)} f(x, u) dx \end{aligned}$$

右端第一个积分由于上下限都是常数, 所以它关于  $u$  是连续的. 于是有

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \int_{a(u_0)}^{b(u_0)} f(x, u) dx = \int_{a(u_0)}^{b(u_0)} f(x, u_0) dx$$

而第二个与第三个积分有估计值

$$\begin{aligned} \left| \int_{b(u_0)}^{b(u)} f(x, u) dx \right| &\leq M |b(u) - b(u_0)| \\ \left| \int_{a(u)}^{a(u_0)} f(x, u) dx \right| &\leq M |a(u) - a(u_0)| \end{aligned}$$

其中  $M$  是连续函数  $|f(x, u)|$  在区域  $D$  上的最大值. 因为  $a(u)$ ,  $b(u)$  在点  $u_0$  连续, 所以当  $u \rightarrow u_0$  时, 这两个积分趋于零. 于是

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \psi(u) = \int_{a(u_0)}^{b(u_0)} f(x, u_0) dx = \psi(u_0)$$

即  $\psi(u)$  在点  $u_0$  处连续. 由  $u_0$  的任意性知,  $\psi(u)$  在  $[\alpha, \beta]$  上连续.

**定理 2** 设函数  $f(x, u)$  在矩形区域  $D(a \leq x \leq b, \alpha \leq u \leq \beta)$  上连续且对  $u$  有连续的偏微商, 而函数  $a(u)$  及  $b(u)$  都在区间  $[\alpha, \beta]$  上可微, 并且

$$a \leq a(u) \leq b, a \leq b(u) \leq b$$

则函数  $\phi(u)$  在区间  $[\alpha, \beta]$  上可微, 且有

$$\phi'(u) = \int_{a(u)}^{b(u)} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx + f[b(u), u]b'(u) - f[a(u), u]a'(u)$$

**证** 令

$$F(u, y, z) = \int_y^z f(x, u) dx$$

其中  $y = a(u), z = b(u)$ , 于是  $\phi(u)$  是由  $F(u, y, z)$  与  $y = a(u), z = b(u)$  复合而成的复合函数, 由复合函数的可微性及链式法则, 有

$$\begin{aligned} \phi'(u) &= \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{du} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{du} \\ &= \int_y^z \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx + f(z, u) \frac{dz}{du} - f(y, u) \frac{dy}{du} \end{aligned}$$

将  $y = a(u), z = b(u)$  代入上式有

$$\phi'(u) = \int_{a(u)}^{b(u)} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx + f[b(u), u]b'(u) - f[a(u), u]a'(u).$$

**例** 应用定理 2 计算 10.2.1 的例 2.

**解** 令

$$I(u) = \int_0^u \frac{\ln(1+ux)}{1+x^2} dx, \quad u \geq 0.$$

因为  $f(x, u) = \frac{\ln(1+ux)}{1+x^2}$ , 在区域  $D: u \geq 0, 0 \leq x \leq u$  上连续,

故有

$$\begin{aligned} I'(u) &= \frac{\ln(1+u^2)}{1+u^2} + \frac{1}{1+u^2} \int_0^u \left( \frac{-u}{1+ux} + \frac{x}{1+x^2} + \frac{u}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{u}{1+u^2} \arctan u + \frac{\ln(1+u^2)}{2(1+u^2)}, \end{aligned}$$

或有

$$\begin{aligned} I(1) &= \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{u}{1+u^2} \arctan u du + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\ln(1+u^2)}{1+u^2} du \\ &= \frac{1}{2} \arctan u \ln(1+u^2) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} \ln 2. \end{aligned}$$

### 习题 10.2

1. 试用两种方法计算以下极限:

$$(1) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + \alpha^2} dx$$

$$(2) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{1}{1+x^2+\alpha^2} dx$$

2. 求  $F'(\alpha)$ :

$$(1) F(\alpha) = \int_{\sin \alpha}^{\cos \alpha} e^{\alpha \sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(2) F(\alpha) = \int_{a+\alpha}^{b+\alpha} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

$$(3) F(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x} dx$$

$$(4) F(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x+\alpha, x-\alpha) dx$$

3. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 证明

$$y(x) = \frac{1}{k} \int_c^x f(t) \sin k(x-t) dt, \quad c, x \in [a, b]$$

满足常微分方程

$$y'' + k^2 y = f(x)$$

其中  $c$  与  $k$  为常数.

4. 应用对参数进行微分或积分的方法, 计算下列积分:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx$$

$$(2) \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(a \tan x)}{\tan x} dx$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1 + a \cos x}{1 - a \cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x} \quad (|a| < 1)$$

## 10.3 含参变量的广义积分

### 10.3.1 积分的一致收敛概念

这一节我们进一步考虑含参变量的广义积分. 为确定起见, 只讨论具有无穷上限的积分, 而对它建立起来的一切理论可以类推到具有无穷下限及无界函数的积分.

假设函数  $f(x, u)$  在区域  $D(a \leq x < +\infty, \alpha \leq u \leq \beta)$  上连续, 若对参变量  $u$  在区间  $[\alpha, \beta]$  上的每一个值, 广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$$

都收敛, 则它就确定了区间  $[\alpha, \beta]$  上的一个函数

$$\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x, u) dx$$

我们知道, 在函数项级数的理论中, 一致收敛的概念起着重要的作用. 在讨论广义积分所确定的函数  $\varphi(u)$  的性质时, 类似的概念也具有决定性的意义.

所谓积分  $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$  收敛, 是指对于每个固定的  $u$ , 有

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x, u) dx = \int_a^{+\infty} f(x, u) dx$$

即对任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在数  $B(> a)$ , 当  $b > B$  时有

$$\left| \int_a^b f(x, u) dx - \int_a^{+\infty} f(x, u) dx \right| = \left| \int_b^{+\infty} f(x, u) dx \right| < \varepsilon$$

一般说来,数  $B$  不仅依赖于  $\epsilon$ ,而且还依赖于参变量  $u$ .

**定义** 如果对任意给定的正数  $\epsilon$ ,总有找到仅与  $\epsilon$  有关的数  $B(> a)$ ,当  $b > B$  时,不等式

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x, u) dx \right| < \epsilon$$

对  $[\alpha, \beta]$  上的一切  $u$  值成立,就称广义积分  $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$  在  $[\alpha, \beta]$  上一致收敛. 这里的  $[\alpha, \beta]$  可换成开区间或无穷区间.

那么,何谓非一致收敛呢?可叙述为:

总存在某个正数  $\epsilon_0$ ,对任意的  $B$ ,总存在某个  $b_0 > B$  及某个  $u_0 \in [\alpha, \beta]$ ,使

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x, u) dx \right| \geq \epsilon_0$$

成立,就称广义积分  $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$  在  $[\alpha, \beta]$  上非一致收敛.

和广义积分的收敛判别法一样,这里也有一系列和函数项级数类似的一致收敛判别法.

**定理 1 (Cauchy 准则)** 积分  $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$  在区间  $[\alpha, \beta]$  上一致收敛的充分必要条件是:对任意给定的正数  $\epsilon$ ,总存在一个仅与  $\epsilon$  有关的数  $B$ ,使得当  $b_1, b_2 > B$ ,就有不等式

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, u) dx \right| < \epsilon$$

对区间  $[\alpha, \beta]$  上的一切  $u$  值成立.

证明和函数项级数的柯西准则相仿. 留给读者作练习. 同样也有类似于函数项级数的维尔斯特拉斯判别法.

**定理 2 (Weierstrass 判别法)** 设  $f(x, u)$  在区域  $D(a \leq x \leq +\infty, \alpha \leq u \leq \beta)$  上连续. 如果存在一个连续函数  $p(x)$ ,使得对于一切充分大的  $x$  以及区间  $[\alpha, \beta]$  上的任意  $u$  都有

$$|f(x, u)| \leq p(x)$$

且积分  $\int_a^{+\infty} p(x) dx$  收敛, 则积分  $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$  在  $[\alpha, \beta]$  上一致收敛.

事实上, 由  $\int_a^{+\infty} p(x) dx$  收敛可知, 存在这样的数  $B$ , 当  $b_1, b_2 > B$  时有

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} p(x) dx \right| < \epsilon$$

于是推得

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, u) dx \right| \leq \left| \int_{b_1}^{b_2} |f(x, u)| dx \right| \leq \left| \int_{b_1}^{b_2} p(x) dx \right| < \epsilon$$

由柯西准则可见所考察的积分一致收敛.

和函数项级数一样, 也有更精细的迪里赫勒判别法和阿贝尔判别法.

**定理 3 (Dirichlet 判别法)** 如果函数  $f(x, u)$  与  $g(x, u)$  在区域  $D(a \leq x < +\infty, \alpha \leq u \leq \beta)$  上连续, 且满足:

(i) 对任意  $b > a$ , 积分  $\int_a^b f(x, u) dx$  对  $u \in [\alpha, \beta]$  一致有界,

即存在与  $b, u$  无关的正常数  $k$ , 使得  $\left| \int_a^b f(x, u) dx \right| < k$ ;

(ii)  $g(x, u)$  是  $x$  的单调函数, 且当  $x$  无限增大时关于  $u$  一致趋于零.

那么积分  $\int_a^{+\infty} f(x, u) g(x, u) dx$  在  $[\alpha, \beta]$  上一致收敛.

**证** 由条件 (i), 对任意  $b_1, b_2 > a$  及一切  $u \in [\alpha, \beta]$  都有

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, u) dx \right| \leq \left| \int_a^{b_1} f(x, u) dx \right| + \left| \int_a^{b_2} f(x, u) dx \right| < 2K$$

又因  $g(x, u)$  当  $x$  无限增大时一致趋于零, 所以对任给正数  $\epsilon$ , 总能找到数  $B > a$ , 只要  $x > B$ , 不等式

$$|g(x, u)| < \frac{\epsilon}{4K}$$

对  $[\alpha, \beta]$  上一切  $u$  都成立. 于是当  $b_1, b_2 > B$  时, 根据第二中值定

理,便有

$$\begin{aligned} & \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x,u)g(x,u)dx \right| \\ & \leq |g(b_1,u)| \left| \int_{b_1}^{\xi} f(x,u)dx \right| + |g(b_2,u)| \left| \int_{\xi}^{b_2} f(x,u)dx \right| \\ & < \frac{\epsilon}{4K} \cdot 2K + \frac{\epsilon}{4K} \cdot 2K = \epsilon \end{aligned}$$

由定理 1 便知积分  $\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)dx$  在  $[\alpha, \beta]$  上一致收敛.

类似地可以证明阿贝尔判别法.

**定理 4 (Abel 判别法)** 如果函数  $f(x,u)$  与  $g(x,u)$  在区域  $D(a \leq x < +\infty, \alpha \leq u \leq \beta)$  上连续,且满足:

- (i) 积分  $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$  关于  $u \in [\alpha, \beta]$  一致收敛;
- (ii)  $g(x,u)$  对  $x$  单调,且关于  $u$  一致有界.

那么积分  $\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)dx$  在  $[\alpha, \beta]$  上一致收敛.

**例 1** 研究积分  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin ux}{x^2} dx$  在  $-\infty < u < +\infty$  上的一致收敛性.

**解** 因为对任意的  $u$  有

$$\left| \frac{\sin ux}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

而积分  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$  收敛,故由 Weierstrass 判别法知原积分关于  $u$  在整个数轴上一致收敛.

**例 2** 证明当  $\alpha, \beta > 0$  时,积分  $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx$  在  $\beta \geq \beta_0 > 0$  上一致收敛.

**证** 由于对任意的正数  $b$ ,均有

$$\left| \int_0^b \sin \beta x dx \right| = \left| \frac{1 - \cos \beta b}{\beta} \right| \leq \frac{2}{\beta}$$

即积分  $\int_0^b \sin \beta x dx$  在  $\beta \geq \beta_0$  上一致有界. 而函数  $\frac{x}{\alpha^2 + x^2}$  与参变量  $\beta$  无关, 且当  $x$  趋于无穷时单调减少趋于零, 故由 Dirichlet 判别法知, 积分  $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx$  在  $\beta \geq \beta_0 > 0$  上一致收敛.

例 3 证明积分  $\int_0^{+\infty} e^{-ux} \frac{\sin x}{x} dx$  对  $u \geq 0$  是一致收敛的.

证 因为积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  收敛, 而函数  $e^{-ux}$  关于  $x$  是单调减少的, 且在区域  $D(0 \leq x < +\infty, 0 \leq u < +\infty)$  上有界  $e^{-ux} \leq 1$ , 故由 Abel 判别法知原积分当  $u \geq 0$  是一致收敛的.

例 4 证明积分  $\int_a^{+\infty} u e^{-ux} dx$  在  $0 \leq u < +\infty$  上不一致收敛.

证 显然积分在  $u \geq 0$  收敛. 今证它不一致收敛. 存在正数  $\epsilon_0 < e^{-1}$ , 对任意的  $B$ , 存在  $b_0 > B$  及  $u_0 = \frac{1}{b_0} \in [0, +\infty)$ , 有

$$\left| \int_{b_0}^{+\infty} u_0 e^{-u_0 x} dx \right| = e^{-1} > \epsilon_0$$

成立, 从而得到积分  $\int_a^{+\infty} u e^{-ux} dx$  在  $[0, +\infty)$  上是不一致收敛的.

### 10.3.2 一致收敛积分的性质

设含参变量的广义积分  $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$  在  $[\alpha, \beta]$  上收敛, 我们要研究由它所确定的函数

$$\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x, u) dx$$

的性质. 它也有与函数项级数的和函数完全类似的关于连续、导数与积分等一些分析性质.

定理 1 若函数  $f(x, u)$  在区域  $D(a \leq x < +\infty, \alpha \leq u \leq \beta)$  上连续, 且积分

$$\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x, u) dx$$

在区间 $[\alpha, \beta]$ 上关于 $u$ 一致收敛, 则函数 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续.

**证** 由于积分 $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛, 故对任意的 $\epsilon > 0$ , 总存在这样的数 $B$ , 只要 $b > B$ , 就有

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x, u) dx \right| < \frac{\epsilon}{3}$$

对 $[\alpha, \beta]$ 上的一切 $u$ 值成立. 今在 $[\alpha, \beta]$ 上任取一点 $u_0$ , 因为含变量的常义积分 $\int_a^b f(x, u) dx$ 是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的连续函数, 所以存在正数 $\delta$ , 当 $|u - u_0| < \delta$ 时有

$$\left| \int_a^b f(x, u) dx - \int_a^b f(x, u_0) dx \right| < \frac{\epsilon}{3}$$

于是只要 $|u - u_0| < \delta$ , 即可推得

$$\begin{aligned} & |\varphi(u) - \varphi(u_0)| \\ &= \left| \int_a^{+\infty} f(x, u) dx - \int_a^{+\infty} f(x, u_0) dx \right| \\ &\leq \left| \int_a^b f(x, u) dx - \int_a^b f(x, u_0) dx \right| + \left| \int_b^{+\infty} f(x, u) dx \right| \\ &\quad + \left| \int_b^{+\infty} f(x, u_0) dx \right| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

这就证明了 $\varphi(u)$ 在点 $u_0$ 连续. 由于 $u_0$ 的任意性, 故 $\varphi(u)$ 在整个区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续.

这个定理也可写成

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \int_a^{+\infty} f(x, u) dx = \int_a^{+\infty} (\lim_{u \rightarrow u_0} f(x, u)) dx$$

即在定理1的条件下, 极限号与积分号可以交换顺序.

**定理2** 若函数 $f(x, u)$ 在区域 $D(a \leq x < +\infty, \alpha \leq u \leq \beta)$ 上连续, 且积分

$$\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x, u) dx$$

在区间 $[\alpha, \beta]$ 上关于 $u$ 一致收敛, 则有

$$\int_a^\beta \varphi(u) du = \int_a^\beta \left[ \int_a^{+\infty} f(x, u) dx \right] du = \int_a^{+\infty} \left[ \int_a^\beta f(x, u) du \right] dx$$

**证** 由假设可知, 对任意的 $\varepsilon > 0$ , 存在这样的数 $B$ , 只要 $b > B$ , 不等式

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x, u) dx \right| < \varepsilon$$

对 $[\alpha, \beta]$ 上的一切 $u$ 成立. 因为

$$\int_a^\beta \varphi(u) du = \int_a^\beta \left[ \int_a^b f(x, u) dx \right] du + \int_a^\beta \left[ \int_b^{+\infty} f(x, u) dx \right] du$$

而对含参变量的常义积分应有

$$\int_a^\beta \left[ \int_a^b f(x, u) dx \right] du = \int_a^b \left[ \int_a^\beta f(x, u) du \right] dx$$

所以当 $b > B$ 时就得到

$$\begin{aligned} \left| \int_a^\beta \varphi(u) du - \int_a^b \left[ \int_a^\beta f(x, u) du \right] dx \right| &\leq \int_a^\beta \left| \int_b^{+\infty} f(x, u) dx \right| du \\ &< (\beta - \alpha)\varepsilon \end{aligned}$$

这正说明了积分

$$\int_a^{+\infty} \left[ \int_a^\beta f(x, u) du \right] dx$$

收敛, 并且等于 $\int_a^\beta \varphi(u) du$ .

**例 1** 计算积分 $\int_a^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ , 其中 $0 < a < b$ .

**解** 被积函数可以表成积分

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-ux} du$$

于是所要计算的积分就变为

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b e^{-ux} du$$

由于对任意  $u \in [a, b]$ , 有

$$e^{-ux} \leq e^{-ax}$$

而无穷积分  $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx$  收敛 ( $a > 0$ ), 由 Weierstrass 判别法知,

$\int_0^{+\infty} e^{-ux} dx$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 又  $e^{-ux}$  在区域  $D(0 \leq x < +\infty,$

$a \leq u \leq b)$  上连续, 根据定理 2 便得

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx &= \int_a^b du \int_0^{+\infty} e^{-ux} dx \\ &= \int_a^b \frac{du}{u} = \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

在定理 2 的条件下, 对  $x$  和  $u$  进行积分的次序可以交换, 这里关于  $u$  的积分区间  $[\alpha, \beta]$  是有限的. 但在很多的情况下, 往往需要知道两个无穷区间的积分次序是否可以交换, 即在什么条件下, 有等式

$$\int_a^{+\infty} \left[ \int_a^{+\infty} f(x, u) du \right] dx = \int_a^{+\infty} \left[ \int_a^{+\infty} f(x, u) dx \right] du$$

**定理 3** 如果  $f(x, u)$  满足下列条件:

(i)  $f(x, u)$  在  $a \leq x < +\infty, \alpha \leq u < +\infty$  上连续;

(ii) 积分

$$\int_a^{+\infty} f(x, u) dx, \quad \int_a^{+\infty} f(x, u) du$$

分别关于  $u$  在任何  $[\alpha, \beta]$  上, 关于  $x$  在任何  $[a, b]$  上一致收敛;

(iii) 积分

$$\int_a^{+\infty} \left[ \int_a^{+\infty} |f(x, u)| du \right] dx, \quad \int_a^{+\infty} \left[ \int_a^{+\infty} |f(x, u)| dx \right] du$$

中至少有一个存在.

那么积分

$$\int_a^{+\infty} \left[ \int_a^{+\infty} f(x, u) du \right] dx, \quad \int_a^{+\infty} \left[ \int_a^{+\infty} f(x, u) dx \right] du$$

都存在, 而且相等, 即

$$\int_a^{+\infty} \left[ \int_a^{+\infty} f(x, u) du \right] dx = \int_a^{+\infty} \left[ \int_a^{+\infty} f(x, u) dx \right] du$$

证 为确定起见,不妨假定

$$\int_a^{+\infty} \left[ \int_a^{+\infty} |f(x, u)| du \right] dx$$

存在,要证明的便是

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^{\beta} \left[ \int_a^{+\infty} f(x, u) dx \right] du = \int_a^{+\infty} \left[ \int_a^{+\infty} f(x, u) du \right] dx$$

由于  $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$  关于  $u$  在  $[\alpha, \beta]$  中一致收敛,因而

$$\int_a^{\beta} \left[ \int_a^{+\infty} f(x, u) dx \right] du = \int_a^{+\infty} \left[ \int_a^{\beta} f(x, u) du \right] dx$$

这样一来,要证明的变成

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} \left[ \int_a^{\beta} f(x, u) du \right] dx = \int_a^{+\infty} \left[ \int_a^{+\infty} f(x, u) du \right] dx$$

也即

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} \left[ \int_{\beta}^{+\infty} f(x, u) du \right] dx = 0 \quad (1)$$

由于积分

$$\int_a^{+\infty} \left[ \int_a^{+\infty} |f(x, u)| du \right] dx$$

收敛,故存在  $b > a$ ,使得

$$\int_b^{+\infty} \left[ \int_a^{+\infty} |f(x, u)| du \right] dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

于是

$$\begin{aligned} & \left| \int_b^{+\infty} \left[ \int_{\beta}^{+\infty} f(x, u) du \right] dx \right| \\ & \leq \int_b^{+\infty} \left[ \int_{\beta}^{+\infty} |f(x, u)| du \right] dx \\ & \leq \int_b^{+\infty} \left[ \int_a^{+\infty} |f(x, u)| du \right] dx < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

把(1)式左端的积分拆成两部分:

$$\int_a^{+\infty} \left[ \int_{\beta}^{+\infty} f(x, u) du \right] dx = \int_a^b \left[ \int_{\beta}^{+\infty} f(x, u) du \right] dx + \int_b^{+\infty} \left[ \int_{\beta}^{+\infty} f(x, u) du \right] dx$$

由于  $\int_a^{+\infty} f(x, u) du$  关于  $x$  在  $[a, b]$  中一致收敛, 故必存在  $\beta_0$ , 当  $\beta > \beta_0$  时, 不等式

$$\left| \int_{\beta}^{+\infty} f(x, u) du \right| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

对  $[a, b]$  中所有  $x$  成立. 由此得

$$\left| \int_a^b \left[ \int_{\beta}^{+\infty} f(x, u) du \right] dx \right| \leq \int_a^b \left| \int_{\beta}^{+\infty} f(x, u) du \right| dx < \frac{\epsilon}{2}$$

所以, 当  $\beta > \beta_0$  时

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^{+\infty} \left[ \int_{\beta}^{+\infty} f(x, u) du \right] dx \right| \\ & \leq \left| \int_a^b \left[ \int_{\beta}^{+\infty} f(x, u) du \right] dx \right| + \left| \int_b^{+\infty} \left[ \int_{\beta}^{+\infty} f(x, u) du \right] dx \right| < \epsilon \end{aligned}$$

这就证明了(1)成立.

最后再来研究函数  $\varphi(u)$  的求导问题.

**定理 4** 如果函数  $f(x, u)$  满足下列条件:

- (i)  $f(x, u)$  和  $\frac{\partial f(x, u)}{\partial u}$  在  $a \leq x < +\infty, \alpha \leq u \leq \beta$  上连续;
- (ii)  $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$  在  $[\alpha, \beta]$  上收敛;
- (iii)  $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx$  在  $[\alpha, \beta]$  上一致收敛.

那么  $\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x, u) dx$  在  $[\alpha, \beta]$  上可微, 而且

$$\varphi'(u) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx \quad (\alpha \leq u \leq \beta)$$

**证** 对任意自然数  $n$ , 令

$$\varphi_n(u) = \int_{a+n-1}^{a+n} f(x, u) dx$$

则  $\varphi_n(u)$  是  $[\alpha, \beta]$  上的可微函数, 且有

$$\varphi_n'(u) = \int_{a+n-1}^{a+n} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx$$

由于含参变量的广义积分可以表成

$$\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x, u) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(u)$$

并且级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n'(u) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx$$

因右端的积分在  $[\alpha, \beta]$  上一致收敛, 所以函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(u)$  可逐项微分的条件全部满足, 从而和函数  $\varphi(u)$  是可微的, 且成立

$$\varphi'(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n'(u) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx.$$

例 2 计算积分

$$I(\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\beta x dx, \quad \beta \in (-\infty, +\infty)$$

解 因为对任意的实数  $\beta$  有

$$|e^{-x^2} \cos 2\beta x| \leq e^{-x^2}$$

而积分  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$  收敛, 故积分  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\beta x dx$  收敛. 现计算它的值, 可将  $\beta$  视为参数, 由于当  $x > 0$  时有不等式

$$\left| \frac{\partial}{\partial \beta} (e^{-x^2} \cos 2\beta x) \right| = |2xe^{-x^2} \sin 2\beta x| \leq 2xe^{-x^2}$$

但积分  $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$  收敛, 所以积分  $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} \sin 2\beta x dx$  在整个数轴上关于  $\beta$  一致收敛, 故依定理 4 得

$$\begin{aligned} \frac{dI(\beta)}{d\beta} &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \beta} (e^{-x^2} \cos 2\beta x) dx \\ &= -2 \int_0^{+\infty} xe^{-x^2} \sin 2\beta x dx \end{aligned}$$

又  $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} \sin 2\beta x dx = \beta I(\beta)$ , 从而函数  $I(\beta)$  满足微分方程

$$\frac{dI(\beta)}{d\beta} = -2\beta I(\beta)$$

解微分方程, 并注意到  $I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , 即得

$$I(\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\beta^2}$$

以上我们所讨论的含参变量的广义积分都限于积分区间为无穷的情形, 但是对于它所建立起来的全部理论, 只要作不多的改变就能适用于另一类无界函数的积分, 这里就不再叙述了.

### 10.3.3 几个重要的积分

为了今后物理上的需要, 下面计算几个重要的广义积分.

1° 迪里赫勒积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

由 10.1.2 的例 1 可知这个积分收敛, 但不绝对收敛, 引进收敛因子  $e^{-ux}$ , 并考虑含参变量的积分

$$I(u) = \int_0^{+\infty} e^{-ux} \frac{\sin x}{x} dx$$

由于当  $u \geq 0$  时, 此积分是一致收敛的. 而被积函数在区域  $0 \leq x < +\infty, 0 \leq u < +\infty$  上连续, 因而  $I(u)$  就在区间  $0 \leq u < +\infty$  上连续. 特别在点  $u = 0$  连续, 可推得

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} I(u) = I(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

另一方面, 将  $I(u)$  微商又得

$$I'(u) = - \int_0^{+\infty} e^{-ux} \sin x dx$$

其中在积分号下对  $u$  微商的合理性是因为当  $u \geq u_0 > 0$  时, 积分  $\int_0^{+\infty} e^{-ux} \sin x dx$  是一致收敛的. 容易算出这个积分的值, 从而得到

$$I'(u) = -\frac{1}{1+u^2}$$

所以求得

$$I(u) = -\arctan u + c$$

但当  $u$  无限增大时, 根据不等式

$$|I(u)| = \left| \int_0^{+\infty} e^{-ux} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-ux} dx = \frac{1}{u}$$

可知  $I(u)$  趋于零, 由此定出常数  $c = \frac{\pi}{2}$ . 将其代入后给出

$$I(u) = \frac{\pi}{2} - \arctan u \quad (u > 0)$$

令  $u$  趋于零即得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

进一步有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \beta > 0 \\ 0, & \beta = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \beta < 0 \end{cases}$$

2° 拉普拉斯积分

$$I(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx \quad (\alpha > 0, \beta \geq 0)$$

$$J(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

解 因为对任意的  $\beta \in [0, +\infty)$ ,  $\alpha > 0$ , 有

$$|I(\beta)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{|\cos \beta x|}{\alpha^2 + x^2} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{\pi}{2\alpha}$$

故  $I(\beta)$  在  $\beta \in [0, +\infty)$  上一致收敛.

另外, 由 10.3.1 的例 2 知,  $J(\beta)$  对任意的  $\beta \geq \beta_0 > 0$  一致收敛. 当然,  $I(\beta)$  与  $J(\beta)$  都在  $\beta \geq \beta_0 > 0$  上一致收敛. 由可微性定理

4 知,  $I(\beta)$  对  $\beta$  的微商可在积分号下进行, 则有

$$I'(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} \right) dx = - \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx = -J(\beta)$$

当  $\beta > 0$  时, 有

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx$$

于是有

$$\begin{aligned} I'(\beta) + \frac{\pi}{2} &= - \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx \\ &= \alpha^2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x(\alpha^2 + x^2)} dx \end{aligned}$$

这时, 上式又可对  $\beta$  在积分号下求微商, 有

$$I''(\beta) = \alpha^2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx = \alpha^2 I(\beta)$$

这里不显含自变量  $\beta$  的二阶线性方程, 求得通解为

$$I(\beta) = c_1 e^{a\beta} + c_2 e^{-a\beta}$$

其中  $c_1, c_2$  为任意常数. 由于对一切  $\beta > 0$  的值, 积分  $I(\beta)$  是有界的, 即

$$|I(\beta)| \leq \frac{\pi}{2\alpha}$$

而  $\alpha > 0$ , 所以  $c_1$  必须为零, 故有

$$I(\beta) = c_2 e^{-a\beta}$$

注意到此为止, 运算都是在  $\beta > 0$  的假设下进行.

其次, 由于积分  $I(\beta)$  在  $\beta \in [0, +\infty)$  上一致收敛, 故  $I(\beta)$  在  $[0, +\infty)$  上连续, 特别在  $\beta = 0$  处右连续, 于是有

$$c_2 = \lim_{\beta \rightarrow 0^+} I(\beta) = I(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{\pi}{2\alpha}$$

从而算得

$$I(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-a\beta} \quad (\alpha > 0, \beta \geq 0)$$

最后, 对  $\alpha > 0, \beta > 0$ , 有

$$J(\beta) = -I'(\beta) = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha\beta}$$

即得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha\beta} \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

3° 菲涅耳(Fresnel 积分)

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx, \quad \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$$

令  $x^2 = t$  得

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$$

显然这两个积分条件收敛. 为求第一个积分的值, 可利用等式

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} du$$

代入含有收敛因子  $e^{-vt}$  ( $v > 0$ ) 的参变量积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-vt} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-vt} \sin t \left( \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} du \right) dt$$

因为积分  $\int_0^{+\infty} e^{-t(u^2+v)} \sin t dt$  关于  $u$  在  $[0, +\infty)$  上一致收敛, 积分

$\int_0^{+\infty} e^{-t(u^2+v)} \sin t dt$  关于  $t$  在  $[0, +\infty)$  上一致收敛, 而且积分

$$\int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} e^{-t(u^2+v)} |\sin t| dt \right] du$$

存在, 根据 10.3.2 的定理 3, 交换积分的顺序得

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-vt} dt &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} e^{-(u^2+v)t} \sin t dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + (u^2 + v)^2} \end{aligned}$$

又因为积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-vt} dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+(u^2+v)^2}$$

都在  $v \geq 0$  一致收敛, 故都为  $v$  的连续函数, 因而令  $v \rightarrow 0^+$  时能在积分号下取极值, 如此求极限后算得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

同样可得

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

### 习题 10.3

1. 确定下列广义参变量积分的收敛域:

$$(1) \int_0^{+\infty} x^u dx \quad (2) \int_1^{+\infty} x^u \frac{x + \sin x}{x - \sin x} dx$$

$$(3) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^u \ln x} \quad (4) \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^u x}$$

$$(5) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha (1+x)} dx \quad (6) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} dx$$

2. 研究下列积分在指定区间上的一致收敛性:

$$(1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ux}{1+x^2} dx \quad (-\infty < u < +\infty)$$

$$(2) \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x dx, \quad \text{a) } 0 < \alpha_0 \leq \alpha < +\infty; \text{ b) } 0 < \alpha < +\infty$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx \quad (0 \leq \alpha < +\infty)$$

$$(4) \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} dx \quad (1 < \alpha < +\infty)$$

$$(5) \int_1^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\cos x}{x^p} dx \quad (0 \leq \alpha < +\infty) \text{ (其中 } p > 0 \text{ 为常数)}$$

$$(6) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{1+x^p} dx \quad (0 \leq p < +\infty)$$

3. 设  $f(x, u)$  在  $a \leq x < +\infty, \alpha \leq u \leq \beta$  上连续, 又对于  $[\alpha, \beta)$  上每一  $u$ , 积分  $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$  收敛, 而当  $u = \beta$  时  $\int_a^{+\infty} f(x, \beta) dx$  发散, 试证积分  $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$  在  $[\alpha, \beta)$  上必不一致收敛.

4. 证明  $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2} dx$  在  $0 \leq \alpha < +\infty$  是连续且可微的函数.

5. 计算下列积分:

$$(1) \int_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x} dx \quad (\alpha > -1, \beta > -1)$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-ax}}{x e^x} dx \quad (a > -1)$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2} dx \quad (a > 0)$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx \quad (a > 0, \beta > 0)$$

$$(5) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan ax}{x(1+x^2)} dx$$

$$(6) \int_0^{+\infty} [e^{-(\frac{a}{x})^2} - e^{-(\frac{b}{x})^2}] dx \quad (0 < a < b)$$

6. 利用  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  及  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$  计算:

$$(1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{\sigma})^2} dx \quad (\sigma > 0)$$

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-a)^2}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{\sigma})^2} dx \quad (\sigma < 0)$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx \quad (a > 0, b > 0)$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

$$(5) \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx \quad (n \text{ 是正整数})$$

$$(6) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx$$

## 10.4 欧拉积分

作为含参变量的广义积分理论的应用,下面专门来讨论两个特别有用的含参变量积分.

欧拉(Euler)在解一个微分方程时,引出具有如下形式的含参变量积分

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

因为它是参变量  $x$  的函数,所以勒让德建议称为  $\Gamma$ (伽玛)函数.

另外一个含参变量的积分形式为

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

易见它是参变量  $x, y$  的函数,因此勒让德建议称为  $B$ (贝塔)函数. 由于这些函数在理论上与应用上的重要性,后来人们作了深入的研究,并编制了详尽的伽玛函数与贝塔函数表.

### 10.4.1 $\Gamma$ 函数的性质

从  $\Gamma$  函数的积分表示容易看出,它定义在区间  $(0, +\infty)$  上. 实际上,将  $\Gamma(x)$  写成

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

当  $x < 1$  时,  $t = 0$  是第一个积分的瑕点,但因为

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^{x-1} e^{-t}}{t^{x-1}} = 1$$

所以第一个积分当  $x > 0$  时收敛;又因为

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \cdot t^{x-1} e^{-t} = 0$$

所以第二个积分不论  $x$  为何值时都收敛. 这就说明了  $\Gamma(x)$  的定义域为  $x > 0$ .

**定理 1**  $\Gamma(x)$  是  $(0, +\infty)$  中的连续函数.

**证** 把  $\Gamma(x)$  分成两部分

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

对任意的  $\beta > \alpha > 0$ , 当  $\alpha \leq x \leq \beta, 0 < t \leq 1$  时有

$$t^{x-1} e^{-t} \leq t^{\alpha-1} e^{-t}$$

但积分  $\int_0^1 t^{\alpha-1} e^{-t} dt$  收敛, 故积分  $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$  在  $[\alpha, \beta]$  上一致收敛; 又

当  $\alpha \leq x \leq \beta, 1 \leq t < +\infty$  时有

$$t^{x-1} t^{-t} \leq t^{\beta-1} e^{-t}$$

但积分  $\int_1^{+\infty} t^{\beta-1} e^{-t} dt$  收敛, 于是积分  $\int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  也在  $[\alpha, \beta]$  上一致

收敛, 即  $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  关于  $x \in [\alpha, \beta]$  一致收敛. 故由 10.3.2 的定理

1 知,  $\Gamma(x)$  在  $[\alpha, \beta]$  上连续, 但  $\beta > \alpha$  是任意的两个正数, 所以  $\Gamma(x)$  在  $x > 0$  时连续.

再来推导  $\Gamma$  函数的递推公式

**定理 2** 当  $x > 0$  时, 有  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .

**证** 由分部积分法得

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = -t^x e^{-t} \Big|_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= x\Gamma(x) \end{aligned}$$

设  $n-1 < x \leq n$  ( $n$  为自然数), 重复应用上面的递推公式便得

$$\Gamma(x+1) = x(x-1)\cdots(x-n+1)\Gamma(x-n+1)$$

且  $0 < x-n+1 \leq 1$ . 从而可见对任意  $x > 1$  的  $\Gamma$  函数值的计算总可以归结为计算  $x < 1$  的  $\Gamma$  函数值.

特别当  $x = n$  ( $n$  为自然数) 时就有

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\cdots 1\Gamma(1) = n!\Gamma(1)$$

但  $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$ , 从而得到

$$\Gamma(n+1) = n!$$

此外,  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$  的值亦可定出. 这只须在积分

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt$$

中作变量代换  $t = x^2$  即得

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

由此又可定出当  $x$  为半整数  $n + \frac{1}{2}$  的  $\Gamma$  函数的值

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right)\cdots \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

最后, 指出  $\Gamma$  函数另一重要性质——余元公式.

若  $0 < x < 1$ , 则有

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin x\pi} \quad (\text{证明将在第十一章中给出})$$

不难看出, 这个公式又将  $\Gamma$  函数值的计算缩减成区间  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  内的  $\Gamma$  函数值的计算. 当  $x = \frac{1}{2}$  时它给出  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ , 当  $x = \frac{1}{4}$  时就成为

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \sqrt{2}\pi$$

#### 10.4.2 B 函数的性质

在 B 函数的积分定义

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

中,如果  $x < 1$ ,  $t = 0$  是瑕点;  $y < 1$ ,  $t = 1$  是瑕点;故把积分拆成两部分

$$\int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \int_0^a t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt + \int_a^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

其中  $0 < a < 1$ . 当  $t \rightarrow 0$  时,

$$t^{x-1} (1-t)^{y-1} \sim t^{x-1}$$

所以第一个积分当  $x > 0$  时收敛. 当  $t \rightarrow 1$  时,

$$t^{x-1} (1-t)^{y-1} \sim (1-t)^{y-1}$$

所以第二个积分当  $y > 0$  时收敛. 就是说,  $B(x, y)$  的定义域为  $x > 0, y > 0$ .

**定理 1**  $B(x, y)$  是区域  $D: x > 0, y > 0$  上的连续函数.

**证** 在区域  $D$  上任取一点  $(x_0, y_0)$ , 当  $x \geq x_0, y \geq y_0$  时, 无论  $t$  是区间  $(0, 1)$  上怎样的数值, 都有

$$t^{x-1} (1-t)^{y-1} \leq t^{x_0-1} (1-t)^{y_0-1}$$

但积分  $\int_0^1 t^{x_0-1} (1-t)^{y_0-1} dt$  收敛, 故积分  $\int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$  在区域  $x \geq x_0, y \geq y_0$  上一致收敛, 从而  $B(x, y)$  在这个区域连续. 再由  $x_0, y_0$  的任意性, 所以  $B(x, y)$  就是定义域上的连续函数.

$B$  函数还可以表示为另外一种经常使用的形式.

**定理 2** 对任意的  $x > 0, y > 0$ , 有

$$B(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{z^{y-1}}{(1+z)^{x+y}} dz$$

**证** 由定义知

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

令  $t = \frac{1}{1+z}$ , 故  $1-t = \frac{z}{1+z}$ ,  $dt = -\frac{dz}{(1+z)^2}$ , 代入后则有

$$B(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{z^{y-1}}{(1+z)^{x+y}} dz \quad (x > 0, y > 0)$$

定理 3 对任意的  $x > 0, y > 0$ , 有

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

证 因为

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du \cdot \int_0^{+\infty} v^{y-1} e^{-v} dv \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(u+v)} u^{x-1} v^{y-1} dudv\end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} s = u + v \\ t = \frac{v}{u} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} u = \frac{s}{1+t} \\ v = \frac{st}{1+t} \end{cases}$$

且算得这个变换的雅可比行列式为

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} = \frac{s}{(1+t)^2}$$

于是有

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-s} \cdot \frac{s^{x-1}}{(1+t)^{x-1}} \cdot \frac{s^{y-1} t^{y-1}}{(1+t)^{y-1}} \cdot \frac{s}{(1+t)^2} ds dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{x+y-1} ds \cdot \int_0^{+\infty} \frac{t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}} dt \\ &= \Gamma(x+y)B(x, y)\end{aligned}$$

从而得到

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (x > 0, y > 0)$$

应用定理 3 与  $\Gamma$  函数的递推公式, 立即得到 B 函数的递推公式:

$$B(x+1, y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)} B(x, y)$$

实际上,

$$B(x+1, y+1) = \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+2)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x\Gamma(x)y\Gamma(y)}{(x+y+1)(x+y)\Gamma(x+y)} \\
&= \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)}B(x,y)
\end{aligned}$$

根据定理 3 及  $\Gamma$  函数的性质又很容易推得 B 函数的另一些性质:

(i)  $B(x,y) = B(y,x)$ , 即 B 函数关于变量  $x, y$  是对称的.

(ii)  $B(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$ , 这里  $m, n$  为自然数.

此外, 由上述关系式还可以推出  $\Gamma$  函数的另一重要性质——加倍公式.

当  $x > 0$  时, 有

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

这个公式又称勒让德(Legendre) 公式.

事实上, 在积分

$$\begin{aligned}
B(x,x) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1} dt = \int_0^1 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - t\right)^2\right]^{x-1} dt \\
&= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - t\right)^2\right]^{x-1} dt
\end{aligned}$$

中作变量代换  $\frac{1}{2} - t = \frac{1}{2}\sqrt{\tau}$ , 则可算得

$$B(x,x) = \frac{1}{2^{2x-1}} \int_0^1 \tau^{-\frac{1}{2}}(1-\tau)^{x-1} d\tau = \frac{1}{2^{2x-1}} B\left(\frac{1}{2}, x\right)$$

将这个等式两边的 B 函数用  $\Gamma$  函数表示就成为

$$\frac{\Gamma^2(x)}{\Gamma(2x)} = \frac{1}{2^{2x-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(x)}{\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)}$$

把  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$  代入即得加倍公式

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

例1 欧拉积分的理论使我们容易算出积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x dx$$

的值,其中  $n$  及  $m$  都是非负整数.

作变量代换  $t = \sin^2 x$ , 得

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{n-1}{2}} (1-t)^{\frac{m-1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{m+1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+m}{2} + 1\right)} \end{aligned}$$

在这个表达式中,  $\Gamma$  函数的自变量所取的值或是整数,或是半整数,因此所给积分是可以算出值的. 特别当  $m = 0$  时就有

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \\ &= \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{当 } n \text{ 为奇数} \end{cases} \end{aligned}$$

例2 计算广义积分  $\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx$ , 其中  $0 < m < n$ .

解 令  $x = t^{\frac{1}{n}}$ , 则

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx &= \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{t^{m-1}}{1+t} dt \\ &= \frac{1}{n} B\left(1 - \frac{m}{n}, \frac{m}{n}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n} \Gamma\left(1 - \frac{m}{n}\right) \Gamma\left(\frac{m}{n}\right)$$

利用  $\Gamma$  函数的余元公式即得

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx = \frac{1}{n} \frac{\pi}{\sin \frac{m}{n} \pi}$$

不过, 由于余元公式还未给予证明, 因此这个积分实际上并没有算出. 自然, 若能用别的方法算出积分

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = B(1-\alpha, \alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt \quad (0 < \alpha < 1)$$

的值, 这便是证明了余元公式.

#### 习题 10.4

1. 何谓  $\Gamma$  函数,  $B$  函数? 写出  $\Gamma$  函数,  $B$  函数的递推公式和它们之间的关系式.

2. 利用欧拉积分计算:

$$(1) \int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx$$

$$(2) \int_0^a x^2 \sqrt{a^2-x^2} dx$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx$$

$$(4) \int_0^1 x^{n-1} (1-x^m)^{q-1} dx \quad (n, m, q > 0)$$

$$(5) \int_0^{+\infty} e^{-at} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} dt \quad (a > 0)$$

$$(6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^\alpha x dx \quad (|\alpha| < 1)$$

$$(7) \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{x} \ln \frac{1}{x}} dx$$

$$(8) \int_a^b \left(\frac{b-x}{x-a}\right)^p dx \quad (0 < p < 1)$$

3. 试求曲线  $x^n + y^n = a^n$  当  $x > 0, y > 0, n > 0$  时所围成平面图形的面积.

## 复 习 题

1. 证明:若函数  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  中非负、连续,且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \neq 0$ , 则  $\int_a^{+\infty} f(x) dx = +\infty$ .

2. 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  中是正的单调非增函数, 那么  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  和  $\int_a^{+\infty} f(x) \sin^2 x dx$  同敛散, 由此证明积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx, \quad \int_2^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x \ln x} dx$$

发散.

3. 设  $f(x)$  在  $[a, A]$  上连续, 证明

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^x [f(t+h) - f(t)] dx = f(x) - f(a) \quad (a < x < A)$$

4. 设  $\varphi, \psi$  分别是可以微分两次和一次的函数, 证明

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds$$

满足弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

5. 试用化成级数的方法, 证明积分  $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  收敛.

6. 证明:  $f(u) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^u(1+x)} dx$  在  $(0, 2)$  上连续.

7. 计算下列积分:

$$(1) \int_0^{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2} dx \quad (\alpha \geq 0)$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{\alpha})} \quad (\alpha \text{ 为任实数})$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \left( \frac{1 - e^{-\alpha x}}{x} \right) dx \quad (\alpha > 0)$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos mx dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

$$(5) \int_0^1 \frac{\arctan x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (\text{提示: } \frac{\arctan x}{x} = \int_0^1 \frac{du}{1+x^2 u^2})$$

8. 利用欧拉积分计算:

$$(1) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$(2) \int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx \quad (n \text{ 为正整数})$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n} \quad (n \text{ 为正整数}, a > 0)$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{x^a \ln x}{1+x^2} dx \quad (-1 < a < 1)$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{1+x^n}{1+x^{2n}} dx$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} 2xe^{-x^n} dx$$

9. 已知  $n \geq 2$  时,  $\int_0^{+\infty} \cos(x^n) dx = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{2n}$ , 证明:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^n)}{x^n} dx = \begin{cases} \frac{1}{n-1} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{2n}, & n > 1 \\ \frac{\pi}{2}, & n = 1 \end{cases}$$

## 11 富里叶分析

自然界中,普遍存在着周期现象,即经历一定的时间  $T$  后,又恢复到原状的现象. 一切周期现象都可以用周期函数来描述,而最简单的周期函数是三角函数. 本章主要的内容是研究如何把一个周期函数用三角函数所组成的三角级数来表示,此外,还将引出平方可积函数按任意正交函数系展开的广义富里叶级数,以及定义在整个数轴上的非周期函数表示成富里叶积分的方法.

### 11.1 周期函数的富里叶级数

已知单摆、音叉的振动是简谐振动,可用以  $2\pi$  为周期的三角函数  $y = A\sin(x + \varphi)$  来描述. 同样,三角函数  $y_k = A_k \sin(kx + \varphi_k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , 也有周期为  $2\pi$ . 于是,由  $y_0, y_1, \dots, y_n$  的叠加就构成一个较复杂的振动:  $\sum_{k=0}^n y_k = \sum_{k=0}^n A_k \sin(kx + \varphi_k)$ . 若用无限多个  $y_k$  叠加,就得到一个函数级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(nx + \varphi_n)$$

其中  $y_0 = A_0 \sin \varphi_0$  为常数,称为基波;  $y_1 = A_1 \sin(x + \varphi_1)$  称为一次谐波,  $\dots$ . 若这个函数级数处处收敛,它也表示一个周期为  $2\pi$  的振动. 在实际中常常遇到的是反问题:一个复杂的振动能否用有限或无限  $y_0, y_1, y_2, \dots$  的叠加来表示?不失一般性,给定一个以  $2\pi$  为周期的函数  $f(x)$ , 能否有等式:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(nx + \varphi_n)$$

成立?由于  $A_n \sin(nx + \varphi_n) = A_n \sin\varphi_n \cos nx + A_n \cos\varphi_n \sin nx$ , 若令  $a_n = A_n \sin\varphi_n, b_n = A_n \cos\varphi_n$ , 并使  $\frac{a_0}{2} = A_0 \sin\varphi_0$ , 就变成  $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ , 其中  $\frac{a_0}{2}$  称为基波,  $a_1 \cos x + b_1 \sin x$  称为一次谐波,  $\dots$ . 故在给定一个以  $2\pi$  为周期的函数  $f(x)$  后, 前面所提出的问题就变成: 如何求系数  $a_n, b_n$ ? 在什么条件下, 上述等式才成立? 并把所给的函数级数称为以  $2\pi$  为周期的函数  $f(x)$  的三角级数. 若上述等式成立, 就称  $f(x)$  能展开成三角级数. 为了建立系数  $a_n$  与  $b_n$  和  $f(x)$  的关系, 必须引入三角函数的正交性的概念.

### 11.1.1 周期函数、三角函数的正交性

如果函数  $f(x)$  具有性质: 存在非零常数  $T$ , 使对  $f(x)$  定义域中的任何  $x$ , 有

$$f(x+T) = f(x)$$

则称  $f(x)$  是以  $T$  为周期的周期函数, 称  $T$  为最小正周期.

显然, 如果  $T$  是周期函数  $f(x)$  的周期, 而  $n$  是任意的整数, 则有

$$f(x+nT) = f(x)$$

即  $nT$  也是函数  $f(x)$  的周期.

如果周期函数  $f(x)$  在任何一有限区间  $[a, b]$  上可积, 那么容易证明  $f(x)$  在长为周期  $T$  的区间上的积分值是相等的, 即

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

特别, 周期函数  $f(x)$  在一个周期内的平均值

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x) dx$$

与起点  $a$  无关.

为了把周期函数展开成三角级数, 要用到三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

的正交性的性质,即系中任意两相异函数的乘积在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分都等于零. 该函数系的每个函数的自乘积在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分不为零. 容易验证此结论成立. 事实上,

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = \frac{1}{n} [\sin n\pi - \sin(-n\pi)] = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = \frac{1}{n} [\cos(-n\pi) - \cos n\pi] = 0$$

$$(n = 1, 2, \dots)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] \, dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

同样可得  $m \neq n$  时,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0$$

但是

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \, dx = 2\pi, \\ & \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2mx) \, dx \\ &= \pi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \, dx \quad (m = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

### 11.1.2 富里叶级数

我们对一类具有特定系数的三角级数感兴趣.

**定义** 设  $f(x)$  在 $[-\pi, \pi]$ 上是可积的函数, 具有周期  $2\pi$ , 称数

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx,$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

为  $f(x)$  的富里叶系数, 并称以此为系数而形式上构成的三角函数:

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$  为  $f(x)$  的富里叶级数, 记为  $f(x)$

$\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ , 其中符号“ $\sim$ ”的意义是一种对应关系, 它仅表示对每个在  $[-\pi, \pi]$  上可积的周期为  $2\pi$  的函数  $f(x)$ ,

就马上联想到它所对应的富里叶级数而已. 在什么条件下  $f(x)$  才和它的富里叶级数相等? Fourier 本人也解决不了! 后来, 德国数学家迪里赫勒才把它圆满解决. 在一定的条件下,  $f(x)$  的三角级数就是它的富里叶级数, 即有如下的收敛定理.

**迪里赫勒定理** (1) 设周期为  $2\pi$  的周期函数  $f(x)$  在任何有限区间上是逐段光滑的, 则它的富里叶级数在整个数轴上都收敛, 在每个连续点处收敛于  $f(x)$ , 而在每个间断点处收敛于函数  $f(x)$  左右极限的平均值, 即

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

(2) 如果函数  $f(x)$  在整个数轴上处处连续, 且在任何有限区间上是逐段光滑的, 则其富里叶级数就在整个数轴上绝对一致收敛于  $f(x)$ .

这里所谓函数  $f(x)$  在有限区间  $[a, b]$  上逐段光滑是指可以把  $[a, b]$  分成有限个子区间, 使得在每个子区间内  $f(x)$  连续且有连续的微商  $f'(x)$ , 而这些区间的端点只能是  $f(x)$  及  $f'(x)$  的第一类间断点.

在本节的最后再给出定理的证明. 先利用它的结论求出一些函数的富里叶级数.

这时, 称以  $2\pi$  为周期的函数  $f(x)$  可展开成富里叶级数. 把以  $2\pi$  为周期的函数展开成富里叶级数所需要的条件比展开成幂级数的条件弱多了, 这也是富里叶级数用途广泛的原因之一.

例 展开图 11.1 所示的周期  $2\pi$  的周期函数  $f(x)$  为富里叶级数.

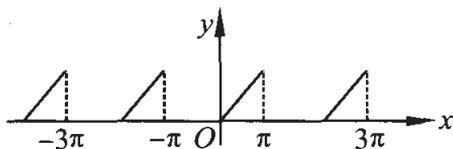


图 11.1

解  $f(x)$  在区间  $[-\pi, \pi]$  上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

它显然满足迪里赫勒定理的条件, 因此其富里叶级数收敛.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

所以

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \right]$$

$$(x \neq (2k-1)\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

而在  $x = (2k-1)\pi$  处, 由于  $f(x)$  不连续, 其富里叶级数收敛于

$$\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] = \frac{\pi}{2}.$$

应用这个展开式容易得到几个特殊级数的和. 在展开式中令  $x = 0$ . 由于  $f(0) = 0$  就得到

$$0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

即

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

进而又可求得其它几个有趣的和式. 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

进而得到

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

同样, 由级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$  绝对收敛, 故有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} \\ &= \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

又得

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}$$

### 11.1.3 偶函数与奇函数的富里叶级数

如果周期函数  $f(x)$  是偶函数, 即  $f(-x) = f(x)$ , 这时  $f(x)\sin nx$  是奇函数,  $f(x)\cos nx$  是偶函数, 便有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

因此  $f(x)$  的富里叶级数只含余弦项,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

这样的级数称为余弦级数.

如果周期函数  $f(x)$  是奇函数, 即  $f(-x) = -f(x)$ , 这时  $f(x)\cos nx$  亦是奇函数, 所以  $a_n = 0$ . 因此  $f(x)$  的富里叶级数只含正弦项,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

这样的级数称为正弦级数, 并且

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

例 1 展开如图 11.2 所示的周期函数  $f(x)$  为富里叶级数.

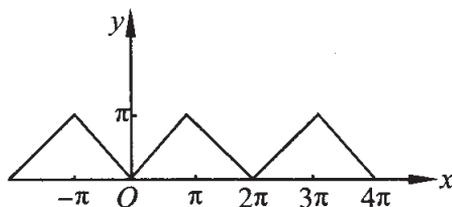


图 11.2

解 这个函数的周期为  $2\pi$ , 它在区间  $[-\pi, \pi]$  上的表达式为  $f(x) = |x|$ . 因为  $f(x)$  是逐段光滑的, 且在整个数轴上是连续的偶函数, 所以它可展为绝对一致收敛的余弦级数, 其富里叶系数为

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx$$

$$= \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1]$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{当 } n = 2k \\ -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}, & \text{当 } n = 2k-1 \end{cases}$$

于是, 所给函数的富里叶级数为

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

将所得到的级数两端从 0 到  $x$  ( $0 < x \leq \pi$ ) 积分, 得到

$$\frac{x^2}{2} = \frac{\pi}{2}x - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^3}$$

这个级数仍然在  $[0, \pi]$  上一致收敛. 再积分一次, 就有

$$\frac{x^3}{6} = \frac{\pi}{4}x^2 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^4} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$$

令  $x = \pi$ , 代入得

$$\frac{\pi^3}{6} = \frac{\pi^3}{4} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$$

立即得到

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

例 2 展开如图 11.3 所示的周期函数  $f(x)$  为富里叶级数.

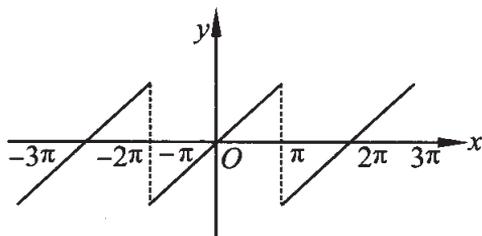


图 11.3

解 这是周期  $2\pi$  的奇函数,它满足迪里赫勒定理的条件,故可展成正弦级数. 由于在区间  $(-\pi, \pi)$  内,  $f(x) = x$  所以

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{2}{n} (-1)^{n-1}$$

于是所给函数的富里叶级数为

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx \quad (x \neq (2k-1)\pi)$$

当  $x$  为间断点  $(2k-1)\pi$  时, 级数收敛于  $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = 0$ .

#### 11.1.4 任意周期的情形

前面的讨论只限于具有周期  $2\pi$  的周期函数. 现在讨论  $f(x)$  的周期为  $2l$  的情形, 作变换  $x = \frac{l}{\pi}t$ , 并记

$$f\left(\frac{l}{\pi}t\right) = g(t) \quad (\text{从而 } g\left(\frac{\pi}{l}x\right) = f(x))$$

则  $g(t)$  为周期  $2\pi$  的函数, 如果  $g(t)$  满足迪里赫勒定理的条件, 便有

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos nt \, dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin nt \, dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

回到原来的变量  $x$  即有

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{l}x + b_n \sin \frac{n\pi}{l}x \right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

这就是周期为  $2l$  的函数的富里叶展开式.

同样, 如果  $f(x)$  是偶函数, 则它的富里叶级数就化成余弦级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

其中

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

如果  $f(x)$  是奇函数, 则它的富里叶级数就化成正弦级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

其中

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

**例** 交流电压  $E(t) = E \sin \omega t$  经半波整流后负压消失(图 11.4), 试求半波整流函数的富里叶级数.

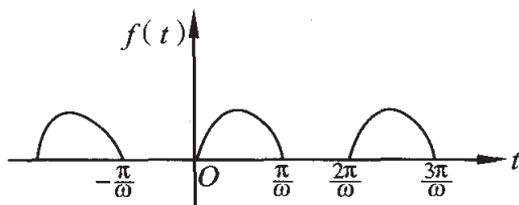


图 11.4

**解** 这个半波整流函数的周期是  $\frac{2\pi}{\omega}$ , 在区间  $\left[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}\right]$  上, 它的表达式为

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\frac{\pi}{\omega} \leq t < 0 \\ E \sin \omega t, & 0 \leq t < \frac{\pi}{\omega} \end{cases}$$

由此可得

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E \sin \omega t \, dt = \frac{2E}{\pi}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E \sin \omega t \cos n \omega t \, dt \\ &= \frac{E\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} [\sin(n+1)\omega t - \sin(n-1)\omega t] \, dt \end{aligned}$$

当  $n = 1$  时,

$$a_1 = \frac{E\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin 2\omega t \, dt = 0$$

当  $n \neq 1$  时,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{E\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E [\sin(n+1)\omega t - \sin(n-1)\omega t] \, dt \\ &= \frac{E}{2\pi} \left[ -\frac{\cos(n+1)\omega t}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\omega t}{n-1} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}} \\ &= \frac{[(-1)^{n-1} - 1]E}{(n^2 - 1)\pi} \quad (n = 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

于是有  $a_{2k-1} = 0, a_{2k} = \frac{2E}{(1-4k^2)\pi}$ .

再计算  $b_n$ , 因为

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E \sin \omega t \sin n \omega t \, dt \\ &= \frac{E\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} [\cos(n-1)\omega t - \cos(n+1)\omega t] \, dt \end{aligned}$$

当  $n = 1$  时,

$$b_1 = \frac{E\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} (1 - \cos 2\omega t) \, dt = \frac{E}{2}$$

当  $n \neq 1$  时,

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{E\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} [\cos(n-1)\omega t - \cos(n+1)\omega t] dt \\
 &= \frac{E}{2\pi} \left[ \frac{\sin(n-1)\omega t}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\omega t}{n+1} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}} \\
 &= 0 \quad (n = 2, 3, \dots)
 \end{aligned}$$

由于半波整流函数在整个数轴上连续,且在任何有限区间上是逐段光滑的,根据迪里赫勒定理,它所对应的富里叶级数在整个数轴上绝对一致收敛于自身.特别在区间 $\left[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}\right]$ 上就有

$$f(t) = \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2} \sin \omega t + \frac{2E}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-4k^2} \cos 2k\omega t$$

在无线电电路的理论中,周期函数常表示系统所发生的周期波,展开这个周期波为富里叶级数就相当于把它分解成一系列不同频率的正弦波的叠加.级数中的常数项 $\frac{a_0}{2}$ 称为周期波的直流成份;一次项正弦波 $a_1 \cos \frac{\pi x}{l} + b_1 \sin \frac{\pi x}{l}$ 称为基波,它的频率是 $\omega_1 = \frac{\pi}{l}$ ;高次项正弦波 $a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$ 称为 $n$ 次谐波,它的频率是 $\omega_n = \frac{n\pi}{l}$ ,即等于基波频率的 $n$ 倍.从半波整流后的电压所对应的富里叶级数可以看出,这个电压由直流和交流两种成份构成,在交流成份中含有基波和偶次谐波.第 $2n$ 次谐波的振幅是

$$A_n = \frac{2E}{\pi} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

显然当 $n$ 越大即谐波次数越高时,振幅就越小.因此在实际应用中,由于高次谐波的振幅的迅速减小,只要取展开式中前面几个低次谐波就足够了.

### 11.1.5 有限区间上的函数的富里叶级数

在实际中,所遇到的研究对象常常是只定义在有限区间上,而

并非在整个数轴上都有定义的周期函数,要把只定义在有限区间上的相应函数展开为富里叶级数,又符合理论上的要求,可采用“周期开拓”的方法,并按需要使得到的富里叶级数尽可能地简单,即仅为正弦或余弦级数.

若  $f(x)$  是在  $[a, b]$  上给出的. 令  $x = \frac{(b-a)t}{2l} + \frac{a+b}{2}$ , 相应的函数  $f\left(\frac{b-a}{2l}t + \frac{a+b}{2}\right) = g(t)$  就在  $-l \leq t \leq l$  上有定义. 故不失一般性, 设  $f(x)$  是在  $[-l, l]$  上有定义的函数. 下面通过三种方法把在  $[-l, l]$  上有定义的函数  $f(x)$ , 开拓成某个以  $2l$  为周期的周期函数  $F(x)$  在  $[-l, l]$  上的限制. 故可把  $f(x)$  在  $[-l, l]$  上展开成不同形式的富里叶级数.

直接开拓: 设  $f(x)$  是定义在区间  $[-l, l]$  上的逐段光滑函数. 这时可以把  $f(x)$  以  $2l$  为周期开拓出去 (图 11.5), 即作一个定义在整个数轴上的周期  $2l$  的函数

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & -l \leq x \leq l \\ f(x_1), & x = x_1 + 2nl, -l \leq x_1 \leq l; n \text{ 为整数} \end{cases}$$

则有

$$F(x + 2l) = F(x)$$

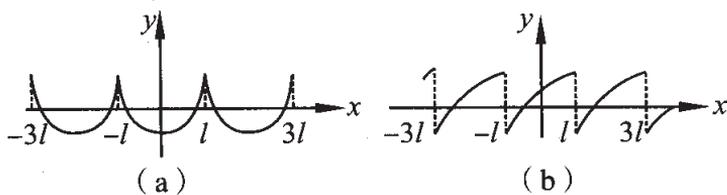


图 11.5

然后求出它的富里叶级数

$$F(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

如果这个级数的收敛条件得到满足,那么局限于区间 $[-l, l]$ 上来考虑,它就能表示原来给定的函数 $f(x)$ ,但这时,必须注意函数 $f(x)$ 在区间端点 $x = \pm l$ 的情况,即使原来的函数 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上连续,并且是逐段光滑的,只要 $f(l) \neq f(-l)$ (图 11.5(b)),开拓后函数在点 $x = \pm l, \pm 3l, \dots$ 处就不连续,而级数在 $x = \pm l$ 处只能收敛于

$$\frac{f(l) + f(-l)}{2}$$

如果 $f(l) = f(-l)$ (图 11.5(a)),这时 $F(x)$ 就在整个数轴上连续,因而所得级数在 $[-l, l]$ 上收敛于 $f(x)$ .

### 例 1 展开函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2h}, & |x| < h \\ 0, & h \leq |x| \leq l \end{cases}$$

为富里叶级数.

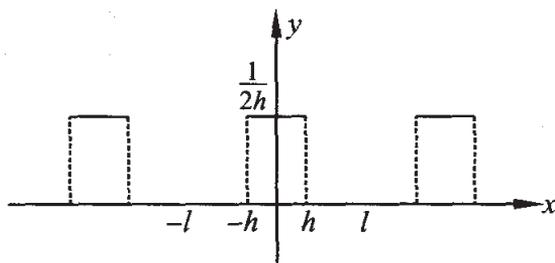


图 11.6

解 函数 $f(x)$ 及周期开拓后的函数 $F(x)$ 都是偶函数(图

11.6), 因此有  $b_n = 0$ , 而

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = \frac{2}{l} \int_0^h \frac{1}{2h} dx = \frac{1}{l}$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^h \frac{1}{2h} \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$= \frac{1}{n\pi h} \sin \frac{n\pi h}{l}$$

又因在区间的端点  $x = \pm l$  处有  $f(l) = f(-l) = 0$ , 所以

$$f(x) = \frac{1}{2l} + \frac{1}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi h}{l} \cos \frac{n\pi x}{l}$$

$$(|x| < h, h < |x| \leq l)$$

当  $x = \pm h$  时, 这个级数收敛于  $\frac{1}{4h}$ .

现在如果  $f(x)$  定义在有限区间  $[a, b]$  上, 可以  $2l = b - a$  为周期开拓到整个数轴上去, 这时它的富里叶级数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2n\pi x}{b-a} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{b-a} \right)$$

其中

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2n\pi x}{b-a} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2n\pi x}{b-a} dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

**例 2** 把  $[0, 1]$  上的函数  $f(x) = x^2$  展开为富里叶级数.

**解** 以  $2l = 1$  为周期将函数  $f(x)$  开拓到整个数轴上, 于是有

$$a_0 = 2 \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos 2n\pi x dx$$

$$= 2 \int_0^1 x^2 \cos 2n\pi x dx = \frac{1}{n^2 \pi^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= 2 \int_0^1 f(x) \sin 2n\pi x dx \\
 &= 2 \int_0^1 x^2 \sin 2n\pi x dx = -\frac{1}{n\pi} \quad (n = 1, 2, \dots)
 \end{aligned}$$

因为  $f(x) = x^2$  在  $[0, 1]$  上连续, 但  $f(0) = 0 \neq 1 = f(1)$ , 所以, 当  $0 < x < 1$  时, 有

$$f(x) = x^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} \cos 2n\pi x - \frac{\pi}{n} \sin 2n\pi x \right)$$

而当  $x = 0$  或  $1$  时, 上述三角级数收敛于  $\frac{1}{2}$ .

偶性开拓与奇性开拓和余弦级数与正弦级数: 不失一般性, 现在再来考察  $f(x)$  是定义在区间  $[0, l]$  上的函数, 为了把它展开为富里叶级数, 可将函数  $f(x)$  任意地开拓到  $[-l, 0]$  上, 然后将定义在  $[-l, l]$  上的函数以  $2l$  为周期开拓到整个数轴上去, 化为前面讨论过的情形. 如此看到, 由于各种不同的开拓, 得到的富里叶级数自然也就不同, 但在  $(0, l)$  中, 它们都收敛于同一个函数.

有两种开拓方法是最常用的.

一种是偶性开拓, 即令

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq l \\ f(-x), & -l \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$f_1(x)$  是  $[-l, l]$  中的偶函数, 它的富里叶级数即余弦级数

$$f_1(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

其中

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

另一种是奇性开拓, 即令

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x \leq l \\ 0, & x = 0 \\ -f(-x), & -l \leq x < 0 \end{cases}$$

$f_2(x)$  是  $[-l, l]$  中的奇函数, 它的富里级数即正弦级数

$$f_2(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

其中

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

例 3 展开函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{l}{2} \\ l-x, & \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases}$$

为正弦级数和余弦级数.

解 先求正弦级数. 开拓  $f(x)$  到  $[-l, 0)$  上, 使其成为奇函数(图 11.7), 依(2)有

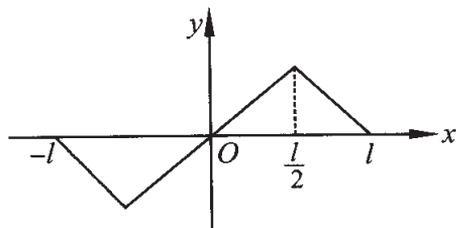


图 11.7

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{2}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} x \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ &\quad + \frac{2}{l} \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{4l}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \\ &= \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{(-1)^{k-1} 4l}{(2k-1)^2 \pi^2}, & n = 2k-1 \end{cases} \end{aligned}$$

即得

$$f(x) = \frac{4l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{l} \quad (0 \leq x \leq l)$$

次求余弦级数. 开拓函数  $f(x)$  到  $[-l, 0)$  上, 使其成为偶函数(图 11.8), 这时依(1), 有

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx \\
 &= \frac{2}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} x dx \\
 &\quad + \frac{2}{l} \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) dx \\
 &= \frac{l}{2}
 \end{aligned}$$

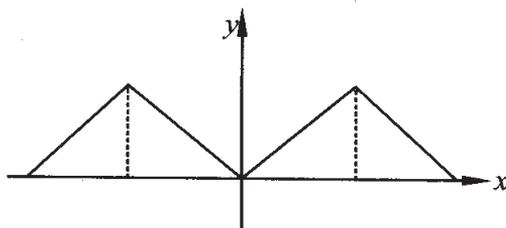


图 11.8

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\
 &= \frac{2}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} x \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{2}{l} \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\
 &= \frac{2l}{n^2 \pi^2} \left[ 2 \cos \frac{n\pi}{2} - 1 + (-1)^{n+1} \right]
 \end{aligned}$$

除  $a_{4k+2} = -\frac{2l}{(2k+1)^2 \pi^2}$  外, 其余  $a_n$  都为零. 于是

$$f(x) = \frac{l}{4} - \frac{2l}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(4k+2)\pi x}{l} \quad (0 \leq x \leq l).$$

### 11.1.6 富里叶级数的复数形式

设  $f(x)$  是定义在区间  $[-l, l]$  上的函数, 且在这区间上可以展成富里叶级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$$

其中  $\omega = \frac{\pi}{l}$  及

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos n\omega x dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin n\omega x dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

应用欧拉公式

$$\cos n\omega x = \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2}$$

$$\sin n\omega x = \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i}$$

就得到

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} + ib_n \frac{e^{-in\omega x} - e^{in\omega x}}{2} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\omega x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\omega x} \end{aligned}$$

或者写成

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{in\omega x}$$

其中

$$F_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx$$

$$\begin{aligned} F_{\pm n} &= \frac{1}{2} (a_n \mp ib_n) \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) (\cos n\omega x \mp i \sin n\omega x) dx \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{\mp in\omega x} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

这就是  $f(x)$  的富里叶级数的复数形式. 它的系数  $F_n$  与  $F_{-n}$  是互为共轭的复数, 即  $F_{-n} = \bar{F}_n$ .

如果考虑到复指数的函数列

$$\dots, e^{-in\omega x}, \dots, e^{-i\omega x}, 1, e^{i\omega x}, \dots, e^{in\omega x}, \dots$$

在区间  $[-l, l]$  的正交性, 即有

$$\int_{-l}^l e^{i(m+n)\omega x} dx = \begin{cases} 0, & m+n \neq 0 \\ 2l, & m+n = 0 \end{cases}$$

则复数形式的富里叶级数也可以用另一方式直接导出. 事实上, 设

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{in\omega x}$$

以  $e^{im\omega x}$  乘这个等式的两端, 再从  $-l$  到  $l$  逐项积分, 就得到

$$\int_{-l}^l f(x) e^{in\omega x} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \int_{-l}^l e^{i(n+m)\omega x} dx$$

根据复指数函数系的正交性, 等式右端除  $n+m=0$  一项外其余各项均为零, 从而可得  $F_n$  的表达式. 它与上述结果是完全一致的.

### 11.1.7 贝塞尔不等式

设函数  $f(x)$  在区间  $[-\pi, \pi]$  上是可积(因而也是平方可积)的或在广义意义下可积和平方可积的. 而

$$g_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

是任意一个“ $n$ 次”三角多项式, 式中  $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n$  是常数. 现在要来确定这些常数, 使得  $f(x)$  与  $g_n(x)$  的平方平均偏差

$$\Delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - g_n(x)]^2 dx$$

为最小. 为此目的, 我们先计算这个偏差  $\Delta_n$  的表达式. 因为

$$\Delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g_n(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} g_n^2(x) dx$$

容易算得

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g_n(x) dx \\ &= \frac{\alpha_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \sum_{k=1}^n \left( \alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx + \beta_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right) \\ &= \pi \left[ \frac{\alpha_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k a_k + \beta_k b_k) \right] \end{aligned}$$

其中  $a_0, a_k, b_k (k=1, 2, \dots, n)$  是  $f(x)$  的富里叶系数. 而积分

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} g_n^2(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right]^2 dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{\alpha_0^2}{4} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 \cos^2 kx + \beta_k^2 \sin^2 kx) \right] dx \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(x) dx \end{aligned}$$

其中右端第二个积分中的被积函数  $\sigma_n(x)$  是下面这些形式的函数的线性组合:

$$\cos lx, \sin mx, \cos lx \sin mx \quad (l, m = 1, 2, \dots, n)$$

$$\cos lx \cos mx, \sin lx \sin mx \quad (l \neq m)$$

由于三角函数的正交性,它们在区间  $[-\pi, \pi]$  上的积分都为零,故得

$$\int_{-\pi}^{\pi} g_n^2(x) dx = \pi \left[ \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \right]$$

于是就有

$$\begin{aligned} \Delta_n = & \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \pi \left[ -\alpha_0 a_0 - 2 \sum_{k=1}^n (\alpha_k a_k + \beta_k b_k) \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \right] \end{aligned}$$

若在这个等式的右端同时加减如下的和

$$\pi \left[ \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + b_k^2) \right]$$

则它又可以写成

$$\begin{aligned} \Delta_n = & \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left[ \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + b_k^2) \right] \\ & + \pi \left\{ \frac{1}{2} (\alpha_0 - a_0)^2 + \sum_{k=1}^n [(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2] \right\} \end{aligned}$$

由此可见,当

$$\alpha_0 = a_0, \alpha_k = a_k, \beta_k = b_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

时,  $\Delta_n$  为最小,从而证明了

**定理** 设  $f(x)$  是区间  $[-\pi, \pi]$  上的可积且平方可积的函数,则在所有的  $n$  次三角多项式中,当系数是  $f(x)$  的富里叶系数时,它与  $f(x)$  的平方平均偏差  $\Delta_n$  为最小,而且这个最小偏差可以表达成

$$\Delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right]$$

应当注意:若  $f(x)$  连续或至多有有限个第一类间断点,则它本身及其平方就是可积的.但是在广义积分的意义下, $f(x)$  可积其平方未必可积.为了保持一般的形式,所以我们这样陈述定理.

由于  $\Delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - g_n(x)]^2 dx \geq 0$ , 所以有

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

当  $n$  增大时,这个不等式左端的和也增大,但总小于右端的定数,从而级数

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$$

收敛.即得如下推论:

**系 1** 设  $f(x)$  在区间  $[-\pi, \pi]$  上可积且平方可积,则由它的富里叶系数  $a_k$  及  $b_k$  所构成的级数

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$$

收敛,并且满足不等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

这个不等式称为**贝塞尔(Bessel)不等式**.如果再作进一步的讨论,还可以证明在系 1 的条件下,贝塞尔不等式实际上是等式,即

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

它称为**巴塞瓦尔(Parseval)等式**.证明方法颇多,习题 10 就是其中之一.

因为收敛级数的通项当  $n$  无限增大时趋于零,所以又有

**系 2** 设  $f(x)$  在区间  $[-\pi, \pi]$  上可积且平方可积,则其富里叶系数  $a_n$  及  $b_n$  当  $n$  无限增大时趋于零,即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0$$

此外,由巴塞瓦尔等式还可以得到一些不易直接求出的级数之和.以 11.1.3 的例 1 为例,如果把周期函数  $f(x)$  的展开式限制在区间  $[-\pi, \pi]$  上就得到

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x$$

于是由巴塞瓦尔等式有

$$\frac{\pi^2}{2} + \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x|^2 \, dx = \frac{2}{3} \pi^2$$

由此给出

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

这与前面所得结果一致.从而又有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4} \\ &= \frac{\pi^4}{96} + \frac{1}{16} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \end{aligned}$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

以上只对定义在  $[-\pi, \pi]$  上的函数进行讨论,但它的一些结论对定义在  $[-l, l]$  上的可积且平方可积的函数  $f(x)$  仍然成立.此时巴塞瓦尔等式为

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f^2(x) \, dx$$

### 11.1.8 富里叶级数的收敛性

现在回来证明 11.1.2 所提出的迪里赫勒定理.先证定理的第一部分,即在有限区间上逐段光滑的周期  $2\pi$  的函数  $f(x)$  的富里

叶级数在整个实数轴上都收敛,且和为

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

证 考察函数  $f(x)$  的富里叶级数的部分和

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

其中

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt \quad (k = 1, 2, \dots)$$

将这些系数表达式代入部分和中就得到

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dt \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \cos kx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt + \sin kx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(x-t) \right] f(t) \, dt \end{aligned}$$

利用公式

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(x-t) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(x-t)}{2\sin \frac{1}{2}(x-t)}$$

可将部分和简化成

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(x-t)}{\sin \frac{1}{2}(x-t)} f(t) \, dt$$

作变换  $t = x + u$ , 得

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{\sin \frac{1}{2}u} f(x+u) \, du$$

由于  $f(x)$  以  $2\pi$  为周期,  $\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{\sin \frac{1}{2}u}$  也以  $2\pi$  为周期, 所以被积函数是周期  $2\pi$  的函数, 它在一个周期上的积分与起点无关, 因此

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{\sin \frac{1}{2}u} f(x+u) du$$

将积分分成  $[-\pi, 0]$  及  $[0, \pi]$  两部分之和, 并在  $[-\pi, 0]$  中用  $-u$  代替  $u$ , 则部分和又可最后表成

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{\sin \frac{1}{2}u} [f(x+u) + f(x-u)] du$$

这个重要的积分称为**迪里赫勒积分**, 函数

$$\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{\sin \frac{1}{2}u}$$

称为**迪里赫勒核**.

如果  $f(x) \equiv 1$ , 则当然有  $S_n(x) = 1$ , 即

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{\sin \frac{1}{2}u} (1+1) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{\sin \frac{1}{2}u} du \end{aligned}$$

因为  $f(x)$  逐段光滑,  $f(x+0)$ ,  $f(x-0)$  存在有限, 将

$$\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$$

乘上式两端, 即得

$$\begin{aligned} & \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{\sin \frac{1}{2}u} du \end{aligned}$$

由此导出

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{[f(x+u) - f(x+0)] + [f(x-u) - f(x-0)]}{2 \sin \frac{1}{2}u} \\ &\quad \cdot \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u du \end{aligned}$$

令

$$g(x, u) = \frac{[f(x+u) - f(x+0)] + [f(x-u) - f(x-0)]}{2 \sin \frac{1}{2}u}$$

由于  $f(x)$  在任何有限区间上逐段光滑, 因此当  $u \in (0, \pi)$  时,  $g(x, u)$  除至多有限个第一类间断点外连续, 并且

$$\begin{aligned} & \lim_{u \rightarrow 0^+} g(x, u) \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \left[ \frac{f(x+u) - f(x+0)}{u} + \frac{f(x-u) - f(x-0)}{u} \right] \frac{\frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \\ &= f'(x+0) - f'(x-0) \end{aligned}$$

这就证明了  $g(x, u)$  在  $[0, \pi]$  上可积且平方可积. 而对于  $[0, \pi]$  上的可积且平方可积的函数  $\varphi(x)$ , 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \varphi(x) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x dx = 0$$

事实上, 令

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

$\varphi(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上可积和平方可积, 由 11.1.7 中系 2 即得

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \varphi(x) \sin \frac{x}{2} \right] \cos nx dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \varphi(x) \cos \frac{x}{2} \right] \sin nx dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

这就意味着

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} g(x, u) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) u du = 0$$

也就是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ S_n(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \right] = 0$$

这就证明了迪里赫勒定理的(1).

再考察这个定理的后一论断, 即假定  $f(x)$  是连续的周期函数, 并且它的微商在  $[-\pi, \pi]$  上最多有有限个第一类间断点, 需要证明  $f(x)$  的富里叶级数在整个数轴上绝对一致收敛于  $f(x)$ . 为此目的, 先利用分部积分法计算  $f(x)$  的富里叶系数  $a_n$  与  $b_n$ , 并注意  $f(-\pi) = f(\pi)$ , 可得

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{f(x) \sin nx}{n\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx \\ &= -\frac{b_n'}{n} \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \\ &= -\frac{f(x) \cos nx}{n\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx \\ &= \frac{a_n'}{n} \end{aligned}$$

其中  $a_n'$  与  $b_n'$  表示  $f(x)$  的导函数  $f'(x)$  的富里叶系数, 又

$$|a_n| = \left| \frac{b_n'}{n} \right| \leq \frac{1}{2} \left( b_n'^2 + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$|b_n| = \left| \frac{a_n'}{n} \right| \leq \frac{1}{2} \left( a_n'^2 + \frac{1}{n^2} \right)$$

从而对任意的  $x$  有

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n| \leq \frac{1}{2} (a_n'^2 + b_n'^2) + \frac{1}{n^2}$$

因为  $f'(x)$  是区间  $[-\pi, \pi]$  上可积且平方可积的函数, 由 11.1.7 的系 1 知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n'^2 + b_n'^2)$  收敛, 而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  也收敛, 所以  $f(x)$  的富里叶级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

在整个数轴上绝对一致收敛, 并且由定理的前一论断知这个级数的和就是函数  $f(x)$ . 这样就完全证明了迪里赫勒收敛性定理.

作为富里叶级数的一个应用, 我们来证明  $\Gamma$  函数的余元公式

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi} \quad (0 < a < 1)$$

首先, 根据  $B(a, 1-a) = \Gamma(a)\Gamma(1-a)$  有

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = B(a, 1-a)$$

$$= \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{-a} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{z^{a-1}}{1+z} dz$$

$$= \int_0^1 \frac{z^{a-1}}{1+z} dz + \int_1^{+\infty} \frac{z^{a-1}}{1+z} dz$$

$$= \int_0^1 \frac{z^{a-1}}{1+z} dz + \int_0^1 \frac{z^{-a}}{1+z} dz$$

$$= I_1 + I_2$$

在区间  $(0, 1)$  上,  $\frac{z^{a-1}}{1+z}$  可展成级数

$$\frac{z^{a-1}}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{a+n-1}$$

且右端级数在 $[\varepsilon, u]$ 中一致收敛, 其中 $0 < \varepsilon < u < 1$ 是任意取定的. 将上式两端在 $[\varepsilon, u]$ 上积分得

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^u \frac{z^{a-1}}{1+z} dz &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{\varepsilon}^u z^{a+n-1} dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{a+n} - \varepsilon^{a+n}}{a+n} \\ &= u^a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^n}{a+n} - \varepsilon^a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varepsilon^n}{a+n} \end{aligned}$$

由于级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{a+n}$ 的收敛半径为1, 且 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{a+n}$ 收敛, 故

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{a+n} &= \lim_{z \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{a+n} \\ \lim_{z \rightarrow 0^+} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{a+n} &= \frac{1}{a} \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0, u \rightarrow 1$ 就得到

$$I_1 = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ u \rightarrow 1}} \int_{\varepsilon}^u \frac{z^{a-1}}{1+z} dz = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{a+n}$$

同理, 由于 $0 < 1-a < 1$ ,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \frac{z^{-a}}{1+z} dt \\ &= \int_0^1 \frac{z^{(1-a)-1}}{1+z} dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1-a+n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(1-a)+n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{a-(n+1)} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a-n}$$

综上所述有

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n} \right) \quad (*)$$

其次,再考虑函数  $f(x) = \cos ax$  ( $0 < a < 1$ ) 在  $[-\pi, \pi]$  上的富里叶展开. 由于  $f(x)$  是偶函数, 故有

$$\cos ax = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

其中

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax \, dx = \frac{2 \sin a\pi}{\pi a}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax \cos nx \, dx \\ &= \frac{\sin a\pi}{\pi} (-1)^n \left( \frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n} \right) \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

即当  $|x| \leq \pi$  有

$$\cos ax = \frac{\sin a\pi}{\pi} \left[ \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n} \right) \cos nx \right]$$

令  $x = 0$ , 就得

$$1 = \frac{\sin a\pi}{\pi} \left[ \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n} \right) \right]$$

与(\*)式比较立即得出

$$\begin{aligned} \Gamma(a)\Gamma(1-a) &= \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n} \right) \\ &= \frac{\pi}{\sin a\pi} \quad (0 < a < 1) \end{aligned}$$

### 复习思考题

1. 是不是每个三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

都是某一个周期函数  $f(x)$  的富里叶级数?它成为富里叶级数的必要条件是什么?

2. 周期为  $2\pi$  的函数  $f(x)$  的富里叶级数是否一定收敛?如果收敛,是否一定收敛于  $f(x)$  自己?

3. 若  $f(x)$  只在区间  $[0, l]$  上定义,为什么能把它展成正弦级数、余弦级数或一般的富里叶级数?写出相应的展开式.

4. 在所有  $n$  次三角多项式中,哪一个多项式与  $f(x)$  的平方平均偏差最小?

5. 何谓平方平均收敛,它与通常的逐点收敛有何不同?

### 习题 11.1

1. 作出下列周期  $2\pi$  的函数的图形,并把它们展开成富里叶级数(要求说明收敛情况).

(1)  $f(x) = |\sin x|$

(2) 在  $[-\pi, \pi)$  中,  $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \leq x \leq 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$

(3) 在  $[-\pi, \pi)$  中,  $f(x) = x^2$

(4) 在  $[-\pi, \pi)$  中,  $f(x) = \cos \frac{x}{2}$

(5) 在  $[-\pi, \pi)$  中,  $f(x) = \begin{cases} e^x, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

2. 将下列函数在指定的区间内展开成富里叶级数,并说明收敛情况.

(1)  $f(x) = 1 - \sin \frac{x}{2} \quad (0 \leq x \leq \pi)$

(2)  $f(x) = \frac{x}{3} \quad (0 \leq x \leq T)$

(3)  $f(x) = e^{ax} \quad (-l \leq x \leq l)$

(4)  $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ -1, & 1 \leq |x| \leq 2 \end{cases}$

$$(5) f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \\ 3-x, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

3. 把下列函数展开成正弦级数和余弦级数:

$$(1) f(x) = x \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

$$(2) f(x) = 2x^2 \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} A, & 0 \leq x < \frac{l}{2} \\ 0, & \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases}$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2h}, & 0 \leq x \leq 2h \\ 0, & 2h < x \leq \pi \end{cases}$$

4. 设  $f(x)$  是一个以  $2\pi$  为周期的函数,

(1) 如果  $f(x \pm \pi) = -f(x)$ , 试证明  $f(x)$  在  $(-\pi, \pi)$  内的富里叶展开只含有奇次谐波, 即

$$a_{2n} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), b_{2n} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(2) 如果  $f(x \pm \pi) = f(x)$ , 试证明  $f(x)$  在  $(-\pi, \pi)$  内的富里叶展开只含有偶次谐波, 即

$$a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

5. 已知周期为  $2\pi$  的函数  $f(x)$  的富里叶系数是  $a_n$  和  $b_n$ , 试证明“平移”了的函数  $f(x+h)$  ( $h = \text{常数}$ ) 的富里叶系数为

$$\bar{a}_n = a_n \cos nh + b_n \sin nh \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\bar{b}_n = b_n \cos nh - a_n \sin nh \quad (n = 1, 2, \dots)$$

6. 将  $y = 1 - x^2$  在  $[-\pi, \pi]$  上展开成富里叶级数, 并利用其结果求下列级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

7. 将函数  $f(x) = \operatorname{sgn} x$  ( $-\pi < x < \pi$ ) 展为富里叶级数, 并利

用其结果求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$  的和.

8. 设  $f(x)$  在  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$  这个周期上可表为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\frac{T}{2} \leq x < -\frac{\tau}{2} \\ H, & -\frac{\tau}{2} \leq x < \frac{\tau}{2} \\ 0, & \frac{\tau}{2} \leq x \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

试把它展开成富里叶级数的复数形式.

9. 将  $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & a \leq |x| < \pi \end{cases}$  展开成富里叶级数, 然后利用巴塞瓦尔等式求下列级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2} \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 na}{n^2}$$

10. 设  $f(x)$  是以  $2\pi$  为周期的连续函数,  $a_0, a_n, b_n (n = 1, 2, \dots)$  为其富里叶系数, 求卷积函数  $F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt$  的富里叶系数  $A_0, A_n, B_n (n = 1, 2, \dots)$ . 利用所得结果, 证明巴塞瓦尔等式.

## 11.2 广义富里叶级数

### 11.2.1 么正函数系

在讨论将函数  $f(x)$  展开为复数形式的富里叶级数时, 我们用到了复值函数系

$$\dots, e^{-in\omega x}, \dots, e^{-i\omega x}, 1, e^{i\omega x}, \dots, e^{in\omega x}, \dots$$

其中  $\omega = \frac{\pi}{l}$ , 并且利用了该函数在  $[-l, l]$  上的正交性. 除此以外,

该函数还满足

$$\int_{-l}^l e^{ikx} \cdot e^{-ikx} dx = 2l$$

因此, 如果将上述函数系中每个函数乘以  $\frac{1}{\sqrt{2l}}$ , 我们就得到一个正函数系

$$\dots, \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{-in\pi x}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{-ikx}, \frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{ikx}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{in\pi x}, \dots$$

即函数系  $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{in\pi x}$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 满足

$$\int_{-l}^l \varphi_n(x) \overline{\varphi_m(x)} dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases}$$

其中  $\overline{\varphi_m(x)}$  是  $\varphi_m(x)$  的复共轭函数. 一般地, 有下面的定义

**定义** 设  $\{\varphi_n(x)\}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) 是一列定义在区间  $[a, b]$  上的可积且平方可积的复值函数, 如果它们满足条件

$$\int_a^b \varphi_n(x) \overline{\varphi_m(x)} dx = \delta_{nm}$$

则称这个函数列是  $[a, b]$  上的么正函数系或简称么正系.

**例** 证明函数系

$$P_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

是区间  $[-1, 1]$  上的一个么正系.

**证** 当  $n \neq m$  时, 不妨设  $n > m$ , 考虑积分

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx \\ &= C_{nm} \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \cdot \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m dx \end{aligned}$$

其中

$$C_{nm} = \frac{\sqrt{(2n+1)(2m+1)}}{2^{n+m+1} n! m!}$$

连续应用分部积分法  $n$  次, 由于当  $0 \leq k \leq n-1$  时,

$$\left. \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x^2-1)^n \right|_{x=\pm 1} = 0$$

所以

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1) \frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m dx \\ &= (-1)^n \int_{-1}^1 (x^2-1)^n \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^m dx \end{aligned}$$

但  $x > m$ , 故  $\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^m = 0$ , 从而得到

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0$$

另一方面当  $n = m$  时, 对积分

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx &= \int_{-1}^1 P_n(x) \overline{P_n(x)} dx \\ &= \frac{2n+1}{2^{2n+1}(n!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx \end{aligned}$$

反复使用分部积分  $n$  次, 就有

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx &= \frac{(-1)^n (2n+1)!}{2^{2n+1} (n!)^2} \int_{-1}^1 (x^2-1) dx \\ &= \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1} (n!)^2} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt \\ &= \frac{(2n+1)!}{2^{2n} (n!)^2} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \\ &= 1 \end{aligned}$$

这就证明了所给函数系为么正系.

如果函数系  $\{\varphi_n(x)\}$  是区间  $[a, b]$  上的正交系, 且

$$\int_a^b \varphi_n(x) \overline{\varphi_n(x)} dx = 2l > 0$$

则将每个函数  $\varphi_n(x)$  乘以  $\frac{1}{\sqrt{2l}}$ , 就得到  $[a, b]$  上的么正系

$\left\{\frac{1}{\sqrt{2l}}\varphi_n(x)\right\}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2l}}$  称为  $\{\varphi_n(x)\}$  的归一化因子.

### 11.2.2 广义富里级数及平方平均收敛

设  $\{\varphi_n(x)\}(n=1,2,\dots)$  是  $[a,b]$  区间上的么正函数系. 下面要把对三角函数系所建立起来的理论推广到这个一般的么正系. 如同三角级数一样, 这里的问题是: 对于在区间  $[a,b]$  上可积且平方可积的函数  $f(x)$ , 是否可以按么正系  $\{\varphi_n(x)\}$  展开成无穷级数, 即等式

$$f(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \dots + a_n\varphi_n(x) + \dots$$

是否在区间  $[a,b]$  上成立?

如果这个展开式在区间  $[a,b]$  上一致收敛于  $f(x)$ , 由此可确定出系数  $a_n(n=1,2,\dots)$ . 以  $\overline{\varphi_m(x)}$  乘展开式的两端, 再自  $a$  到  $b$  逐项积分得

$$\int_a^b f(x) \overline{\varphi_m(x)} dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_a^b \varphi_n(x) \overline{\varphi_m(x)} dx$$

根据  $\{\varphi_n(x)\}$  的么正性可知, 等式右端只有  $n=m$  那一项不为零, 其余各项均为零. 于是得

$$a_m = \int_a^b f(x) \overline{\varphi_m(x)} dx$$

由此得到的级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$  称为函数  $f(x)$  按么正系  $\{\varphi_n(x)\}$  展开的广义富里叶级数, 而  $a_n$  称为广义富里叶系数.

同样, 这里我们也面临着广义富里叶级数的收敛性问题. 由于么正系  $\{\varphi_n(x)\}$  的一般性, 显然再去讨论级数的逐点收敛或一致收敛, 就不是十分方便了. 在此, 我们叙述一种完全是崭新的收敛概念, 即平方平均收敛概念.

**定义 1** 设在区间  $[a,b]$  上有可积且平方可积的函数列

$$g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x), \dots$$

如果存在  $[a,b]$  上的可积且平方可积的函数  $g(x)$ , 使得当  $n$  无限

增大时,积分

$$\int_a^b |g_n(x) - g(x)|^2 dx$$

趋于零,即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |g_n(x) - g(x)|^2 dx = 0$$

则称函数列  $\{g_n(x)\}$  在区间  $[a, b]$  上平方平均收敛于函数  $g(x)$ .

应当指出,在这种平方平均收敛的意义下,  $g_n(x)$  与  $g(x)$  在个别点上的函数值可能相差很大,但从整体来考虑,它们是非常接近的.

在引进了上述收敛概念之后,我们的问题就成为在这样的条件下,函数  $f(x)$  的广义富里叶级数平方平均收敛于自身. 若用  $S_n(x)$  表示广义富里叶级数的部分和

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)$$

其中  $a_k = \int_a^b f(x) \overline{\varphi_k(x)} dx$ , 此即为在这样的条件下,部分和  $S_n(x)$  平方平均收敛于函数  $f(x)$ . 如同 11.1.7 中对三角多项式所进行的讨论一样,先简化积分

$$\int_a^b |S_n(x) - f(x)|^2 dx$$

因为

$$\begin{aligned} & |S_n(x) - f(x)|^2 \\ &= (S_n(x) - f(x))(\overline{S_n(x) - f(x)}) \\ &= S_n(x) \overline{S_n(x)} - f(x) \overline{S_n(x)} - S_n(x) \overline{f(x)} + |f(x)|^2 \end{aligned}$$

根据函数系  $\{\varphi_n(x)\}$  的么正性得

$$\begin{aligned} \int_a^b S_n(x) \overline{S_n(x)} dx &= \sum_{k,j=1}^n a_k \overline{a_j} \int_a^b \varphi_k(x) \overline{\varphi_j(x)} dx \\ &= \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \end{aligned}$$

即

$$\int_a^b f(x) \overline{S_n(x)} dx = \sum_{k=1}^n \bar{a}_k \int_a^b f(x) \overline{\varphi_k(x)} dx = \sum_{k=1}^n |a_k|^2$$
$$\int_a^b S_n \overline{f(x)} dx = \sum_{k=1}^n a_k \int_a^b \varphi_k(x) \overline{f(x)} dx = \sum_{k=1}^n |a_k|^2$$

故得

$$\int_a^b |S_n(x) - f(x)|^2 dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{k=1}^n |a_k|^2$$

由于左端的积分是非负的, 这个等式给出

$$\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

当  $n$  增大时, 不等式左端的和随  $n$  增大而恒小于右端的定数, 因此

级数  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$  收敛, 并且有广义的贝塞尔不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

**定义 2** 若对于在区间  $[a, b]$  上可积且平方可积的任意函数  $f(x)$ , 贝塞尔不等式成为等式, 即

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

就称函数系  $\{\varphi_n(x)\}$  是完备的么正系. 而这个等式称为广义的巴塞瓦尔等式.

这样一来, 只有当  $\{\varphi_n(x)\}$  是完备么正系时, 才能得出  $S_n(x)$  平方平均收敛于  $f(x)$ , 因为这时有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |S_n(x) - f(x)|^2 dx = 0$$

即在平方平均收敛的意义下, 函数  $f(x)$  可以表示成函数系  $\{\varphi_n(x)\}$  的线性组合

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

其中

$$a_n = \int_a^b f(x) \overline{\varphi_n(x)} dx$$

如果把在区间 $[a, b]$ 上可积且平方可积的复值函数的全体称为一个函数空间 $L^2$ ,并定义这个空间的内积和模分别为

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

其中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是空间 $L^2$ 中的任意两个复值函数. 则如同 $n$ 维欧几里德(Euclid)空间一样,函数空间 $L^2$ 的完备么正系 $\{\varphi_n(x)\}$ 就是这个空间的么正基. 而函数 $f(x)$ 按么正基 $\{\varphi_n(x)\}$ 展开时的系数是 $f(x)$ 相对于这个基的坐标. 广义的巴塞瓦尔等式就是函数空间的勾股定理. 并且可以用几何的语言叙述成:对于空间 $L^2$ 中的任意函数 $f(x)$ ,它的模的平方等于其在么正基下各坐标的模的平方之和. 这样,我们就可以认为函数空间 $L^2$ 是一个无限维的空间. 它显然是 $n$ 维欧几里德空间的某种推广.

### 复习思考题

1. 何为完备的么正系?何为 $f(x)$ 的广义富里叶级数?
2. 何为平方平均收敛?

### 习题 11.2

1. 证明下列函数系是正交系,并求其对应的么正系.
  - (1)  $1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots$ , 在 $[0, \pi]$ 上.
  - (2)  $\sin \frac{\pi}{l}x, \sin \frac{2\pi}{l}x, \dots, \sin \frac{n\pi}{l}x, \dots$ , 在 $[0, l]$ 上.
  - (3)  $\sin x, \sin 3x, \dots, \sin(2n+1)x, \dots$ , 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上.
  - (4)  $\cos \frac{\pi}{2l}x, \cos \frac{3\pi}{2l}x, \dots, \cos \frac{(2n+1)\pi}{2l}x, \dots$ , 在 $[0, l]$ 上.

2. 将  $f(x) = a\left(1 - \frac{x}{l}\right)$  ( $0 \leq x \leq l$ ) 按 1 题(2) 的函数系展开成广义富里叶级数.

3. 将  $f(x) = x$  ( $0 \leq x \leq l$ ) 按 1 题(4) 的函数系展开成广义富里叶级数.

## 11.3 富里叶变换

### 11.3.1 富里叶积分

前面已经讨论了怎样把有限区间上的函数展开成富里叶级数的问题. 下面将进一步讨论定义在整个数轴上的非周期函数的表示方法.

设函数  $f(x)$  在任何有限区间  $[-l, l]$  上可以展开成富里叶级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x) \quad (1)$$

其中

$$\omega = \frac{\pi}{l}$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos n\omega t dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin n\omega t dt \quad (n = 1, 2, \dots)$$

展开式当然与  $l$  的选取有关, 为了能使  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  中得到一个统一的表达式, 就需考察(1) 式当  $l \rightarrow +\infty$  时的情形. 为此, 令

$$\lambda_n = n\omega = \frac{n\pi}{l},$$

$$\Delta\lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n-1} = \frac{\pi}{l} = \omega \quad (n = 1, 2, \dots)$$

再将  $a_n, b_n$  表达式代入(1) 中得

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \lambda_n (x-t) dt \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta \lambda_n \int_{-l}^l f(t) \cos \lambda_n (x-t) dt \end{aligned}$$

如果  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  中绝对可积, 则当  $l \rightarrow +\infty$  时,

$$\frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt \rightarrow 0$$

$\Delta \lambda_n = \frac{\pi}{l} \rightarrow 0$ ,  $\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta \lambda_n \int_{-l}^l f(t) \cos \lambda_n (x-t) dt$  可以当作函数

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda (x-t) dt$  在  $(0, +\infty)$  上对  $\lambda$  的积分, 即

$$\begin{aligned} &\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta \lambda_n \int_{-l}^l f(t) \cos \lambda_n (x-t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda (x-t) dt \right] d\lambda \end{aligned}$$

从而有

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda (x-t) dt$$

它称为富里叶积分公式, 称等式右边的积分为富里叶积分.

因为

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda (x-t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda t \cos \lambda x dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \lambda t \sin \lambda x dt \end{aligned}$$

所以, 富里叶积分公式又可写成

$$f(x) = \int_0^{\infty} [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda$$

其中

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda t dt,$$

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \lambda t dt$$

将这些公式与用富里叶级数来表达函数  $f(x)$  的公式作一比较, 容易发现它们的相似之处. 在富里叶级数中,  $\cos n \omega x, \sin n \omega x$  的  $n$  只取自然数, 即  $n$  是离散的变量, 因而  $f(x)$  表现为对指标求和的无穷级数; 而在富里叶积分中,  $\cos \lambda x, \sin \lambda x$  的  $\lambda$  取区间  $[0, \infty]$  上的任意实数, 即  $\lambda$  是连续的变量, 因而表现为对参变量的积分. 此外, 系数  $a(\lambda)$  及  $b(\lambda)$  的构成也与富里叶系数  $a_n$  及  $b_n$  十分类似.

上面, 我们只是对富里叶积分公式作了一些形式的说明, 还需指出积分公式实际成立的条件. 下面的定理就解决了这一问题.

**定理** 如果定义在整个数轴上的函数  $f(x)$  在任何有限区间上是逐段光滑的, 并且在区间  $(-\infty, \infty)$  上绝对可积, 即积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

是收敛的, 则对任何数轴上的点  $x$ ,  $f(x)$  的富里叶积分必收敛于它在该点的左右极限的平均值, 即

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) dt$$

特别在  $f(x)$  的连续点上, 富里叶积分就收敛于  $f(x)$ , 即富里叶积分公式成立.

这个定理的严格证明, 在此就不给出了.

由欧拉公式  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  知

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix})$$

从而

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda(x-t)} dt \right] d\lambda \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda(x-t)} dt$$

在上式第二个积分中,用  $\lambda$  代替  $-\lambda$ , 就得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos\lambda(x-t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda(x-t)} dt \end{aligned}$$

这是富里叶积分的复数形式. 后文主要用这种形式.

### 11.3.2 富里叶变换

在应用富里叶积分公式解决实际问题时,常把它改写成积分变换的形式. 为此,用  $-\lambda$  代替  $\lambda$ , 把这个积分改写为

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda(t-x)} dt$$

令

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda t} dt \quad (1)$$

则

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda \quad (2)$$

通常把  $F(\lambda)$  称为  $f(x)$  的富里叶变换或象函数; 而  $f(x)$  称为  $F(\lambda)$  的逆变换或象原函数. 由象函数回到象原函数的公式称为富里叶变换的反演公式.

如同富里叶级数一样,奇函数与偶函数的富里叶变换具有比较简单的形式.

若  $f(x)$  是偶函数, 则  $f(x) \sin\lambda x$  是奇函数, 于是有

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos\lambda t + i \sin\lambda t) dt \\ &= 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos\lambda t dt \end{aligned}$$

它称为  $f(x)$  的余弦变换. 由于  $F(\lambda)$  也是  $\lambda$  的偶函数, 因此, 它的逆变换是

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) (\cos\lambda x - i\sin\lambda x) d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(\lambda) \cos\lambda x d\lambda \end{aligned}$$

若  $f(x)$  是奇函数, 则其富里叶变换为

$$F(\lambda) = 2i \int_0^{\infty} f(t) \sin\lambda t dt$$

为避免复数因子  $i$ , 今定义

$$G(\lambda) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \sin\lambda t dt$$

为  $f(x)$  的正弦变换, 与此相对应的逆变换公式为

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\lambda) \sin\lambda x d\lambda$$

余弦变换和正弦变换实际上只利用了  $f(x)$  在区间  $[0, \infty)$  上的函数值, 因此, 对于定义在半无限区间  $[0, \infty)$  上的函数  $f(x)$ , 也可以按照问题的需要作出它的正弦变换或余弦变换.

例 1 求指数衰减函数(图 11.9)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\beta x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (\beta > 0)$$

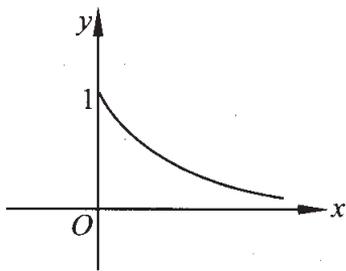


图 11.9

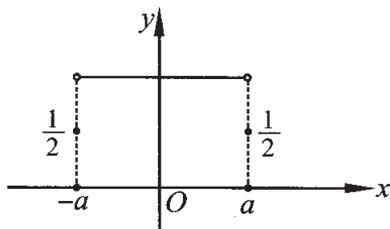


图 11.10

的富里叶变换.

解 由定义

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{(i\lambda - \beta)x} dx \\ &= \frac{1}{\beta - i\lambda} = \frac{\beta + i\lambda}{\beta^2 + \lambda^2} \end{aligned}$$

因  $f(x)$  在点  $x = 0$  不连续, 故依收敛定理, 我们有

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta + i\lambda}{\beta^2 + \lambda^2} e^{-i\lambda x} d\lambda = \begin{cases} f(x), & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

例 2 求分段函数(图 11. 10)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ \frac{1}{2}, & x = \pm a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

的富里叶变换.

解 因  $f(x)$  是偶函数, 所以它的富里叶变换就是余弦变换, 且为

$$F(\lambda) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \lambda t dt = 2 \int_0^a \cos \lambda t dt = \frac{2 \sin \lambda a}{\lambda}$$

又因  $f(x)$  在不连续点  $x = \pm a$  已定义为其左右极限的平均值, 故反演公式在整个数轴上成立, 于是

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2 \sin \lambda a}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda \quad (-\infty < x < +\infty)$$

例 3 求函数  $f(x) = e^{-a|x|}$  ( $a > 0$ ) 的富里叶变换.

解  $f(x)$  是偶函数, 它的富里叶变换是

$$F(\lambda) = 2 \int_0^{\infty} e^{-at} \cos \lambda t dt = \frac{2a}{a^2 + \lambda^2}$$

例 4 求函数  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} (x > 0)$  的正弦变换.

解 把  $f(x)$  开拓到负半轴,使之成为奇函数,即当  $x < 0$  时补充定义

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{-x}}$$

对开拓后的函数求正弦变换得

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \sin \lambda t dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du \end{aligned}$$

由 10.3.3, 已知

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

所以

$$F(\lambda) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\lambda}}$$

此即为所给函数的正弦变换. 同样可得这个函数的余弦变换也是

$$F(\lambda) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\lambda}}$$

细心的读者可能已经注意到,例 4 中的函数  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  不满足收敛定理的条件,但仍可求出它的富里叶变换. 这是因为定理的条件是充分条件,不是必要的. 实际上,收敛定理的条件可放宽为

1° 函数  $f(x)$  在每个有限区间上绝对可积;

2° 存在数  $M > 0$ , 当  $|x| \geq M$  时,  $f(x)$  单调, 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =$

0.

在这个意义下,  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  是满足收敛的条件的.

### 11.3.3 富里叶变换的性质

富里叶变换有一些简单的性质,这些性质对求函数的富里叶变换有直接的意义.为方便起见,用记号 $F[f]$ 表示函数 $f(x)$ 的富里叶变换,即

$$F[f] = F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x} dx$$

1°(线性关系) 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 存在富里叶变换,则对任意常数 $\alpha$ 与 $\beta$ ,函数 $\alpha f(x) + \beta g(x)$ 也存在富里叶变换,且有

$$F[\alpha f + \beta g] = \alpha F[f] + \beta F[g]$$

2°(频移特性) 若函数 $f(x)$ 存在富里叶变换,则对任意的实数 $\lambda_0$ ,函数 $f(x)e^{i\lambda_0 x}$ 也存在富里叶变换,且有

$$F[f(x)e^{i\lambda_0 x}] = F(\lambda + \lambda_0)$$

这两条性质是显然的.

3°(微分关系) 若函数 $f(x)$ 当 $|x| \rightarrow \infty$ 时的极限为零,而微商 $f'(x)$ 的富里叶变换存在,则有

$$F[f'(x)] = -i\lambda F[f(x)]$$

即微商的富里叶变换等于原函数的富里叶变换乘以因子 $-i\lambda$ .

事实上,由分部积分法即得

$$\begin{aligned} F[f'(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{i\lambda x} dx \\ &= f(x)e^{i\lambda x} \Big|_{-\infty}^{\infty} - i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x} dx \\ &= -i\lambda F[f(x)] \end{aligned}$$

一般地,若函数 $f(x)$ 及其前 $(k-1)$ 阶微商当 $|x|$ 趋于无穷大时的极限等于零,而 $k$ 阶微商 $f^{(k)}(x)$ 的富里叶变换存在,则

$$F[f^{(k)}(x)] = (-i\lambda)^k F[f(x)]$$

即 $k$ 阶微商的富里叶变换等于原函数的富里叶变换乘以因子 $(-i\lambda)^k$ .

4°(微分特性) 若函数 $f(x)$ 与 $xf(x)$ 的富里叶变换存在,则

$f(x)$  的富里叶变换是可微的,且有

$$F'(\lambda) = F[ixf(x)]$$

为了说明富里叶变换的另一重要性质,我们引进卷积的概念.

设函数  $f(x)$  与  $g(x)$  在区间  $(-\infty, \infty)$  上绝对可积,则称含参变量的积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt$$

为  $f(x)$  与  $g(x)$  的卷积,记为  $f * g$ ,即

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt$$

这个卷积如同普通乘法一样,满足交换律、结合律和分配律. 即若函数  $f(x), g(x)$  与  $h(x)$  在区间  $(-\infty, \infty)$  上绝对可积,则有

$$f * g = g * f$$

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

$$(f + g) * h = f * h + g * h$$

以结合律为例. 由卷积的定义有

$$\begin{aligned}(f * g) * h &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x-t)h(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t-\tau)g(\tau)d\tau \right) h(t)dt\end{aligned}$$

作代换  $\xi = t + \tau$ , 并交换积分顺序即得

$$\begin{aligned}(f * g) * h &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi) \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi-t)h(t)dt \right) d\xi \\ &= f * (g * h)\end{aligned}$$

5° 设函数  $f(x)$  与  $g(x)$  在区间  $(-\infty, \infty)$  上绝对可积,则卷积  $f * g$  也在区间  $(-\infty, +\infty)$  上绝对可积,且有

$$F[f * g] = F[f]F[g]$$

即卷积的富里叶变换等于各“因子”的富里叶变换的乘积.

**证明** 这里只证后一论断,由定义

$$F[f * g] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt \right] e^{i\lambda x} dx$$

注意到  $f(x)$  与  $g(x)$  的绝对可积性, 可知积分次序是可交换的, 于是得到

$$F[f * g] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) e^{i\lambda x} dx \right] dt$$

作变量代换  $x = t + \xi$ , 就有

$$\begin{aligned} F[f * g] &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\lambda(t+\xi)} d\xi \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{i\lambda t} dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\lambda \xi} d\xi = F[f]F[g] \end{aligned}$$

6°(巴塞瓦尔等式) 设  $f(x)$  可积且平方可积, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda$$

其中,  $F(\lambda)$  是  $f(x)$  的富里叶变换.

证明 令

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(x+t) dt$$

它的富里叶变换为

$$\begin{aligned} F[g] &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{i\lambda x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(x+t) dt \right) e^{i\lambda x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) e^{i\lambda x} dx \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\lambda u} du \right) e^{-i\lambda t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\lambda u} du \\ &= \overline{F(\lambda)} F(\lambda) = |F(\lambda)|^2 \end{aligned}$$

由逆变换公式知

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 e^{-i\lambda x} d\lambda$$

当  $x = 0$  时有

$$\begin{aligned}
 g(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot f(0+t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 e^{-\lambda \cdot 0} d\lambda \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda
 \end{aligned}$$

这个等式不仅建立了  $f(x)$  与  $F[f]$  的联系, 而且有明显的物理意义, 即给出了总能量的谱表示式. 例如, 把  $f(x)$  看成电路中的电压或电流强度, 当电阻为 1 时, 这个电路所消耗的功率就是  $f^2(x)$ , 积分  $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx$  就是总能量, 而  $|F(\lambda)|^2$  为  $f(x)$  的能谱密度, 即频率为  $\lambda$  的谐波能量.

**例** 试由富里变换的性质求正弦衰减函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\beta x} \sin \omega_0 x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (\beta > 0)$$

的富里叶变换.

**解** 由 11.3.2 的例 1 知衰减函数

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\beta x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (\beta > 0)$$

的富里叶变换为

$$F[g(x)] = G(\lambda) = \frac{1}{\beta - i\lambda}$$

而

$$f(x) = g(x) \sin \omega_0 x = -\frac{i}{2} (e^{i\omega_0 x} - e^{-i\omega_0 x}) g(x)$$

根据线性关系和频移特性即得此函数的富里叶变换

$$\begin{aligned}
 F[f] &= -\frac{i}{2} \{F[e^{i\omega_0 x} g(x)] - F[e^{-i\omega_0 x} g(x)]\} \\
 &= -\frac{i}{2} [G(\lambda + \omega_0) - G(\lambda - \omega_0)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{i}{2} \left[ \frac{1}{\beta - i(\lambda + \omega_0)} - \frac{1}{\beta - i(\lambda - \omega_0)} \right] \\
&= \frac{\omega_0}{(\beta - i\lambda)^2 + \omega_0^2}
\end{aligned}$$

这与直接从定义算得的结果完全一致.

### 复习思考题

1. 写出函数  $f(x)$  的富里叶变换及其反演公式.
2. 对比富里叶积分与富里叶级数, 找出它们的关系.

### 习题 11.3

1. 用富里叶积分表示下列函数:

$$(1) f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ kx, & 0 < x < T \\ 0, & x \geq T \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2} \quad (a > 0)$$

2. 求下列函数的富里叶变换.

$$(1) f(x) = xe^{-a|x|} \quad (a > 0)$$

$$(2) f(x) = e^{-a|x|} \cos bx \quad (a > 0)$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

3. 按指定的要求将函数  $f(x) = e^{-x} (0 \leq x < +\infty)$  表示成富里叶积分.

- (1) 用偶性开拓;                      (2) 用奇性开拓.

4. 求函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1 \\ 1, & |x| < 1 \end{cases}$$

的富里叶变换. 由此证明

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha \cos \alpha x}{\alpha} d\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & |x| < 1 \\ \frac{\pi}{4}, & |x| = 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

5. 求函数  $F(\lambda) = \lambda e^{-\beta|\lambda|}$  ( $\beta > 0$ ) 的富里叶逆变换.

## 复 习 题

1. 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - 1)x, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(\pi - x), & 1 < x \leq \pi \end{cases}$$

则  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} \sin nx$ ,  $|x| \leq \pi$ . 求证:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^2 = \frac{\pi - 1}{2}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^4} = \frac{(\pi - 1)^2}{6}$$

2. 将函数  $f(x) = \begin{cases} ax, & -\pi \leq x \leq 0 \\ bx, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$  展成富里叶级数, 并证

明  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$  (其中  $a \neq b, a, b \neq 0$ ).

3. 设  $\varphi(x)$  是  $[0, a]$  上的单调增函数, 证明

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^a \varphi(t) \frac{\sin \lambda t}{t} dt = \frac{\pi}{2} \varphi(0+0)$$

(提示:利用

$$\int_0^a \varphi(t) \frac{\sin \lambda t}{t} dt = \varphi(0+0) \int_0^a \frac{\sin \lambda t}{t} dt \\ + \int_0^a (\varphi(t) - \varphi(0+0)) \frac{\sin \lambda t}{t} dt$$

4. 利用等式

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} = \int_0^x \sum_{k=1}^n \cos kt dt \\ = -\frac{x}{2} + \int_0^x \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin \frac{t}{2}} dt$$

求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$  之和 ( $x \in [-\pi, \pi]$ ).

(提示:利用 3 题)

5. 求函数  $f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leq \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$  的富里叶变换.

6.  $\delta$ -函数定义为

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases}$$

且对任何可积函数  $f(x)$  有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

证明:  $\delta(x)$  的富里叶变换  $F[\delta] = 1$ , 从而

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix} d\lambda$$

## 12 线性微分方程

本章是第 4 章的继续,完成微分方程解的存在唯一性定理及解对初始条件的连续性定理的证明,还要讲述高阶线性微分方程解的结构理论及微分方程组的求解方法.

### 12.1 微分方程解的存在性与唯一性定理

从已经接触到的微分方程中,我们知道,能用初等积分法求出通解的微分方程是极为有限的,但是,科学实验和其它学科不断提出许多微分方程,这些微分方程都带有一定的初始条件.因此,实际上也无必要在求出方程的通解之后再由初始条件定出特解来,而只需求出满足初始条件的某个特解.问题是,所给出的微分方程是否存在满足初始条件的解,这种解是否唯一以及解对所给初始条件是否连续.本节将逐个回答这些问题.

#### 12.1.1 皮卡(Picard) 逐次逼近法,微分方程解的存在性与唯一性定理

设有一阶微分方程

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

及初始条件

$$y(x_0) = y_0$$

假定函数  $f(x, y)$  在以初始点  $(x_0, y_0)$  为中心的矩形区域  $D$

$$|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$$

上连续,且对  $y$  有连续的偏微商  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ . 因而它们有界,即存在

正常数  $M$  和  $K$ , 使在矩形  $D$  上有

$$|f(x, y)| \leq M, \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \leq K.$$

为证明微分方程(1)解的存在性, 我们先指出该初值问题(1)等价于积分方程

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (2)$$

事实上, 若  $y = y(x)$  是(1)的解, 则  $y(x_0) = y_0$ , 且

$$\frac{dy(x)}{dx} \equiv f(x, y(x))$$

将这个恒等式从  $x_0$  到  $x$  积分就有

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

也就是说  $y(x)$  是方程(2)的解. 反之, 若  $y(x)$  满足方程(2), 就有  $y(x_0) = y_0$  及

$$\frac{dy(x)}{dx} \equiv f(x, y(x))$$

即  $y(x)$  也满足方程(1).

利用方程(1)、(2)的等价性, 只需考察方程(2)解的存在性. 为此, 对(2)用皮卡逐次逼近法.

令  $y_0(x) \equiv y_0$  为方程(2)的零次近似, 将其代入方程(2)的右端, 得一次近似

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt$$

再将  $y_1(x)$  代入方程(2)的右端得二次近似

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt$$

依此类推, 当  $y_{n-1}(x)$  定义好后, 可以定义  $n$  次近似

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt$$

在如此定义函数列  $\{y_n(x)\}$  时, 必须注意点  $(x, y_n(x))$  不超出矩形

区域  $D$  的范围. 为此, 只须限制  $x$  的变化范围, 使  $|x - x_0| \leq h$ , 其中

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

事实上, 作了这样的限制后,

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt \right| \\ &\leq M |x - x_0| \leq Mh \leq b \end{aligned}$$

且  $y_1(x)$  显然是连续的. 由归纳法可证得在区间  $[x_0 - h, x_0 + h]$  上,  $y_n(x)$  连续的, 且

$$|y_n(x) - y_0| \leq b \quad (n = 1, 2, \dots)$$

有了这样的逐次近似函数列. 我们可证明微分方程(1) 在区间  $|x - x_0| \leq h$  上是有解的.

**定理 1**(初值问题解的存在性) 设在矩形区域  $D(|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b)$  上, 函数  $f(x, y)$  及其偏微商  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$  都是连续的, 且

$$|f(x, y)| \leq M$$

则在区间  $[x_0 - h, x_0 + h]$  上存在可微函数  $y = y(x)$ , 满足方程

$$y' = f(x, y)$$

及初始条件  $y(x_0) = y_0$ , 其中  $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ .

**证明** 先证明上述构造的函数列  $\{y_n(t)\}$  是收敛的, 再证明其极限函数就是方程(1) 满足初始条件的解.

考虑函数项级数

$$y_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (y_n(x) - y_{n-1}(x))$$

其中  $y_n(x)$  是方程(2) 的解的  $n$  次近似,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

首先, 当  $n = 1$  时, 我们有

$$|y_1(x) - y_0(x)| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt \right| \leq M |x - x_0|$$

由于  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$  在  $D$  上连续, 因而有界, 设  $\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \leq K$ . 当  $n = 2$  时,

$$\begin{aligned}
 & |y_2(x) - y_1(x)| \\
 &= \left| \int_{x_0}^x [f(t, y_1(t)) - f(t, y_0(t))] dt \right| \\
 &\leq \left| \int_{x_0}^x \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y_0 + \theta_1(y_1 - y_0)) \right| \cdot |y_1(t) - y_0(t)| dt \right| \\
 &\hspace{15em} (0 < \theta_1 < 1) \\
 &\leq K \left| \int_{x_0}^x |y_1(t) - y_0(t)| dt \right| \\
 &\leq KM \left| \int_{x_0}^x |t - x_0| dt \right| \\
 &= MK \frac{|x - x_0|^2}{2!}
 \end{aligned}$$

假设当  $n = m$  时, 不等式  $|y_m - y_{m-1}| \leq \frac{MK^{m-1}}{m!} (x - x_0)^m$  成立,

则当  $n = m + 1$  时,

$$\begin{aligned}
 & |y_{m+1}(x) - y_m(x)| \\
 &= \left| \int_{x_0}^x [f(t, y_m(t)) - f(t, y_{m-1}(t))] dt \right| \\
 &\leq \left| \int_{x_0}^x \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y_{m-1} + \theta_m(y_m - y_{m-1})) \right| |y_m(t) - y_{m-1}(t)| dt \right| \\
 &\hspace{15em} (0 < \theta_m < 1) \\
 &\leq \left| \int_{x_0}^x k \cdot \frac{MK^{m-1}}{m!} |t - x_0|^m dt \right| \\
 &= \frac{MK^m}{(m+1)!} |x - x_0|^{m+1}
 \end{aligned}$$

因此, 由归纳知

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{MK^{n-1}}{n!} |x - x_0|^n \leq \frac{MK^{n-1}}{n!} h^n$$

而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{MK^{n-1}}{n!} h^n$  收敛, 所以函数项级数

$$y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (y_n(x) - y_{n-1}(x))$$

在区间  $[x_0 - h, x_0 + h]$  上一致收敛. 设其和函数为  $y(x)$ . 由于  $y_0 + \sum_{k=1}^n [y_k(x) - y_{k-1}(x)] = y_n(x)$ , 因此  $y_n(x)$  在区间  $[x_0 - h, x_0 + h]$  上一致收敛于  $y(x)$ , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y(x)$$

再由  $y_n(x)$  在区间  $[x_0 - h, x_0 + h]$  上的连续性及其  $|y_n(x) - y_0| \leq b$  知,  $y(x)$  也在该区间上连续且  $|y(x) - y_0| \leq b$ .

现在来推证  $y(x)$  是所考虑的初值问题的解. 由于

$$|f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, y(t))| \leq K |y_{n-1}(t) - y(t)|$$

当  $n$  充分大时,  $|y_{n-1}(t) - y(t)|$  可以任意地小 (对任意的  $t \in [x_0 - h, x_0 + h]$ ), 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t, y_{n-1}(t)) = f(t, y(t))$$

对满足不等式  $|t - x_0| \leq h$  的  $t$  一致成立. 于是又得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

在递推公式

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt$$

中, 令  $n \rightarrow \infty$ , 就得到

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

即  $y(x)$  为方程(2)的解, 因而是方程(1)满足初始条件  $y(x_0) = y_0$  的解, 定理得证.

**定理 2** (初值问题解的唯一性) 在定理 1 的假设条件下, 满足初始条件  $y(x_0) = y_0$  的方程(1)的解是唯一的.

**证明** 假设方程(1)有满足初始条件的两个解  $y(x)$  及  $z(x)$ , 则它们都满足方程(2), 即

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, z(t)) dt$$

两式相减得

$$y(x) - z(x) = \int_{x_0}^x [f(t, y(t)) - f(t, z(t))] dt$$

从而

$$|y(x) - z(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y(t)) - f(t, z(t))| dt \right|$$

但是

$$|f(t, y(t)) - f(t, z(t))| \leq K |y(t) - z(t)|$$

所以

$$\begin{aligned} |y(x) - z(x)| &\leq K \left| \int_{x_0}^x |y(t) - z(t)| dt \right| \\ &\leq K \left| \int_{x_0}^x (|y(t) - y_0| + |z(t) - y_0|) dt \right| \\ &\leq K \left| \int_{x_0}^x 2b dt \right| = 2bK |x - x_0| \end{aligned}$$

再将该估计式代入上述不等式的积分中又得进一步的估计式

$$\begin{aligned} |y(x) - z(x)| &\leq K \left| \int_{x_0}^x |y(t) - z(t)| dt \right| \\ &\leq K \cdot 2bK \left| \int_{x_0}^x |t - x_0| dt \right| \\ &= 2bK^2 \frac{|x - x_0|^2}{2!} \end{aligned}$$

如此继续下去,有

$$|y(x) - z(x)| \leq 2bK^n \frac{|x - x_0|^n}{n!}$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 则  $2bK^n \frac{|x - x_0|^n}{n!} \leq \frac{2bK^n a^n}{n!} \rightarrow 0$ . 所以

$$|y(x) - z(x)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

即  $y(x) \equiv z(x)$ , 从而方程(1) 在初始条件  $y(x_0) = y_0$  下的解是唯一的.

注意, 若方程(1) 右端的函数  $f(x, y)$  是  $y$  的线性函数, 即  $f(x, y) = P(x)y + Q(x)$ , 那么容易知道, 在  $P(x), Q(x)$  共同连续的区间  $[\alpha, \beta]$  上, 对任何初值  $(x_0, y_0)$  ( $\alpha \leq x_0 \leq \beta$ ), 解的存在唯一性的结论成立. 事实上, 由于一般的方程满足初始条件的解只能定义在  $|x - x_0| < h$  上, 这是因为逐次近似函数列  $\{y_n(x)\}$  不能超出原来的矩形区域  $D$ , 而现在, 由于右端函数对  $y$  没有任何限制, 上述函数列  $\{y_n(x)\}$  在  $[\alpha, \beta]$  上都有定义并且一致收敛.

例 应用皮卡逐次逼近法求微分方程

$$\begin{cases} y' = x^2 - y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

的解.

解 方程  $y' = x^2 - y$  的右端是  $y$  的线性函数, 而  $x^2$  及  $-1$  在  $x \in (-\infty, \infty)$  中连续, 因此, 方程的解将可定义在整个数轴上, 并且解是唯一的.

令  $y_0 = 0$ , 这是 0 次近似,  $y$  的各次近似如下 ( $n = 1, 2, \dots$ ),

$$y_1(x) = \int_0^x (t^2 - 0) dt = \frac{x^3}{3}$$

$$y_2(x) = \int_0^x \left( t^2 - \frac{t^3}{3} \right) dt = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{3 \cdot 4}$$

$$\begin{aligned} y_3(x) &= \int_0^x \left( t^2 - \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{3 \cdot 4} \right) dt \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^5}{3 \cdot 4 \cdot 5} \end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned} y_n(x) &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^5}{3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots \\ &\quad + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+2}}{3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n+2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\left(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}\right) \\
&= -2 \sum_{k=0}^{n+2} \frac{(-1)^k x^k}{k!} + 2 - \frac{2x}{1!} + \frac{2x^2}{2!}
\end{aligned}$$

于是得

$$\begin{aligned}
y(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) \\
&= -2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} + 2 - 2x + x^2 \\
&= 2 - 2x + x^2 - 2e^{-x}
\end{aligned}$$

这与直接计算所得的解是一致的.

### 12.1.2 欧拉(Euler)折线法

本节要介绍微分方程  $y' = f(x, y)$  满足初始条件  $y(x_0) = y_0$  的另一种近似求解法——欧拉折线法.

设  $y = y(x)$  是微分方程

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

的任意一个解,它在平面  $Oxy$  上所表示的曲线称为方程(1)的一条积分曲线.曲线在点  $M(x, y)$  处的切线的斜率与函数  $f(x, y)$  在该点处的值相等.如果在  $f(x, y)$  的定义域  $D$  内的任一点  $M(x, y)$  处,作一单位长的有向线段,使得它的斜率为值  $f(x, y)$ ,于是就给出了区域  $D$  内的一个向量场,称为由方程(1)确定的向量场.

如果在区域  $D$  内有一条光滑曲线  $C$ ,曲线上每一点的切向量都与向量场在该点的方向一致,那么,这条曲线就是微分方程(1)的一条积分曲线,而曲线的方程  $y = y(x)$  就是方程(1)的一个解.

根据这种几何解释,欧拉提出了用折线近似地求方程(1)在初始条件  $y(x_0) = y_0$  下解的方法,即欧拉折线法.它具有直观简便等优越性.

假定方程(1)在区域  $D$  上的每一点处的解存在唯一,为了在区间  $[x_0, b]$  上作出方程过点  $M_0(x_0, y_0)$  的近似积分曲线,可用分

点

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

把区间  $[x_0, b]$  等分成  $n$  个区间  $[x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, \dots, n$ ), 每个区间的

长  $h = \frac{1}{n}(b - x_0)$ , 称为步度. 以

$M_0(x_0, y_0)$  为起点作一斜率为  $f(x_0, y_0)$  的线段, 它与直线  $x = x_1$  交于点  $M_1(x_1, y_1)$  (图 12.1). 显然

$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)h$$

再以  $M_1(x_1, y_1)$  为起点作一斜率为  $f(x_1, y_1)$  的线段, 它与直线  $x = x_2$  交于点  $M_2(x_2, y_2)$ , 同样

$$y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)h$$

如此继续下去可得  $M_3(x_3, y_3), M_4(x_4, y_4), \dots, M_n(x_n, y_n)$ , 且有

$$y_k - y_{k-1} = f(x_{k-1}, y_{k-1})h \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

这样, 得到一条折线  $M_0M_1 \cdots M_n$ , 它是方程(1)过点  $M_0(x_0, y_0)$  的近似积分曲线. 当步度  $h$  愈小时, 欧拉折线的近似程度就愈好, 可以想到, 当  $h \rightarrow 0$  时, 欧拉折线的极限即为方程(1)满足始初条件  $y(x_0) = y_0$  的积分曲线. 其证明, 这里不再叙述了.

对于  $b < x_0$  的情形, 一样可以有上述分割和关系式

$$y_k - y_{k-1} = f(x_{k-1}, y_{k-1})h$$

不过  $h$  是负数罢了.

### 12.1.3 解的延拓

从 12.1.1 中解的存在唯一性定理中可以看到, 方程

$$y' = f(x, y)$$

满足条件  $y(x_0) = y_0$  的解是局部性的, 特解只在区间  $[x_0 - h, x_0 + h]$  上有定义, 其中  $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ , 而实际上人们总要求解的存在

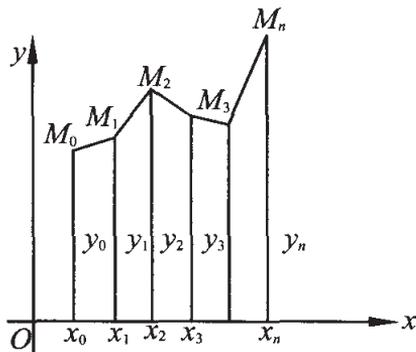


图 12.1

区间尽可能地扩大,这自然引出解的延拓的思想.

假设方程(1)左端的函数  $f(x, y)$  在一有界域  $G$  内连续且有连续的偏微商  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ ,  $y = y(x)$  是方程(1)满足初始条件  $y(x_0) = y_0$  的解,  $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ . 取  $x_1 = x_0 + h, y_1 = y(x_0 + h) = y(x_1)$ .  $(x_1, y_1) \in G$ , 存在以  $(x_1, y_1)$  为中心的矩形  $D_1: |x - x_1| \leq a_1, |y - y_1| \leq b_1, D_1 \subset G$  中. 由解的存在唯一性定理, 存在唯一的函数  $y = y_1(x)$ , 满足  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ , 且  $y_1(x_1) = y_1, x \in [x_1 - h_1, x_1 + h_1]$ .  $h_1 = \min\left(a_1, \frac{b_1}{M_1}\right)$ , 其中  $M_1$  大于  $|f(x, y)|$  在  $D_1$  中的最大值. 再由唯一性定理在  $[x_0, x_0 + h]$  与  $[x_1 - h, x_1]$  的公共部分,  $y_1(x) \equiv y(x)$ . 这样, 就将方程(1)的解延拓到  $[x_0 - h, x_1 + h_1]$  上了. 再令  $x_2 = x_1 + h_1, y_2 = y_1(x_1 + h_1)$ , 又可以取以  $(x_2, y_2)$  为中心的矩形区域  $D_2 \subset G$ , 再将方程(1)的解延拓到  $x_0 - h \leq x_2 + h_2 = x_0 + h + h_1 + h_2$  上, 其中  $h_2 > 0$  为常数. 同样可以在  $x_0 - h$  左方进行延拓.

解的延拓, 用几何直观的语言来讲, 就是在原来的积分曲线  $y = y(x)$  的左右两端各接上一个积分曲线段 (图 12.2).

问题是  $y = y(x)$  同两边延拓的最终情况如何, 答案由解的延拓定理作出.

**解的延拓定理** 如果方程(1)中的函数  $f(x, y)$  在有界区域  $G$  中连续且有连续的偏导数  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ , 那么, 满

足初始条件  $y(x_0) = y_0$  的方程的解  $y = y(x)$  可以延拓, 直到点  $(x, y(x))$  任意接近区域  $G$  的边界.

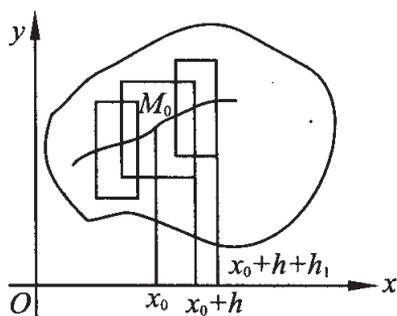


图 12.2

限于篇幅,这个定理本书不加证明.

#### 12.1.4 解对初值的连续性与可微性

在证明微分方程  $y' = f(x, y)$  的满足初始条件  $y(x_0) = y_0$  的解的存在唯一性定理的时候,我们把初值  $(x_0, y_0)$  看作固定的.但是在实际问题中,这些值都是经过测量得到的.在测定数据时,不可避免地会出现误差,这促使我们在考虑初值问题解时,要把初值的变化对解的影响估计在内,实际上,初值问题的解不仅依赖于自变量  $x$ ,还依赖于初值  $(x_0, y_0)$ .因此,微分方程  $y' = f(x, y)$  的解可以看作是三个变量的函数  $y = y(x, x_0, y_0)$ .例如方程

$$y' = y$$

的满足初始条件  $y(x_0) = y_0$  的解为  $y = y_0 e^{x-x_0}$ ,显然是自变量  $x$  及初值  $x_0, y_0$  的函数,并且关于  $x, x_0, y_0$  都是连续和可微的.下面,仅讨论对同一个  $x_0$  所测出的初始值  $y_0(x_0), \bar{y}_0(x_0)$  不同时,解对  $y_0$  的连续性,即若  $|y_0 - \bar{y}_0| < \delta$ ,则所得的解  $y(x)$  及  $\bar{y}(x)$  也有较小的误差

$$|y(x) - \bar{y}(x)| < \delta e^{Kx}$$

**定理 1** 设在区域  $D: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$  上,函数  $f(x, y)$  及  $\frac{\partial f}{\partial y}$  连续,且  $|f(x, y)| \leq M, \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq K, (x_0, \bar{y}_0) \in D, |\bar{y}_0 - y_0| < \delta$ ,则满足初始条件

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = \bar{y}_0 \end{cases}$$

的两个解  $y(x)$  及  $\bar{y}(x)$  的误差不超过  $\delta e^{Kx}$ ,即

$$|y(x) - \bar{y}(x)| \leq \delta e^{Kx}$$

其中  $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ ,  $\delta$  是任给正数.

**证明** 由定理条件知  $y(x)$  及  $\bar{y}(x)$  分别适合方程

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

$$\bar{y}(x) = \bar{y}_0 + \int_{x_0}^x f(t, \bar{y}(t)) dt$$

因此

$$\begin{aligned} & |y(x) - \bar{y}(x)| \\ & \leq |y_0 - \bar{y}_0| + \left| \int_{x_0}^x |f(t, y(t)) - f(t, \bar{y}(t))| dt \right| \\ & = |y_0 - \bar{y}_0| + \int_{x_0}^x \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y + \theta(y - \bar{y})) \right| |y(t) - \bar{y}(t)| dt \\ & \leq |y_0 - \bar{y}_0| + K \int_{x_0}^x |y(t) - \bar{y}(t)| dt \end{aligned}$$

而

$$\max |y(x) - \bar{y}(x)| < \delta + K \left| \int_{x_0}^x \max |y(t) - \bar{y}(t)| dt \right| \quad (*)$$

令  $\eta(x) = \int_{x_0}^x \max |y(t) - \bar{y}(t)| dt$ , 于是

$$\frac{d\eta}{dx} = \max |y(x) - \bar{y}(x)|$$

代入(\*)式得

$$\frac{d\eta}{dx} - K\eta(x) < \delta$$

当  $x > x_0$  时, 上不等式两边同乘因子  $e^{-K(x-x_0)}$ , 就有

$$\frac{d}{dx} (\eta(x) e^{-K(x-x_0)}) < \delta e^{-K(x-x_0)}$$

再同时从  $x_0$  到  $x$  积分得

$$\eta(x) e^{-K(x-x_0)} < \frac{\delta}{K} [1 - e^{-K(x-x_0)}]$$

故  $\eta(x) < \frac{\delta}{K} [e^{K(x-x_0)} - 1]$ . 于是有

$$|y(x) - \bar{y}(x)| < \delta + \delta [e^{K(x-x_0)} - 1] = \delta e^{K(x-x_0)}$$

对  $x \leq x_0$  情形, 同样可得上式.

于是对一切  $|x - x_0| < h$ ,

$$|y(x) - \bar{y}(x)| < \delta e^{K(x-x_0)}$$

成立.

更进一步,有解对初值的连续性、可微性定理,现把它不加证明地叙述如下.

**定理 2** 若函数  $f(x, y)$  和  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  在区域  $G$  内连续,则方程

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

的解  $y = y(x, x_0, y_0)$  作为  $x, x_0, y_0$  的函数在其存在区域内是连续的,且它对  $x, x_0, y_0$  的偏导数也是连续的.

### 习题 12.1

1. 应用逐次逼近法求下列方程满足所给初始条件的解.

(1)  $y' = y + x, \quad y(0) = 0$

(2)  $y' + y = e^x, \quad y(0) = \frac{1}{2}$

2. 求方程  $y' = x + y^2$  满足条件  $y(0) = 0$  的解的逐次逼近  $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ .

3. 用欧拉折线法近似地解微分方程

$$y' = 2x - 0.1y^2$$

取步度  $h = 0.1$ , 且  $y(0) = 0$ , 并求  $y(0.5)$ .

4. 假设函数  $P(x)$  和  $Q(x)$  在区间  $[\alpha, \beta]$  上连续,试证方程

$$y' = P(x)y + Q(x)$$

满足任一初始条件  $y(x_0) = y_0$  ( $\alpha \leq x_0 \leq \beta, a \leq y \leq b$ ) 的解  $y = y(x, x_0, y_0)$  作为  $x, x_0, y_0$  的函数,于区域

$$a \leq x \leq \beta, \alpha \leq x_0 \leq \beta, a \leq y_0 \leq b$$

内存在连续偏导数  $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial x_0}, \frac{\partial y}{\partial y_0}$ , 并写出表达式.

## 12.2 二阶线性微分方程的一般理论

关于未知函数及其导数是线性的  $n$  阶微分方程称为  $n$  阶线性微分方程. 它的形式是

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

如果  $f(x) \equiv 0$ , 则方程称为线性齐次的. 若  $a_0(x)$  在某区间上恒不等于零, 则在该区间上  $n$  阶线性齐次方程变为

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

其中  $P_i(x) = \frac{a_i(x)}{a_0(x)}, i = 1, \cdots, n$ .

在实际问题中最常见的线性方程是二阶的, 它的一般形式是

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

相应的齐次方程是

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

二阶线性方程无论在实际应用中, 还是在理论上都有很重要的意义, 在这一节中, 将对它进行一般的讨论. 如果函数  $p(x), q(x)$  在区间  $I$  上连续, 则对任何初始值  $y(x_0) = \alpha, y'(x_0) = \beta, x_0 \in I$  的邻域内, 初值问题

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ y(x_0) = \alpha, y'(x_0) = \beta \end{cases}$$

经过简单的变换就可以化为等价的一阶方程组的初值问题. 利用皮卡逼近法, 同样可以证明, 它的解存在且唯一. 所以, 在下面的讨论中, 总假定系数函数  $p(x), q(x)$  在某一区间  $(a, b)$  或在整个数轴上是连续的.

我们知道, 一个微分方程总有很多的解, 二阶线性方程也一样有很多解. 这一节中, 将要解决这些解之间的关系, 为此, 首先要寻找满足某些条件的特解. 最常见的一类附加条件就是所谓初值条件: 给方程的解  $y(x)$  及其微商  $y'(x)$  在某个点  $x_0$  上, 例如在  $x_0 =$

0 处取给定的值,即

$$y(0) = \alpha, y'(0) = \beta$$

这个初值问题的物理意义是很明显的. 如果把二阶线性方程看成是质点的振动方程,那么,上述条件就相当于给定在初始时刻质点的位置和速度,而根据这些条件求方程的解就是要确定质点的运动规律.

### 12.2.1 线性齐次方程解的结构

对任意的两个常数  $\alpha$  与  $\beta$ ,后面在微分方程组一节中将说明,线性齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

存在唯一的解  $y = y(x)$  满足初始条件

$$y(x_0) = \alpha, y'(x_0) = \beta$$

如果令  $\alpha, \beta$  取各种不同的值,就可以得到各种不同的解. 对这些解的全体进行深入的考察,找出它们的内在联系,从而得到求解的规律. 下面就逐步地进行叙述.

**定理 1** 设  $y_1(x)$  与  $y_2(x)$  是线性齐次方程(1)的解,  $c_1, c_2$  是任意常数,则  $y_1(x)$  与  $y_2(x)$  的线性组合

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

也是方程(1)的解.

**证明** 将  $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$  代入方程(1)的左端进行验算,并用假设条件得

$$\begin{aligned} & [c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)]'' + p(x)[c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)]' \\ & + q(x)[c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)] \\ & = c_1 [y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)] \\ & \quad + c_2 [y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)] \\ & = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 \\ & = 0 \end{aligned}$$

所以  $y(x)$  是方程(1)的解.

为了从方程(1)的无穷多个解中理出一个头绪来,需要引进函数的线性相关和线性无关的概念.

**定义 1** 设在区间 $(a, b)$ 上给定 $m$ 个函数

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$$

如果存在 $m$ 个不全为零的常数 $c_1, c_2, \dots, c_m$ ,使对于区间 $(a, b)$ 内的一切 $x$ ,都有

$$c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_m\varphi_m(x) \equiv 0$$

则称这 $m$ 个函数在区间 $(a, b)$ 上是线性相关的,否则就称它们在区间 $(a, b)$ 上是线性无关的.

**例 1** 函数组 $1, \cos^2 x, \sin^2 x$ 在整个数轴上是线性相关的. 因为

$$1 + (-1)\cos^2 x + (-1)\sin^2 x \equiv 0$$

即取 $c_1 = 1, c_2 = c_3 = -1$ ,就有上式对任何 $x$ 都成立. 而函数组 $1, \cos x, \sin x$ 在整个数轴上是线性无关的. 因为若有

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x \equiv 0$$

对任意的 $x$ 成立,则分别令 $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ 就得到

$$c_1 + c_2 = 0, c_1 + c_3 = 0, c_1 - c_2 = 0$$

解得 $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ . 因此, $1, \cos x, \sin x$ 不可能线性相关.

**例 2** 证明函数组 $1, x, x^2, \dots, x^n$ 在整个数轴上线性无关.

**证明(反证)** 如果函数组 $1, x, \dots, x^n$ 线性相关,那么一定存在不全为零的数 $c_0, c_1, \dots, c_n$ 使对任意实数 $x$ 有

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n \equiv 0$$

求等式两边的各阶微商得

$$c_1 + 2c_2x + \dots + nc_nx^{n-1} \equiv 0$$

$$2c_2 + \dots + n(n-1)c_nx^{n-2} \equiv 0$$

...

$$n!c_n \equiv 0$$

由此推出 $c_n = 0, c_{n-1} = 0, \dots, c_1 = 0, c_0 = 0$ . 与假设矛盾. 所以函

数组  $1, x, \dots, x^n$  在全数轴上线性无关.

现在考虑区间  $(a, b)$  上的两个线性相关函数  $y_1(x), y_2(x)$ . 存在不全为零的数  $c_1, c_2$  使得

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$$

在区间  $(a, b)$  上恒成立, 将此等式对  $x$  微商又得

$$c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) = 0$$

这两个等式组成关于  $c_1$  和  $c_2$  的线性齐次代数方程组, 并且它有非零解, 所以应有

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \equiv 0$$

这个行列式  $w(x)$  称为函数  $y_1(x)$  与  $y_2(x)$  的朗斯基(Wronski)行列式.

这样, 就得到如下结论.

**定理 2** 如果函数  $y_1(x)$  和  $y_2(x)$  在区间  $(a, b)$  上线性相关, 则它们的朗斯基行列式  $w(x)$  在  $(a, b)$  上恒为零.

必须指出, 定理 2 的逆命题不成立. 举反例如下. 设

$$y_1(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ (x-1)^2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

这两个函数在  $[0, 2]$  上是线性无关的. 因为如果存在两个实数  $c_1, c_2$ , 使得在  $x \in [0, 2]$  上,

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \equiv 0$$

则分别取  $x = \frac{1}{2}$  和  $x = \frac{3}{2}$  就得

$$\frac{1}{4}c_1 = 0 \text{ 和 } \frac{1}{4}c_2 = 0$$

因此  $c_1 = c_2 = 0$ , 观察  $y_1(x)$  与  $y_2(x)$  的朗斯基行列式

$$w(x) = \begin{cases} \begin{vmatrix} (x-1)^2 & 0 \\ 2(x-1) & 0 \end{vmatrix} = 0, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 时} \\ \begin{vmatrix} 0 & (x-1)^2 \\ 0 & 2(x-1) \end{vmatrix} = 0, & \text{当 } 1 \leq x \leq 2 \text{ 时} \end{cases}$$

即在 $[0, 2]$ 上  $w(x) \equiv 0$ .

但是如果  $y_1(x), y_2(x)$  是线性齐次方程的解, 情形就完全不同了. 这时有

**定理 3** 如果函数  $y_1(x)$  与  $y_2(x)$  是线性齐次方程(1)的解, 且它们的朗斯基行列式在区间  $(a, b)$  上恒等于零. 则  $y_1(x)$  与  $y_2(x)$  在  $(a, b)$  上线性相关.

**证明** 在  $(a, b)$  内任取一点  $x_0$ , 因为

$$w(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = 0$$

所以必存在不全为零的数  $c_1$  与  $c_2$ , 使

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) &= 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

考虑函数

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

由定理 1 知,  $y(x)$  也是线性齐次方程(1)的解, 且满足条件

$$y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0$$

另一方面,  $\tilde{y}(x) \equiv 0$  也是方程(1)满足上述条件的解. 由解的唯一性知  $y(x) \equiv \tilde{y}(x) \equiv 0, x \in (a, b)$ . 即

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$$

在  $(a, b)$  上恒成立, 因此,  $y_1(x), y_2(x)$  在  $(a, b)$  上线性相关.

读者可能注意到, 在定理 3 的证明中, 实际只用了  $w(x)$  在一点  $x_0$  的值为零, 但由此却得到了  $w(x)$  在整个区间  $(a, b)$  上恒等于零的结果. 实际上有

**定理 4** 设函数  $y_1(x)$  和  $y_2(x)$  是线性齐次方程(1)的解, 则它们的朗斯基行列式可以表示成

$$w(x) = w(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt}$$

其中  $x_0$  是区间  $(a, b)$  内的一点.

**证明** 因为  $y_1(x)$  与  $y_2(x)$  是方程(1)的解, 所以

$$y_1''(x) = -p(x)y_1'(x) - q(x)y_1(x)$$

$$y_2''(x) = -p(x)y_2'(x) - q(x)y_2(x)$$

由此算得

$$\begin{aligned} & y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x) \\ &= -p(x)[y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)] \\ &= -p(x)w(x) \end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned} \frac{dw(x)}{dx} &= [y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)]' \\ &= y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x) \end{aligned}$$

比较两式, 得到

$$\frac{dw(x)}{dx} = -p(x)w(x)$$

以函数  $e^{\int_{x_0}^x p(t)dt}$  乘上式两端得

$$e^{\int_{x_0}^x p(t)dt} \frac{dw(x)}{dx} + w(x)e^{\int_{x_0}^x p(t)dt} \cdot \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x p(t)dt = 0$$

即

$$\frac{d}{dx} [e^{\int_{x_0}^x p(t)dt} w(x)] = 0$$

可见

$$e^{\int_{x_0}^x p(t)dt} w(x) = c$$

令  $x = x_0$  得  $w(x_0) = c$ , 于是

$$w(x) = w(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt}$$

这就是所要的公式, 称为刘维尔(Liouville)公式.

从刘维尔公式不难看出: 朗斯基行列式  $w(x)$  在区间内的某一点处不为零当且仅当  $w(x)$  在整个区间上恒不为零.

由此又可推得

**定理 5** 若函数  $y_1(x)$  和  $y_2(x)$  是线性齐次方程(1) 的一对线性无关解, 则它们的朗斯基行列式必处处不为零.

**证明(反证)** 若  $y_1(x)$  与  $y_2(x)$  的朗斯基行列式在某点  $x_0$  处为零, 即  $w(x_0) = 0$ , 则对区间内的任意  $x$  有

$$w(x) = w(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt} = 0$$

所以,  $y_1(x), y_2(x)$  线性相关, 矛盾. 从而证明了所要的结论.

设  $y_1(x), y_2(x)$  是线性齐次方程(1) 的一对线性无关解, 则对任意的两个常数  $c_1$  和  $c_2, c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$  也是方程的解, 由  $c_1, c_2$  的任意性,  $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$  就是方程(1) 的通解. 但是一个微分方程的通解不一定是该方程的全部解, 这在第四章中已有例子. 然而, 如果考虑的是线性齐次方程, 情况就不一样了, 它的所有解都包含在通解内.

**定理 6** 设函数  $y_1(x), y_2(x)$  是线性齐次方程(1) 的一对线性无关解, 则方程(1) 的任何一个解必可表示为

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

的形式, 其中  $c_1, c_2$  为独立常数.

**证明** 在  $y_1(x), y_2(x)$  的定义区间内任取一点  $x_0$ , 由函数  $y_1(x)$  与  $y_2(x)$  的线性无关性及定理 5 知

$$w(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

于是方程组

$$\begin{aligned} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) &= y(x_0) \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) &= y'(x_0) \end{aligned}$$

有唯一解(即存在唯一的一对常数)  $c_1, c_2$ , 其中  $y(x)$  是线性齐次方程(1) 的一个解. 而  $\tilde{y}(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$  也是方程(1) 的解, 且满足相同的初始条件:  $\tilde{y}(x_0) = y(x_0), \tilde{y}'(x_0) = y'(x_0)$ , 因此, 依解的唯一性定理

$$y(x) = \tilde{y}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \text{ 且 } \frac{\partial(y, y')}{\partial(c_1, c_2)} = w(x) \neq 0,$$

这就证明了定理.

现在我们已知道, 如果给出了方程(1) 的一对线性无关解, 则方程(1) 的一切解都能求出. 因此, 常把方程(1) 的一对线性无关解称为它的一个基本解组.

求方程(1) 的解关键在于求出它的一个基本解组, 但是, 上面所证明的线性齐次方程(1) 的解的结构定理并未指出基本解组的存在性. 所以还必须证明之.

**定理 7** 线性齐次方程(1) 的基本解组是存在的.

**证明** 任取两组数  $\alpha_1, \beta_1$  和  $\alpha_2, \beta_2$  使其满足

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

那么由下列两个初值问题

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y(x_0) = \alpha_1, y'(x_0) = \beta_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y(x_0) = \alpha_2, y'(x_0) = \beta_2 \end{cases}$$

所得的解  $y_1(x)$  与  $y_2(x)$  就是线性无关的. 因为在点  $x_0$  处有

$$w(x_0) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

于是  $y_1(x)$  与  $y_2(x)$  组成了方程(1) 的一个基本解组.

从定理 7 的证明中看出, 线性齐次方程(1) 的基本解不仅存在, 而且有无穷多组. 然而要求出其一对线性无关解, 却没有一般的公式可循. 虽然如此, 我们仍可以对一些方程进行讨论. 因为如果能用某种方法求出其一个不为零的解时, 就可以用积分的形式求出与该解线性无关的另一个解. 方法如下.

设  $y_1(x)$  是方程(1) 的一个非零解. 根据要求, 必须找到一个函数  $y_2(x)$  与  $y_1(x)$  线性无关, 而且也是方程(1) 的解. 于是由刘

维尔公式应有

$w(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = w(x_0)e^{-\int p(x)dx}$   
 $w(x_0)$  是一非零常数, 设

$$w(x) = w_0 e^{-\int p(x)dx}$$

其中  $w_0$  为任意非零常数, 不妨设为 1. 用  $y_1^2(x)$  除以上式得

$$\frac{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)}{y_1^2} = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx}$$

左端正好是  $\frac{y_2(x)}{y_1(x)}$  的微商, 两边积分得

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)dx}$$

于是就有

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)dx} dx \quad (2)$$

这就用  $y_1(x)$  表达了与之线性无关的另一解  $y_2(x)$ . 此时, 方程(1)的通解为

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)dx} dx$$

**例** 求方程  $xy'' - y' = 0$  的通解.

**解** 容易看出,  $y_1 = 1$  是方程的一个特解. 下面来求它的另一个特解  $y_2$ .

当  $x \neq 0$  时, 方程可写成  $y'' - \frac{1}{x}y' = 0$ .  $p(x) = -\frac{1}{x}$ ,  $q(x) \equiv$

0. 利用公式(2), 可解出

$$y_2(x) = c \int e^{\int \frac{1}{x} dx} dx = \begin{cases} \frac{c}{2} x^2, & x > 0 \\ -\frac{c}{2} x^2, & x < 0 \end{cases}$$

$c$  为任意常数, 在这众多的函数中, 取  $y_2 = x^2$  为原方程的一个特解, 且与  $y_1 = 1$  是线性无关的, 又在  $(-\infty, \infty)$  中有连续的二阶微

商.

综上所述,方程的通解为

$$y = c_1 + c_2 x^2$$

### 12.2.2 线性非齐次方程解的结构

设有线性非齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (1)$$

相应的齐次方程为

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (2)$$

它们之间的解存在着十分密切的关系.

**定理** 如果  $y^*(x)$  是线性非齐次方程(1)的一个特解,  $u(x)$  是相应的线性齐次方程(2)的任一解,则函数  $u(x) + y^*(x)$  也是方程(1)的解;反之,方程(1)的任一解  $z(x)$  一定可以表示成

$$z(x) = u(x) + y^*(x)$$

这种形式.

**证明** 由定理所设条件,  $y^*(x)$  满足方程(1),  $u(x)$  满足方程(2),即

$$y^{*''} + p(x)y^{*'} + q(x)y^* = f(x)$$

及

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = 0$$

于是

$$\begin{aligned} & [u(x) + y^*(x)]'' + p(x)[u(x) + y^*(x)]' + q(x)[u(x) + y^*(x)] \\ &= (u'' + p(x)u' + q(x)u) + (y^{*''} + p(x)y^{*'} + q(x)y^*) \\ &= 0 + f(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

所以  $u(x) + y^*(x)$  是方程(1)的解.

反之,如果  $z(x)$  是方程(1)的一个解,则令  $u(x) = z(x) - y^*(x)$ ,有

$$u'' + p(x)u' + q(x)u$$

$$\begin{aligned}
&= (z(x) - y^*(x))'' + p(x)(z(x) - y^*(x))' \\
&\quad + q(x)(z(x) - y^*(x)) \\
&= z'' + p(x)z' + q(x)z - (y^{*''} + p(x)y^{*'} + q(x)y^*) \\
&= f(x) - f(x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

这就证明了  $z(x) = u(x) + y^*(x)$ , 而  $u(x)$  是齐次方程(2)的解.

由定理可知, 如果  $y^*(x)$  是方程(1)的一个特解,  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  是相应的齐次方程(2)的一对线性无关解, 则通解

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y^*(x)$$

就表示了线性非齐次方程(2)的一切解. 可见求方程(1)的解归结到求它的一个特解. 这可用常数变易法来解决.

在齐次方程(2)的通解  $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$  中, 将常数  $c_1$ ,  $c_2$  换成  $x$  的待定函数  $c_1(x)$  和  $c_2(x)$ , 即假设非齐次方程(1)有形如

$$y^*(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

的特解, 再根据所设条件求出函数  $c_1(x)$  和  $c_2(x)$ . 求  $y^*$  的一阶微商得

$$y^{*'}(x) = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x) + c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2$$

为了在继续求微商时不出现待定函数  $c_1(x)$  和  $c_2(x)$  的高阶微商, 我们令

$$c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0 \quad (3)$$

算作是对  $c_1(x)$  与  $c_2(x)$  的一个限制条件. 如此得到

$$y^{*'}(x) = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)$$

再求一次微商得

$$y^{*''}(x) = c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x) + c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x)$$

将  $y^*(x)$ 、 $y^{*'}(x)$  及  $y^{*''}(x)$  代入方程(1)的左端得

$$\begin{aligned}
&c_1(x)(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) \\
&+ c_2(x)(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) \\
&+ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x)
\end{aligned}$$

因为  $y_1, y_2$  是方程(2)的解, 于是有

$$c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x) \quad (4)$$

将(3)、(4)联列, 利用  $y_1(x)$  与  $y_2(x)$  的朗斯基行列式  $w(x) \neq 0$  这一条件, 就可解得

$$c_1'(x) = -\frac{y_2(x)f(x)}{w(x)}, c_2'(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{w(x)}$$

积分后得

$$c_1(x) = -\int_{x_0}^x \frac{y_2(t)f(t)}{w(t)} dt, c_2(x) = \int_{x_0}^x \frac{y_1(t)f(t)}{w(t)} dt$$

从而得到非齐次方程(1)的一个特解

$$y^*(x) = \int_{x_0}^x \frac{y_1(t)y_2(x) - y_2(t)y_1(x)}{w(t)} f(t) dt$$

综上所述可见, 欲求非齐次方程(1)的解, 应先设法求出相应的齐次方程(2)的一个特解  $y_1(x)$ , 再配上一个与它线性无关的特解  $y_2(x)$ , 从而得到齐次方程的通解  $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ . 然后应用常数变易法求出非齐次方程(1)的一个特解  $y^*(x)$ . 最后得方程(1)的通解为

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y^*(x)$$

**例** 求方程  $xy'' - y' = x^2$  满足初始条件  $y(1) = 1, y'(1) = 1$  的特解.

**解** 上一节中, 我们已得到相应的齐次方程的通解  $y = c_1 + c_2x^2$ . 用  $c_1(x), c_2(x)$  代替常数  $c_1, c_2$ , 设方程有特解

$$y^* = c_1(x) + c_2(x)x^2$$

按常数变易法的程序可得待定函数  $c_1(x)$  与  $c_2(x)$  满足的方程组

$$\begin{cases} c_1'(x) + c_2'(x)x^2 = 0 \\ c_2'(x) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

由此解得

$$c_1(x) = -\frac{x^3}{6}, c_2(x) = \frac{x}{2}$$

故所给方程的特解为  $y^* = \frac{x^3}{3}$ , 从而其通解为

$$y = c_1 + c_2 x^2 + \frac{x^3}{3}$$

再由初始条件得  $c_1$  与  $c_2$  所满足的方程组

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \frac{1}{3} = 1 \\ 2c_2 + 1 = 1 \end{cases}$$

求得  $c_1 = \frac{2}{3}$ ,  $c_2 = 0$ . 从而方程满足初始条件的特解为

$$y = \frac{2+x^3}{3}$$

### 12.2.3 应用幂级数求解方程

这个方法是把求微分方程的解, 转化为解代数方程或代数方程组. 例如, 求  $y'' - xy = 0$  的解. 设它有多项式形式的解为  $y = \sum_{k=0}^m b_k x^{m-k}$ , 故  $y''$  是  $m-2$  次多项式, 而  $xy$  是  $m+1$  次多项式. 代入微分方程后, 不管如何选择系数  $b_k$ , 其中  $m-2$  与  $m+1$  次的两项是无法对消的. 为了克服这种高、低次项不能对消的问题, 只有采用幂级数才行. 故这无非是求多项式解的推广而已, 并可证明如下定理.

**柯西定理** 设  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  的系数  $p(x), q(x)$

在  $|x| < R$  内可表示为  $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k, q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^k$ , 其中  $R$  是  $p(x)$  与  $q(x)$  的幂级数的最小收敛半径. 则当  $|x| < R$  时, 初值问题:

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y(0) = \alpha, y'(0) = \beta \end{cases}$$

存在唯一解  $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ , 其中  $a_k (k=0, 1, 2, \dots)$  由初始值  $\alpha, \beta$  决定.

$\beta$  确定.

由于二阶线性方程的通解中包含两个独立的任意常数. 为此可用幂级数解法, 求出两个线性无关的特解  $y_1(x)$  与  $y_2(x)$ , 它们分别满足初始问题:

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

故得到此二阶线性方程的通解为  $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ , 这样求得的幂级数解, 只要系数  $p(x)$  与  $q(x)$  满足柯西定理的条件, 就一定收敛且唯一.

**例 1** 求亚里 (Airy) 方程  $y'' - xy = 0$  的幂级数解.

**解** 因  $p(x) = 0, q(x) = -x$ , 故符合柯西定理条件.

设有  $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ , 故  $y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2}$ , 代入原方程, 得

$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = 0$ . 分别在左端第一项中令  $n = k - 2$ , 故  $k = n + 2$ ; 在第二项中令  $n = k + 1$ , 故  $k = n - 1$ , 就有

$$2 \cdot 1 a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}] x^n = 0$$

比较上述等式两端  $x$  的同次幂的系数得到

$$2a_2 = 0, (n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1} = 0, n \geq 1$$

或有  $a_2 = 0, a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}, n \geq 1$

若设  $a_0 = 1, a_1 = 0$ , 则有

$$a_2 = 0, a_3 = \frac{1}{2 \cdot 3},$$

$$a_4 = a_5 = 0, a_6 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1 \cdot 4}{6!},$$

...

$$a_{3k+1} = a_{3k+2} = 0, a_{3k} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2) \cdots}{(3k)!} \cdots$$

于是级数

$$y_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)}{(3k)!} x^{3k}$$

为方程的一个特解.

若设  $a_0 = 0, a_1 = 1$ , 则又得方程的另一级数解

$$y_2 = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3k-1)}{(3k+1)!} x^{3k+1}$$

又因为

$$w(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$y_1$  与  $y_2$  在整个数轴上线性无关且级数对任意  $x$  收敛. 所以亚里方  
程的通解为

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

**例 2** 求解方程  $(1-x^2)y'' - xy' + a^2 y = 0$ , 其中  $a$  是实常数.

**解**  $x \neq \pm 1$  时, 方程化为标准式

$$y'' - \frac{x}{1-x^2} y' + \frac{a^2}{1-x^2} y = 0$$

$p(x) = \frac{x}{1-x^2}, q(x) = \frac{a^2}{1-x^2}$  在  $(-1, 1)$  可表为幂级数. 故方程  
有幂级数形式的解. 设解为

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

故得

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}$$

在  $(-1, 1)$  内代入原方程, 这时与标准型等价, 故有

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a^2 a_k x^k = 0$$

在上述等式的左端第一项中令  $n = k - 2$ , 其余各项令  $n = k$ , 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + (a^2 - n^2)a_n]x^n = 0$$

从而得关系式  $(n+2)(n+1)a_{n+2} + (a^2 - n^2)a_n = 0$ , 或

$$a_{n+2} = -\frac{a^2 - n^2}{(n+2)(n+1)}a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

若设  $a_0 = 1, a_1 = 0$ , 就有

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a^2 (a^2 - 4) \cdots [a^2 - 4(k-1)^2]}{(2k)!}$$

$$a_{2k+1} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

因此得到方程的一个特解

$$y_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{a^2 (a^2 - 4) \cdots [a^2 - 4(k-1)^2]}{(2k)!} x^{2k}$$

若设  $a_0 = 0, a_1 = 1$ , 同样得方程的另一个特解

$$y_2 = x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(a^2 - 1)(a^2 - 9) \cdots [a^2 - (4k-1)^2]}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

它与  $y_1$  是线性无关的, 且这两个级数在区间  $(-1, 1)$  上收敛. 所以方程在  $(-1, 1)$  上的通解为

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

一般地, 如果方程的系数  $p(x)$  与  $q(x)$  在  $x=0$  的邻域内不能展开成  $x$  的幂级数, 但  $xp(x)$  与  $x^2q(x)$  在这个邻域内都可展开成  $x$  的幂级数, 这时可设方程有广义形式的幂级数解

$$y = x^\lambda (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots) = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \text{ 且 } a_0 \neq 0.$$

将其代入方程中, 利用恒等式, 定出指数  $\lambda$  及级数的各项系数  $a_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

**例 3** 求解方程  $x^2 y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$ , 其中  $v$  是实常数.

**解** 这是有名的  $v$  阶贝塞尔(Bessel)方程. 因为  $xp(x) = 1$ ,  $x^2q(x) = x^2 - v^2$  都是多项式, 所以方程可以有广义幂级数解. 令

$$y = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, a_0 \neq 0$$

为了确定指数  $\lambda$  及各项系数  $a_n$ , 使该级数成为所给方程的解, 进行计算得

$$-v^2 y = - \sum_{n=0}^{\infty} v^2 a_n x^{n+\lambda}$$

$$x^2 y = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+\lambda}$$

$$xy' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) a_n x^{n+\lambda}$$

$$x^2 y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) a_n x^{n+\lambda}$$

把它们代入到贝塞尔方程中, 合并同类项得

$$\begin{aligned} & (\lambda^2 - v^2) a_0 x^\lambda + [(\lambda+1)^2 - v^2] a_1 x^{\lambda+1} \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \{[(\lambda+n)^2 - v^2] + a_{n-2}\} x^{\lambda+n} = 0 \end{aligned}$$

$x$  的各次幂的系数都应为零, 即有

$$(\lambda^2 - v^2) a_0 = 0$$

$$[(\lambda+1)^2 - v^2] a_1 = 0$$

$$[(\lambda+2)^2 - v^2] a_2 + a_0 = 0$$

$$[(\lambda+3)^2 - v^2] a_3 + a_1 = 0$$

...

$$[(\lambda+n)^2 - v^2] a_n + a_{n-2} = 0$$

...

$a_0 \neq 0$ , 从第一式得  $\lambda^2 - v^2 = 0$ , 它称为指数方程. 由此定理  $\lambda = \pm v$ . 先设  $\lambda = v$ , 再从第二式得

$$a_1 = 0$$

从第四式得

$$a_3 = 0$$

由递推公式  $a_n = -\frac{a_{n-2}}{(\lambda+n)^2 - \nu^2}$  ( $n > 2$ ) 归纳可得

$$a_{2k+1} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

再从其它各式推出

$$a_2 = \frac{-1}{2^2(\nu+1)}a_0$$

$$a_4 = \frac{1}{2^4(\nu+1)(\nu+2)2!}a_0$$

...

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)k!}a_0$$

...

应用  $\Gamma$  函数的性质

$$\Gamma(\nu+k+1) = (\nu+k)(\nu+k-1)\cdots(\nu+1)\Gamma(\nu+1)$$

$$\Gamma(k+1) = k!$$

上述的  $a_{2k}$  可表示为

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k \Gamma(\nu+1)}{2^{2k} \Gamma(\nu+k+1) \Gamma(k+1)} a_0$$

若取  $a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$ , 则有

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{\Gamma(\nu+k+1) \Gamma(k+1)} \frac{1}{2^{2k+\nu}}$$

于是对应于  $\lambda = \nu$ , 就得贝塞尔方程的一个广义幂级数解

$$y_1 = J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(\nu+k+1) \Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

容易知道, 该级数对任意实数  $x$  都收敛. 因而它的和函数  $J_\nu(x)$  就确定在整个数轴上, 并称为第一类贝塞尔函数.

再设  $\lambda = -\nu$ , 同样可得贝塞尔方程的另一个广义幂级数解为

$$y_2 = J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(-\nu+k+1) \Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}$$

当  $\nu$  不是整数时,  $y_1$  与  $y_2$  是线性无关的. 于是它们的线性组合就



$$(4) y'' - y' \tan x + 2y = 0$$

5. 求线性齐次方程

$$(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1 - x)y = 0 \quad (x \neq 0, 2)$$

满足初始条件  $y(1) = 0, y'(1) = 1$  的特解.

6. 求下列非齐次方程的通解:

$$(1) x^2 y'' - xy' = 3x^3 \quad (x \neq 0)$$

$$(2) (x - 1)y'' - xy' + y = (x - 1)^2 \quad (x \neq 1)$$

$$(3) y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y = e^{-x^2}$$

$$(4) y'' + k^2 y = f(x)$$

7. 已知方程

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$$

的两个特解  $y_1 = x, y_2 = x^2$ , 试求方程的通解.

8. 已知方程  $(1 + x^2)y'' + 2xy' - 6x^2 - 2 = 0$  的一个特解  $y = x^2$ , 试求方程满足初始条件  $y(-1) = 0, y'(-1) = 0$  的特解.

9. 利用幂级数求下列方程的通解:

$$(1) y'' + xy' + y = 0$$

$$(2) y'' - e^x y = 0$$

$$(3) xy'' - (1 + x)y' + y = 0 \quad (x \neq 0)$$

## 12.3 二阶常系数线性微分方程

一般说来,二阶线性微分方程的解是由一些非初等函数所构成,而且没有普遍的求解方法.但是,对于系数为常数的线性方程,其求解问题可以很容易地解决.

### 12.3.1 常系数线性齐次方程

设  $p, q$  为两个实常数,称方程

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (1)$$

为二阶常系数线性齐次方程.下面来求这个方程的通解.先假设方

程(1)有指数形式  $e^{kx}$  的特解,将它代入方程(1)后得

$$(k^2 + pk + q)e^{kx} \equiv 0$$

$e^{kx} \neq 0$ ,所以应有

$$k^2 + pk + q = 0 \quad (2)$$

这是方程(1)的解中  $k$  应满足的二次代数方程,它称为线性齐次方程(1)的特征方程.因而,若  $k$  是特征方程(2)的一个根,则  $e^{kx}$  就是方程(1)的一个解.这样一来,微分方程(1)的求解问题,就变成代数方程(2)的求解问题.下面就方程(2)的根的各种情况来求方程(1)的通解.

1. 如果特征方程(2)有相异的两实根  $k_1$  与  $k_2$ ,则可得方程(1)的两个特解

$$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}$$

它们的朗斯基行列式  $w(x) = (k_2 - k_1)e^{(k_1+k_2)x} \neq 0$ .所以,它们是方程(1)的一组基础解系.从而方程(1)的通解为

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$$

2. 如果方程(2)具有相同的实根  $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$ ,这时,  $y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}$  就是方程(1)的一个特解.再由此利用刘维尔公式求出另一个与之线性无关的特解

$$y_2 = e^{-\frac{p}{2}x} \int \frac{1}{(e^{-\frac{p}{2}x})^2} e^{-\int p dx} dx = x e^{-\frac{p}{2}x}$$

所以,在这种情况下,方程(1)的通解为

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{-\frac{p}{2}x}$$

3. 如果特征方程(2)有一对共轭的复根  $k_1 = \alpha + i\beta$  及  $k_2 = \alpha - i\beta$ ,这时方程(1)有一对线性无关的复值解

$$y_1 = e^{k_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x}, y_2 = e^{k_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x}$$

由欧拉公式,可以写成

$$y_1 = e^{\alpha x} (\cos\beta x + i\sin\beta x), y_2 = e^{\alpha x} (\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

再由 12.2.1 中的定理 1 知

$$\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{ax} \cos \beta x$$

及

$$\frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{ax} \sin \beta x$$

也是方程(1)的解,且它们的朗斯基行列式  $w(x) = \beta e^{2ax} \neq 0$ . 所以它们是线性无关的,也是方程(1)的基础解系. 这时方程(1)的通解为

$$y = e^{ax} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

例 1 求方程  $y'' - 3y' + 2y = 0$  的通解.

解 特征方程为

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

它有两个不等的实根  $k_1 = 1, k_2 = 2$ . 故该方程的通解为

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

例 2 求方程  $y'' + 6y' + 9y = 0$  的通解.

解 特征方程为

$$k^2 + 6k + 9 = 0$$

它有相同的根  $k_1 = k_2 = -3$ . 所给方程的通解为

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{-3x}$$

例 3 求方程  $y'' + y' + y = 0$  的通解.

解 特征方程为

$$k^2 + k + 1 = 0$$

它有一对共轭的复根

$$k_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, k_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

所以,方程的通解为

$$y = e^{-\frac{x}{2}} \left( c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$$

### 12.3.2 常系数线性非齐次方程

在 12.2.2 中已经指出,线性非齐次方程的一个特解可以通过

相应的齐次方程的通解用常数变易法求得. 当然, 这些计算通常是很繁琐的, 而且必须经过积分计算, 但是, 若常系数线性非齐次方程

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (1)$$

中的函数  $f(x)$  具有某些特殊形式时, 可用代数的方法求出方程 (1) 的一个特解. 这些形式是

$$1^\circ f(x) = \varphi(x)e^{\alpha x}$$

$$2^\circ f(x) = \varphi(x)e^{\alpha x} \cos \beta x \text{ 或 } f(x) = \varphi(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$$

其中  $\varphi(x)$  是  $m$  次多项式,  $\alpha, \beta$  是实常数. 它们又都可以统一地写成

$$f(x) = \varphi(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$$

这样的形式. 事实上, 形式  $1^\circ$  即为  $\beta = 0$  的特殊情形, 形式  $2^\circ$  恰是它的实部或虚部. 因此, 可一般地讨论

$$f(x) = \varphi(x)e^{\lambda x}$$

的情形. 其中  $\lambda$  为复数.

假设方程 (1) 有形如

$$y = e^{\lambda x} z(x)$$

的特解, 然后再确定  $z(x)$ . 由于

$$y' = e^{\lambda x} (z' + \lambda z)$$

$$y'' = e^{\lambda x} (z'' + 2\lambda z' + \lambda^2 z)$$

代入方程 (1) 得

$$e^{\lambda x} [z'' + (2\lambda + p)z' + (\lambda^2 + p\lambda + q)z] = \varphi(x)e^{\lambda x}$$

消去  $e^{\lambda x}$ , 并记  $\lambda^2 + p\lambda + q = l(\lambda)$ , 于是  $2\lambda + p = l'(\lambda)$ , 上式可写成

$$z'' + l'(\lambda)z' + l(\lambda)z = \varphi(x) \quad (2)$$

1. 如果  $\lambda$  不是特征方程的根, 则可令  $z(x)$  是与  $\varphi(x)$  同次的多项式, 即若

$$\varphi(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_n$$

则可取

$$z(x) = Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m$$

将它代入方程(2), (2)的两端都是  $x$  的  $m$  次多项式. 比较两边同次项的系数, 就可以定出系数  $b_0, b_1, \cdots, b_m$ . 从而求出  $z(x)$  (称为待定系数法), 乘以  $e^{\lambda x}$ , 就得到方程(1)的一个特解了.

2. 如果  $\lambda$  是特征方程的一个单根, 则  $l(\lambda) = 0$ , 但  $l'(\lambda) \neq 0$ . 于是有

$$z'' + l'(\lambda)z' = \varphi(x)$$

为使等式两边  $x$  的幂次相等, 当设  $z(x)$  是比  $\varphi(x)$  高一次的多项式. 为简单起见, 可取  $z(x) = xQ(x)$ , 代入方程(2), 就可以确定出  $z(x)$  各次的系数.

3. 如果特征方程有重根, 且  $\lambda$  正好等于这重根. 此时即有  $l(\lambda) = 0, l'(\lambda) = 0$  ( $\lambda = -\frac{p}{2}$ ). 方程(2)变成  $z'' = \varphi(x)$ . 这时  $z(x)$  应是比较  $\varphi(x)$  高二次的多项式. 于是可设  $z = x^2Q(x)$ , 然后代入方程(2), 得出  $Q(x)$  的各项系数, 从而求出  $z(x)$ .

由此求得的解若是复值函数, 则可分离它的实部与虚部, 将  $f(x) = \varphi(x)e^{\lambda x}$  也分离为实部与虚部, 就可以得到  $f(x) = \varphi(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$  或  $f(x) = \varphi(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$  的方程(1)的特解. 这是因为如果  $y = u(x) + iv(x)$  是方程

$$y'' + py' + qy = A(x) + iB(x)$$

的复值解, 其中  $p, q$  为实常数,  $A(x), B(x)$  是实值函数, 则  $u(x)$  和  $v(x)$  就分别是方程

$$y'' + py' + qy = A(x) \tag{3}$$

及方程

$$y'' + py' + qy = B(x) \tag{4}$$

的解.

事实上, 将  $y = u(x) + iv(x)$  代入  $y'' + py' + qy$  中就有

$$(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) \equiv A(x) + iB(x)$$

于是

$$u'' + pu' + qu \equiv A(x), v'' + pv' + qv \equiv B(x)$$

即  $u(x), v(x)$  分别是方程(3) 和方程(4) 的解.

**例 1** 求方程  $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}$  的通解.

**解** 由 12.3.1 的例 1 知, 对应的齐次方程的通解是  $c_1e^x + c_2e^{2x}$ ,  $f(x) = xe^{2x}$  中指数的系数  $\lambda = 2$  是特征方程的单根. 故令

$$z(x) = x(b_0x + b_1)$$

将  $z(x)$  代入方程(2) 得

$$2b_0 + (2b_0x + b_1) = x$$

由此解得  $b_0 = \frac{1}{2}, b_1 = -1$ . 于是  $y^* = \frac{x}{2}(x-2)e^{2x}$  是方程的一个特解. 而其通解为

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + \frac{x}{2}(x-2)e^{2x}$$

**例 2** 求方程  $y'' - y = 4x\sin x$  的通解.

**解** 特征方程为

$$k^2 - 1 = 0$$

其根为  $k = \pm 1$ , 故相应的齐次方程的通解为  $c_1e^x + c_2e^{-x}$ . 为求非齐次方程的特解. 考虑方程

$$y'' - y = 4xe^{ix}$$

由于  $i$  不是特征方程的根. 故可令

$$z(x) = b_0x + b_1$$

代入方程(2) 得

$$2ib_0 - 2(b_0x + b_1) = 4x$$

于是得出  $b_0 = -2, b_1 = -2i$ . 所以方程

$$y'' - y = 4xe^{ix}$$

有一个特解为

$$\begin{aligned} y^* &= -2(x+i)e^{ix} \\ &= -2x\cos x - \sin x + i(-2\cos x - 2x\sin x) \end{aligned}$$

其虚部  $-2\cos x - 2x\sin x$  就是原方程的特解, 因此原方程的通解

为

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 2(\cos x + x \sin x)$$

在求非齐次方程的特解时,注意到下述事实是有益的.

若函数  $y_1(x)$  与  $y_2(x)$  分别是线性非齐次方程

$$y'' + py' + q = f_1(x)$$

与

$$y'' + py' + q = f_2(x)$$

的一个特解,则函数  $y_1(x) + y_2(x)$  就是线性非齐次方程

$$y'' + py' + q = f_1(x) + f_2(x)$$

的一个特解.

例 3 求方程

$$y'' + y' - 2y = (x-2)e^{5x} + (x^3 - 2x + 3)e^{-x}$$

的通解.

解 因为特征方程  $k^2 + k - 2 = 0$  的根为  $k_1 = -2$  及  $k_2 = 1$ , 所以相应的齐次方程的通解为  $c_1 e^{-2x} + c_2 e^x$ . 方程右边的函数  $f$  写成两个函数  $f_1$  及  $f_2$  之和, 其中  $f_1 = (x-2)e^{5x}$ ,  $f_2 = (x^3 - 2x + 3)e^{-x}$ . 所以将要求解的方程分成两个方程来考虑

$$y'' + y' - 2y = (x-2)e^{5x}$$

$$y'' + y' - 2y = (x^3 - 2x + 3)e^{-x}$$

先求第一个方程的特解.  $\lambda = 5$  不是特征方程的根. 可设  $z_1(x) = b_0 x + b_1$ , 代入方程(2) 得

$$11b_0 + 28(b_0 x + b_1) = x - 2$$

由此给出  $b_0 = \frac{1}{28}$ ,  $b_1 = -\frac{67}{784}$ , 于是有特解

$$y_1^* = \left( \frac{1}{28}x - \frac{67}{784} \right) e^{5x}$$

再求第二个方程的特解.  $\lambda = -1$  也不是特征方程的根, 可设  $z_2(x) = c_0 x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$ , 代入方程(2) 得

$$6c_0 x + 2c_1 - (3c_0 x^2 + 2c_1 x + c_2)$$

$$-2(c_0x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3) = x^3 - 2x + 3$$

定出系数  $c_0 = -\frac{1}{2}$ ,  $c_1 = \frac{3}{4}$ ,  $c_2 = -\frac{5}{4}$ ,  $c_3 = -\frac{1}{8}$ , 于是得到一个特解

$$y_2^* = \left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{8}\right)e^{-x}$$

$y_1^* + y_2^*$  就构成原方程的一个特解, 从而所给方程的通解是

$$y = c_1e^{-2x} + c_1e^x + \left(\frac{1}{28}x - \frac{67}{784}\right)e^{5x} \\ + \left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{8}\right)e^{-x}$$

### 12.3.3 欧拉(Euler) 方程

形如

$$x^2y'' + pxy' + qy = f(x)$$

的变系数线性方程称为欧拉方程, 其中  $p, q$  是常数. 通过一个自变量的变量代换, 可以将欧拉方程化为常系数方程. 事实上, 当  $x > 0$  时, 令

$$x = e^t \text{ 或 } t = \ln x$$

引入新的自变量  $t$ . 因为

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \\ y'' = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \right) = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x} \frac{d^2y}{dt^2} \frac{dt}{dx} \\ = \frac{1}{x^2} \left( \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$$

代入欧拉方程后, 变成

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (p-1) \frac{dy}{dt} + qy = f(e^t)$$

这是一个以  $t$  为自变量的常系数线性方程. 求出它的解后, 再以  $\ln x$  替代  $t$ , 就是欧拉方程的解了. 当  $x < 0$ , 作变换  $x = -e^t$  或  $t =$

$\ln(-x)$ , 以引进新的自变量  $t$ , 方程变成

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (p-1) \frac{dy}{dt} + qy = f(-e^t)$$

同样是一个常系数线性方程. 求出它的解后, 再以  $\ln(-x)$  取代  $t$ ; 就得原方程在  $x < 0$  时的解.

**例 1** 求方程  $x^2 y'' - xy' + y = 0$  的解.

**解** 这是一个欧拉方程.  $x > 0$  时, 令  $x = e^t$ , 则  $t = \ln x$ . 这使原方程变成

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} + y = 0 \quad (1)$$

特征方程  $k^2 - 2k + 1 = 0$  有重根  $k = 1$ , 所以方程(1)的通解为

$$y = (c_1 + c_2 t)e^t$$

再代之以  $t = \ln x$  得所给欧拉方程在  $x > 0$  上的通解为

$$y = (c_1 + c_2 \ln x)x$$

当  $x < 0$  时, 作变换  $x = -e^t$ , 从而  $t = \ln(-x)$  同样可得欧拉方程在  $x < 0$  上的通解为

$$y = (-x)[c_1 + c_2 \ln(-x)]$$

把两式合起来. 得欧拉方程的通解( $x \neq 0$ )是

$$y = |x| (c_1 + c_2 \ln |x|)$$

**例 2** 解方程  $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 2x \ln x + x - 2$  ( $x > 0$ ).

**解** 这是一个欧拉方程. 因为  $x > 0$ , 所以作变换  $x = e^t$ , 就将方程变成

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = 2te^t + e^t - 2$$

为常系数线性方程. 它的特征方程  $k^2 + k - 2 = 0$  有两个不同的根  $k_1 = 1, k_2 = -2$ . 所以相应的齐次方程有通解  $c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$ . 为求方程的一个特解, 可以把它分成两个方程考虑

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = (2t + 1)e^t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = -2$$

前一个方程右边的指数系数 1 是特征方程的单根, 于是可设方程有形如

$$y_1^* = t(b_0t + b_1)e^t$$

的特解, 代入方程后, 可确定  $b_0 = \frac{1}{3}, b_1 = \frac{1}{9}$ . 所以

$$y_1^* = \left(\frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{9}t\right)e^t$$

后一方程显然有  $y_2^* = 1$  的特解. 于是, 上述非齐次方程有特解

$$y^* = y_1^* + y_2^* = \left(\frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{9}t\right)e^t + 1$$

通解为

$$y = c_1e^t + c_2e^{-2t} + \left(\frac{t^2}{3} + \frac{t}{9}\right)e^t + 1$$

再以  $t = \ln x$  代入, 就得原方程的通解

$$y = c_1x + \frac{c_2}{x^2} + \left(\frac{1}{3}\ln^2x + \frac{1}{9}\ln x\right)x + 1 \quad (x > 0)$$

### 习题 12.3

1. 求下列常系数齐次方程的通解:

$$(1) y'' - 2y' - y = 0$$

$$(2) 4y'' - 8y' + 5y = 0$$

$$(3) y'' - y' + y = 0$$

$$(4) y'' - 2y' + y = 0$$

$$(5) y'' + y' - 6y = 0$$

$$(6) y'' + \lambda y' + y = 0 (\lambda \text{ 为实数})$$

2. 解下列初值问题:

$$(1) \begin{cases} s''(t) + 2s'(t) + 5s(t) = 0 \\ s(0) = 1, s'(0) = 1 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} s''(t) - 4s'(t) + 3s(t) = 0 \\ s(0) = 6, s'(0) = 10 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} y'' + 4y' + 29y = 0 \\ y|_{n=0} = 0, y'|_{n=0} = 15 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 4y'' + 4y' + y = 0 \\ y|_{n=0} = 2, y'|_{n=0} = 0 \end{cases}$$

3. 求下列常系数非齐次方程的一个特解:

$$(1) y'' + y = 3\sin \frac{x}{2}$$

$$(2) y'' - 6y' + 9y = (x+1)e^{2x}$$

$$(3) y'' - 3y' + 2y = e^x(3-4x)$$

$$(4) y'' - 3y' + 2y = 2e^x \cos \frac{x}{2}$$

$$(5) y'' + y = \cos x$$

$$(6) y'' - 2y' + y = 2e^{-x} + 3e^x$$

$$(7) y'' + 4y = x \sin x$$

$$(8) y'' + y' - 12y = x^2 e^x$$

$$(9) y'' + 2y' + y = x^2 \cos x$$

$$(10) 2y'' + 5y' = \cos^2 x$$

$$(11) y'' + y = x e^x \cos x$$

$$(12) y'' + y = \cos x \cos 2x$$

4. 解下列齐次欧拉方程(设  $x \neq 0$ ):

$$(1) x^2 y'' + 3xy' + 5y = 0$$

$$(2) x^2 y'' - xy' + y = 0$$

$$(3) x^2 y'' - 9xy' + 21y = 0$$

$$(4) \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2} R = 0 \quad (r > 0)$$

5. 解下列非齐次欧拉方程(设  $x \neq 0$ ):

$$(1) x^2 y'' - xy' = 3x^3$$

$$(2) x^2 y'' - xy' + 2y = x \ln x \quad (x > 0)$$

$$(3) x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2x^3 - x$$

$$(4) (1+x)^2 y'' + (1+x)y' + y = 4\cos[\ln(1+x)] \\ x+1 > 0$$

## 12.4 质点的振动

### 12.4.1 自由简谐振动

作为二阶常系数线性方程的重要应用,我们先来考察质点的自由简谐振动.

如图 12.3,一弹簧的左端固定,右端系有质量为  $m$  的质点  $M$ ,其平衡时的位置取为坐标原点.现设质点沿着  $x$  轴运动,在时刻  $t$  的位移为  $x = x(t)$ ,它所受的弹性力  $f_1$  与位移  $x$  成正比,且指向平衡位置,故有

$$f_1 = -bx$$

其中  $b$  大于零称为弹性系数.由牛顿第二运动定律可得质点  $M$  的运动方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -bx$$

或写成

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

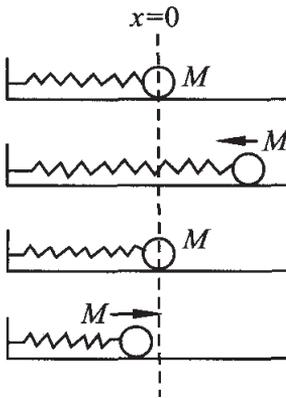


图 12.3

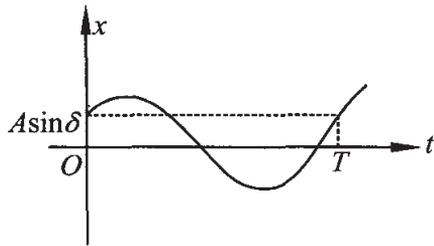


图 12.4

其中  $\omega^2 = \frac{b}{m}$ . 这是一个常系数线性齐次方程. 因为特征方程  $k^2 + \omega^2 = 0$  的根是一对共轭的虚数  $k = \pm i\omega$ , 所以它的通解是

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$$

若令

$$\sqrt{c_1^2 + c_2^2} = A$$

$$\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \sin \delta, \quad \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \cos \delta$$

则通解又可写成

$$x = A \sin(\omega t + \delta)$$

其中  $A$  称为质点振动的振幅,  $\delta$  称为初相, 它们可由初始位移  $x(0) = x_0$ , 初始速度  $x'(0) = v_0$  确定; 而  $\omega$  称固有频率.

由此可见, 质点运动时, 它与原点的距离是随时间  $t$  按正弦规律而周期变化, 即质点作简谐振动. 振动的周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{b}}$$

图 12.4 是振动的波形.

#### 12.4.2 自由阻尼振动

除弹性力外, 如果质点还受有阻力, 且阻力  $f_2$  与质点运动的速度  $\frac{dx}{dt}$  成正比, 其方向与速度相反, 即

$$f_2 = -a \frac{dx}{dt}$$

其中  $a$  称为阻尼系数. 这时质点的运动方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -a \frac{dx}{dt} - bx$$

或写成

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \alpha^2 x = 0$$

其中  $\beta = \frac{a}{2m}, \alpha^2 = \frac{b}{m}$ . 它即是质点的阻尼运动方程. 这个方程仍是常系数线性齐次方程, 其特征方程  $k^2 + 2\beta k + \alpha^2 = 0$  的两个根是

$$k_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}, k_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$$

如果  $0 < \beta < \alpha$ , 则  $k_1$  与  $k_2$  是一对共轭复数

$$k_1 = -\beta + i\omega, k_2 = -\beta - i\omega$$

其中  $\omega = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ . 从而阻尼运动方程的通解就是

$$x = e^{-\beta t} (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t)$$

或令

$$\sqrt{c_1^2 + c_2^2} = A$$

$$\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \sin \delta, \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \cos \delta$$

这通解又可写成

$$x = Ae^{-\beta t} \sin(\omega t + \delta)$$

式中  $Ae^{-\beta t}$  称为质点振动的振幅,  $\delta$  称为振动的初相,  $\omega$  称为振动的固有频率.

因为当  $t$  趋向无穷时, 振幅  $Ae^{-\beta t}$  趋向于零. 由此推知, 在阻力较小 ( $\beta < \alpha$ ) 时, 质点是在作周期的衰减振动. 即随着时间的无限推后, 质点来回振动多次, 就回到原来的平衡位置. 其波形如图 12.5.

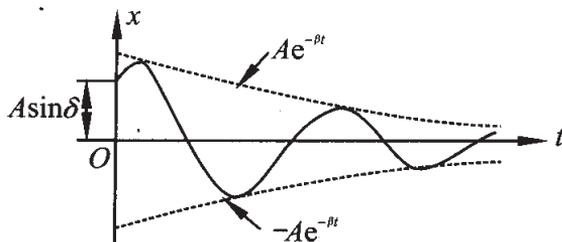


图 12.5

如果  $\beta > \alpha$ , 则  $k_1$  与  $k_2$  是相异的负实数, 从而上述阻尼运动方程的解是

$$x = c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t}$$

因为当  $t$  趋向无穷时,  $x$  单调趋于零, 所以在阻力较大 ( $\beta > \alpha$ ) 的情形下, 随着时间  $t$  的无限推后, 质点应渐趋于平衡位置而不发生振动. 它称为大阻尼运动.

如果  $\beta = \alpha$ , 则  $k_1$  与  $k_2$  是相等的两个负实数, 即  $k_1 = k_2 = -\beta < 0$ , 方程的通解是

$$x = e^{-\beta t} (c_1 + c_2 t)$$

它与大阻尼运动类似, 随着时间  $t$  的无限推后, 质点也渐趋于平衡位置而不振动, 称为临界阻尼运动.

图 12.6 画出了在相同初始条件下, 大阻尼运动与临界阻尼运动的波形.

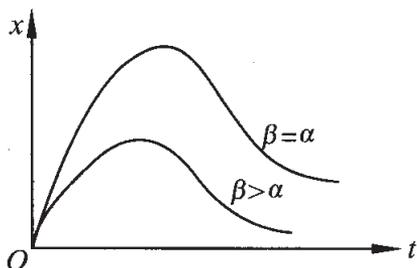


图 12.6

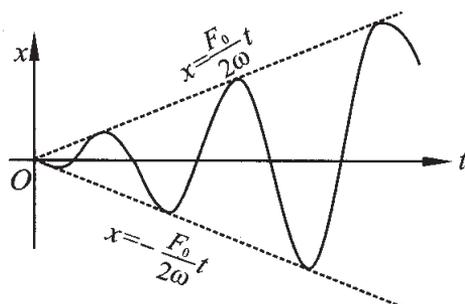


图 12.7

从上面的分析可以得出结论: 当阻尼存在时, 线性齐次方程所描写的自由振动, 将随着时间的无限推后而逐渐消失.

### 12.4.3 无阻尼的强迫振动

现在进而考虑在无阻尼的条件下, 作用在质点  $M$  上的力除弹性力  $f_1$  外, 还有一周期外力

$$f_3 = F \sin pt$$

称为强迫力, 其中  $F$  为常数. 这时质点的运动方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -bx + F \sin pt$$

或令  $\omega^2 = \frac{b}{m}$ ,  $F_0 = \frac{F}{m}$ , 这个方程又可写成

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \sin pt$$

它是常系数线性非齐次方程. 其对应的齐次方程的通解是  $A \sin(\omega t + \delta)$ . 为求其特解, 作辅助方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 e^{ipt}$$

如果  $p \neq \omega$ , 可取特解具有形式  $x = B e^{ipt}$ , 代入方程后求得

$$B = \frac{F_0}{\omega^2 - p^2}$$

于是辅助方程的特解是

$$\frac{F_0}{\omega^2 - p^2} e^{ipt} = \frac{F_0}{\omega^2 - p^2} (\cos pt + i \sin pt)$$

从中取出虚部  $\frac{F_0}{\omega^2 - p^2} \sin pt$ , 即是原方程的特解而其它所有的解就可表为

$$x = A \sin(\omega t + \delta) + \frac{F_0}{\omega^2 - p^2} \sin pt$$

由此可见, 质点的运动是由角频率为  $\omega$  的自由振动与角频率为  $p$  的强迫振动相合而成的. 后者是由外加的周期力而引起的, 当外力的频率  $p$  与系统的固有频率  $\omega$  相差很小时, 它的振幅  $\left| \frac{F_0}{\omega^2 - p^2} \right|$  可以变得很大.

如果  $p = \omega$ , 这时辅助方程的特解应具有形式  $x = B_1 t e^{i\omega t}$ , 代入方程求得

$$B_1 = \frac{F_0}{2i\omega}$$

于是辅助方程的特解是

$$\frac{F_0}{2i\omega} t e^{i\omega t} = \frac{F_0}{2\omega} t (\sin\omega t - i\cos\omega t)$$

从中取出虚部  $-\frac{F_0}{2\omega} t \cos\omega t$  即是原方程的一个特解, 而其它所有的解就可表为

$$x = A \sin(\omega t + \delta) - \frac{F_0}{2\omega} t \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

可见强迫振动的振幅随时间  $t$  的推后而无限增大, 并可超过任意预先给定的限度(图 12.7), 这就发生了共振现象. 共振现象在现实世界中是常能遇到的. 从事建筑工程的人都知道要避免它, 这就要使外加周期力的角频率  $p$  不要接近振动系统的固有频率  $\omega$ ; 而从事电子技术的人, 则常利用它, 这就要使  $p = \omega$  或  $p$  十分接近  $\omega$ .

#### 12.4.4 有阻尼的强迫振动

最后再来考虑质点振动的一般情形, 即质点在振动时受有弹性力  $f_1 = -bx$ , 阻力  $f_2 = -a \frac{dx}{dt}$  与强迫力  $f_3 = F \sin pt$  作用的情形. 这时质点的运动方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -a \frac{dx}{dt} - bx + F \sin pt$$

或令  $\beta = \frac{a}{2m}$ ,  $\alpha^2 = \frac{b}{m}$ ,  $F_0 = \frac{F}{m}$ , 这个方程又可写为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \alpha^2 x = F_0 \sin pt$$

它是一个常系数线性非齐次方程. 当  $0 < \beta < \alpha$  时, 对应的齐次方程的通解为  $Ae^{-\beta t} \sin(\omega t + \delta)$ , 其中频率  $\omega = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ . 为求非齐次方程的特解可作辅助方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \alpha^2 x = F_0 e^{ipt}$$

由于右端指数的系数  $ip$  不是特征方程的根,故可设方程有形如  $x = Be^{ipt}$  的特解. 代入方程求得

$$B = \frac{F_0}{\alpha^2 - p^2 + 2p\beta i}$$

于是辅助方程的一个特解是

$$\frac{F_0}{\alpha^2 - p^2 + 2p\beta i} e^{ipt}$$

从中取出虚部可得原方程的一个特解为

$$-\frac{2\beta p F_0}{(\alpha^2 - p^2)^2 + 4\beta^2 p^2} \cos pt + \frac{(\alpha^2 - p^2) F_0}{(\alpha^2 - p^2)^2 + 4\beta^2 p^2} \sin pt$$

$$= E \sin(pt + \gamma)$$

其中

$$E = \frac{F_0}{\sqrt{(\alpha^2 - p^2)^2 + 4\beta^2 p^2}}, \gamma = \arctan \frac{2\beta p}{p^2 - \alpha^2}$$

而原方程的通解就可表示为

$$x = Ae^{-\beta t} \sin(\omega t + \delta) + E \sin(pt + \gamma)$$

由于当  $t$  趋向无穷时,  $Ae^{-\beta t}$  趋向于零, 所以随着时间的推后, 固有振动对  $x(t)$  的影响就越来越弱, 于是整个振动就化成了强迫的简谐振动

$$x \approx E \sin(pt + \gamma)$$

它的频率与外加力的频率相同, 其振幅  $E$  是

$$E = \frac{F_0}{\sqrt{(\alpha^2 - p^2)^2 + 4\beta^2 p^2}}$$

由此可见, 当阻力很小, 且强迫力的频率  $p$  接近于振动系统的固有频率  $\omega \approx \alpha$  时, 强迫振动的振幅  $E$  也有可能很大而发生共振. 通常根据  $E$  与

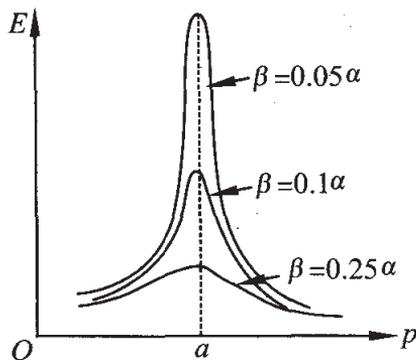


图 12.8

强迫力的频率  $p$  之函数关系所绘制的图形称为共振曲线. 图 12.8 画出对应于不同阻尼的这种曲线. 从中可见, 当阻尼系数越小时, 共振曲线在  $p = \alpha$  的邻近越陡峭地达到最大值.

当  $\beta \geq \alpha$  时, 具有阻尼的强迫振动方程的解分别为

$$x = c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t} + E \sin(pt + \gamma) \quad (\beta > \alpha)$$

或

$$x = (c_1 + c_2 t) e^{k t} + E \sin(pt + \gamma) \quad (\beta = \alpha)$$

其中

$$k_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}, k_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$$

$$k = -\beta, E = \frac{F_0}{\sqrt{(\alpha^2 - p^2)^2 + 4\beta^2 p^2}}$$

而  $c_1, c_2$  是任意常数. 由此可见, 在长时间后, 质点的运动也只决定于最后一项强迫振动. 但与小阻尼的情形不同, 即使  $p$  与  $\alpha$  相差很小, 它的最大振幅不会超过  $\frac{F_0}{2\beta p}$ , 故不发生共振.

#### 习题 12.4

1. 在光滑的水平面上有一单位质量的质点与一水平弹簧(弹性系数  $k = 9$ ) 的一端相联, 弹簧的另一端固定. 设质点在周期性外力  $f(t) = 3\sin 3t$  的作用下由静止开始沿水平轴运动, 运动开始时弹簧没有伸缩. 如果所有阻力忽略不计.

(i) 写出质点运动的微分方程;

(ii) 求质点的运动规律;

(iii) 讨论质点的运动状态.

2. 一长为  $l$  米, 质量为  $m$  米的单摆作简谐振动, 假定其摆动偏角很小(即  $\sin\theta \approx \theta$ ), 试求其运动方程.

3. 一质点开始在距地球中心为  $a$  的地方, 并以初速  $v_0$  向地心运动, 问此质点在重力作用下而移动距离  $s$  时其速度如何?(假定在真空中进行).

## 12.5 $n$ 阶线性微分方程

我们已经详细地考察了二阶线性微分方程,建立了解的结构理论,指出了一些方程求通解的方法,所有这一切都可以不作实质上的改变而推广到  $n$  阶线性方程上去. 为此,这里不再作细致的推导,只把主要结果叙述如下.

### 12.5.1 $n$ 阶线性方程解的结构

**定理 1** 如果函数  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  是线性齐次方程

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = 0 \quad (1)$$

的  $n$  个线性无关解,  $c_1, c_2, \dots, c_n$  是  $n$  个任意常数, 则函数

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

也是这个方程的解. 反之, 方程(1)的任意一个解  $y(x)$  必可表示为

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

这种形式.

由此可见, 齐次方程(1)的通解  $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$  表达了它的一切解.

**定理 2** 设  $y^*(x)$  是线性非齐次方程

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x) \quad (2)$$

的一个特解, 而  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  是相应的齐次方程的  $n$  个线性无关解, 则对任意常数  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , 通解

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) + y^*(x)$$

就表达了该线性非齐次方程的一切解.

因此, 欲求  $n$  阶线性方程(2)的通解, 应先求出相应的齐次方程(1)的  $n$  个线性无关解, 然后再找出方程(2)的一个特解, 问题就解决了. 与二阶性方程一样, 非齐次方程的一个特解可以对相应的齐次方程的通解用常数变易法求出. 所以, 求解的关键是求出  $n$

个线性无关解. 这个问题没有一定的规律可循. 但当方程的系数是常数时, 与二阶线性方程一样, 求解问题可化为代数方程的求解.

### 12.5.2 $n$ 阶常系数线性方程的求解

设

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_n y = 0 \quad (1)$$

是  $n$  阶常系数线性齐次方程,  $p_1, p_2, \cdots, p_n$  是实常数. 若令  $y = e^{kx}$ , 代入方程, 可得到代数方程

$$k^n + p_1 k^{n-1} + \cdots + p_n = 0 \quad (2)$$

因此, 当  $k$  是方程(2)的一个根时,  $e^{kx}$  就是微分方程(1)的一个特解.

方程(2)称为常系数线性齐次方程(1)的特征方程.

如果特征方程(2)有  $n$  个相异的实根  $k_1, k_2, \cdots, k_n$ , 则

$$e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \cdots, e^{k_n x}$$

为方程(1)的  $n$  个线性无关解.

如果特征方程有实重根, 则相应于每个  $r$  重根  $k$ , 方程(1)有  $r$  个线性无关解

$$e^{kx}, x e^{kx}, \cdots, x^{r-1} e^{kx}$$

如果特征方程有共轭复单根, 则相应于每对共轭复根  $k = \alpha + i\beta$  及  $\bar{k} = \alpha - i\beta$ , 方程(1)有二个线性无关解

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x$$

如果特征方程有共轭复重根, 则相应于每对  $r$  重共轭复根  $k = \alpha + i\beta$  及  $\bar{k} = \alpha - i\beta$ , 方程(1)有  $2r$  个线性无关解

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, \cdots, x^{r-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \cdots, x^{r-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

特征方程的不相等的根, 所对应的上述形式的微分方程的解是线性无关的.

**例 1** 求解方程  $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ .

**解** 特征方程  $k^4 + 2k^2 + 1 = 0$  有二重共轭复根  $i$  及  $-i$ , 因

此所求方程有线性无关解

$$\cos x, x \cos x, \sin x, x \sin x$$

方程的通解为

$$y = (c_1 + c_2 x) \cos x + (c_3 + c_4 x) \sin x$$

例2 求方程  $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = 0$  满足初始条件  $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0$  的解.

解 特征方程  $k^3 + 4k^2 + 5k + 2 = 0$  有单根  $-2$ , 二重根  $-1$ , 因此微分方程有线性无关解

$$e^{-2x}, e^{-x}, xe^{-x}$$

通解为

$$y = c_1 e^{-2x} + (c_2 + c_3 x) e^{-x}$$

微商后得

$$y' = -2c_1 e^{-2x} + (c_3 - c_2 - c_3 x) e^{-x}$$

$$y'' = 4c_1 e^{-2x} + (c_2 - 2c_3 + c_3 x) e^{-x}$$

令其满足初始条件得

$$c_1 + c_2 = 0$$

$$-2c_1 - c_2 + c_3 = 1$$

$$4c_1 + c_2 - 2c_3 = 0$$

解之得  $c_1 = 2, c_2 = -2, c_3 = 3$ , 故所求方程满足初始条件的解为

$$y = 2e^{-2x} - (2 - 3x)e^{-x}$$

对于一般的常系数线性非齐次方程, 在求出其相应的齐次方程的通解后, 可以用常数变易法求其一个特解. 但如果非齐次方程右端的函数  $f(x)$  具有特殊形式时, 那么方程的特解也只要用待定系数法就可以求出. 其方法与二阶微分方程时完全一样.

设有  $n$  阶常系数线性非齐次方程

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = \varphi(x) e^{\rho x} \quad (3)$$

其中,  $p_1, p_2, \cdots, p_n$  为实常数,  $\rho$  为复常数, 而  $\varphi(x)$  是  $m$  次多项式.

如果  $\rho$  不是其相应的齐次方程之特征的根, 则可令方程(3)有形如

$$y^*(x) = Q(x)e^{\alpha x}$$

的特解,  $Q(x)$  也是  $m$  次多项式  $Q(x) = x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m$ , 将其微商  $n$  次, 代入方程(3), 可以定出系数  $a_1, a_2, \cdots, a_m$ .

如果  $\rho$  是相应的齐次方程的特征方程之  $r$  重根, 则令方程(3)有形如

$$y^* = x^r Q(x)e^{\alpha x}$$

的特解,  $Q(x)$  是与  $\varphi(x)$  同次的多项式, 设为

$$x^r Q(x) = x^r (x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m)$$

代入方程后, 可以定出各项系数  $a_1, \cdots, a_m$ .

**例 3** 求解方程  $y^{(4)} + 2y'' + y = 9\sin 2x$ .

**解** 相应的齐次方程就是例 1, 它的通解为  $(c_1 + c_2x)\cos x + (c_3 + c_4x)\sin x$ .

为求方程的一个特解, 考虑辅助方程

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 9e^{i2x}$$

由于  $2i$  不是特征方程的根, 设它的特解为  $ae^{i2x}$ . 代入方程得  $a = 1$ , 即  $\cos 2x + i\sin 2x$  为辅助方程的特解, 其虚部  $\sin 2x$  即为原方程的一个特解.

所以, 方程的解为

$$y = (c_1 + c_2x)\cos x + (c_3 + c_4x)\sin x + \sin 2x$$

### 习题 12.5

1. 求下列常系数齐次方程的通解:

$$(1) y''' + 9y' = 0 \qquad (2) y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

$$(3) y^{(4)} - 13y'' + 36y = 0 \qquad (4) y^{(4)} = 16y$$

$$(5) y^{(4)} + 2y''' + y'' = 0 \qquad (6) y^{(4)} + y = 0$$

2. 求下列常系数非齐次方程的一个特解:

$$(1) y''' + y'' + y' + 3y = 2\cos x$$

$$(2) y''' + y'' + 4y' + 4y = \cos 2x$$

$$(3) y''' - 2y' + 4y = e^x \cos x$$

$$(4) y^{(4)} - 2y''' + y'' = x$$

$$(5) y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 16(e^{-2x} + e^{2x})$$

3. 解下列欧拉方程:

$$(1) x^3 y''' + 3x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$$

$$(2) x^3 y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = x^3 + 3x$$

## 12.6 微分方程组

### 12.6.1 一般概念

在实际问题中, 不仅遇到含有一个未知函数的微分方程, 而且也会遇到含有几个未知函数的微分方程组.

**例 1** (两体问题) 一行星  $P$  在万有引力的作用下绕太阳运行. 若行星的质量为  $m$ , 太阳的质量为  $M$ , 试确定行星的运行规律.

**解** 选取以日心为坐标原点的参考系  $Oxyz$  (图 12.9), 并设在时刻  $t$  行星  $P$  的位置向量为  $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}$ , 则依牛顿第二定律推得行星的运动方程为

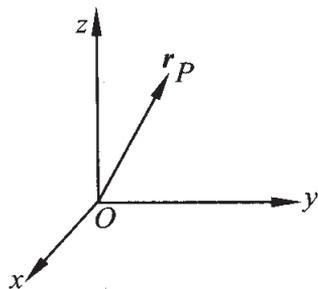


图 12.9

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -k \frac{mM}{r^3} \mathbf{r}$$

其中  $k > 0$  是引力常数. 将这个向量方程投影到三个坐标轴上就有

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \frac{mMx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -k \frac{mMy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -k \frac{mMz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

这是一个含有三个未知函数  $x(t), y(t), z(t)$  的微分方程组. 为确定行星的运行规律就必须解这组方程.

例 2 设微分方程组为

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{du}{dx} - v = 0 \\ \frac{dv}{dx} + v - u = 0 \end{cases}$$

其中  $u, v$  是未知函数,  $x$  是自变量.

例 3 设微分方程组为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z \\ \frac{dy}{dt} = z + x \\ \frac{dz}{dt} = x + y \end{cases}$$

其中  $x, y, z$  是未知函数,  $t$  是自变量.

从以上三例子可以看出, 在每个微分方程组中, 方程的个数与未知函数的个数总是相同的, 而各个未知函数之微商的最高阶数可以不相同. 为对微分方程组的研究规范化, 通常引进新的未知函数, 使得在新的微分方程组中, 各个未知函数之最高阶微商都是一阶的. 例如, 在例 1 中若令

$$\dot{x} = u, \dot{y} = v, \dot{z} = w$$

以引进新的未知函数  $u, v, w$ , 则描述行星运动的微分方程组就可以化成具有六个未知函数  $x, y, z, u, v, w$  的等价微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \dot{y} = v, \dot{z} = w \\ m\dot{u} = -k \frac{mMx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ m\dot{v} = -k \frac{mMy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ m\dot{w} = -k \frac{mMz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

其中字母上方的圆点表示对时间  $t$  的微商. 又如, 在例 2 中, 若令

$$\frac{du}{dx} = w$$

作为新的未知函数, 则它就可以化成具有三个未知函数  $u, v, w$  之新的等价微分方程组

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = w \\ \frac{dv}{dx} = u - v \\ \frac{dw}{dx} = w + v \end{cases}$$

这样一来, 我们就只须考虑如下形式的一阶微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (1)$$

其中  $y_1, y_2, \dots, y_n$  是  $n$  个未知函数,  $x$  是自变量. 如果存在一可微函数组

$$y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$$

把它代入到这组方程后, 就使各方程都变成恒等式, 即

$$\varphi_i'(x) = f_i(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

则函数组  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$  称为方程组(1)的解.

一般说来,微分方程组(1)也总是存在许多解,但通常考虑的只是满足某些附加条件的解.例如要求方程组(1)的解  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  在某个点上取特定的值  $y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$ ,即要求

$$y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0} \quad (2)$$

这样一个求满足特定条件的解的问题称为方程组(1)的初值问题.而条件(2)称为初始条件.利用皮卡逐次逼近法同样可以证明方程组的初值问题的解存在并且是唯一的.

**定理 1** 设在区域  $D$

$$\begin{aligned} |x - x_0| \leq a, |y_1 - y_{10}| \leq b, |y_2 - y_{20}| \leq b, \\ \dots, |y_n - y_{n0}| \leq b \end{aligned}$$

上,函数  $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$  及其偏微商  $\frac{\partial f_i}{\partial y_j} (i, j = 1, 2, \dots, n)$  都是连续的,且

$$|f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)| \leq M$$

则在区间  $|x - x_0| \leq h$  上存在唯一的可微函数组

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$$

满足方程组(1)及初始条件(2),其中  $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ .

如果在方程组(1)中,右端  $f_i$  关于未知函数  $y_1, y_2, \dots, y_n$  都是线性的,就称它为一阶线性微分方程组.于是这个线性方程组的一般形式应为

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n + \varphi_1(x) \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n + \varphi_2(x) \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nm}(x)y_n + \varphi_n(x) \end{cases}$$

如果函数  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$  都恒等于零,则线性方程组就称

为是齐次的, 否则称为是非齐次的. 如果未知函数的系数都是常数, 线性方程组就称为是常系数的.

对于线性微分方程组, 可以证明, 解的存在区间与系数  $a_{ij}(x)$  及  $\varphi_i(x)$  连续的区间一致.

**定理 2** 设在含点  $x_0$  的某一区间  $(\alpha, \beta)$  上, 函数  $a_{ij}(x)$ ,  $\varphi_i(x) (i, j = 1, 2, \dots, n)$  连续, 则在该区间上, 线性微分方程组(1) 有唯一的一组解

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$$

满足初始条件(2).

下面主要论述微分方程组的求解方法, 并对线性微分方程组解的结构理论作一些简单的介绍.

### 12.6.2 消元升阶法

现在先来一般地考虑一阶微分方程组与高阶微分方程之间的关系.

设给定  $n$  阶微分方程

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

令  $y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y'', \dots, y_n = y^{(n-1)}$  引进新的未知函数. 不难看出, 这个方程就等价于一阶方程组

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = y_3 \\ \dots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n \\ \frac{dy_n}{dx} = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

其中  $y_1, y_2, \dots, y_n$  是自变量  $x$  的  $n$  个未知函数. 反之, 一阶方程组通过消元也可化成只含一个未知函数的高阶方程. 事实上, 假设方

程组

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

的右端  $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$  对各变数都有直到  $n-1$  阶的偏微商. 微分其中例如第一方程, 根据复合函数的微分法得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dx^2} &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \frac{dy_2}{dx} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \frac{dy_n}{dx} \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} f_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} f_n \end{aligned}$$

因右端仍是变量  $x, y_1, y_2, \dots, y_n$  的函数, 故可以把它记成  $F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ , 于是

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

再对这个等式微分得

$$\frac{d^3 y_1}{dx^3} = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} f_2 + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial y_n} f_n$$

以  $F_3(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$  表示其右端又有

$$\frac{d^3 y_1}{dx^3} = F_3(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

如此继续微分  $n-2$  次可得

$$\frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} = F_{n-1}(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

再微分这个等式一次给出

$$\begin{aligned} \frac{d^n y_n}{dx^n} &= \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x} f_1 + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_2} f_2 + \dots + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n} f_n + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x} \\ &= F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned}$$

如果从方程组的第一方程及对它相继微分所得的前 $(n-2)$ 个等式中解出 $y_2, y_3, \dots, y_n$ , 则 $y_2, y_3, \dots, y_n$ 可用变量 $x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$ 表示出来. 把这些表达式代入最后一次微分给出的等式就得到未知函数 $y_1$ 所满足的 $n$ 阶微分方程

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = g\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\right)$$

如果所给方程组是线性的, 则由上述过程化得的这个 $n$ 阶方程也是线性的. 同样, 常系数线性方程组化得的高阶线性方程也是常系数的.

在把一阶方程组化为高阶方程后, 就可按照前面叙述的方法求出这个方程的通解, 从而又可得到方程组的通解. 解方程的这种方法称为消元升阶法. 此法需要解决两个问题. 到底含有多少个独立的任意常数; 如何消元. 今把线性代数中的消元法推广到这里来. 为此, 记 $D = \frac{d}{dx}$ . 先计算所给方程组的算子 $D$ 的行列式, 由算子多项式的最高阶数, 确定出独立任意常数的个数. 其次, 写出增广算子矩阵并作行变换达到消元的目的.

例 1 试求方程组

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 3y - 2z \\ \frac{dz}{dx} = 2y - z \end{cases}$$

的通解.

解 这时有

$$\begin{cases} (D-3)y + 2z = 0 \\ -2y + (D+1)z = 0 \end{cases}$$

故得

$$\begin{vmatrix} D-3 & 2 \\ -2 & D+1 \end{vmatrix} = D^2 - 2D + 1$$

因此, 可含两个独立的任意常数. 对增广算子矩阵作行变换, 有

$$\begin{bmatrix} D-3 & 2 & \vdots & 0 \\ -2 & D+1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} D-3 & 2 & \vdots & 0 \\ -2 - \frac{1}{2}(D-3)(D+1) & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

从而得  $\left[-2 - \frac{1}{2}(D-3)(D+1)\right]y = 0$ , 或有

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = 0$$

由此解得

$$y = (c_1 + c_2 x)e^x$$

从而

$$z = -\frac{1}{2} \frac{dy}{dx} + \frac{3}{2} y = \frac{1}{2} (2c_1 - c_2 + 2c_2 x)e^x$$

例 2 求解方程组

$$\begin{cases} x' = y + z - x \\ y' = z + x - y \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

解 令  $D = \frac{d}{dt}$ , 有算子方程

$$\begin{cases} (D+1)x - y - z = 0 \\ -x + (D+1)y - z = 0 \\ -x - y + (D-1)z = 0 \end{cases}$$

故有

$$\begin{vmatrix} D+1 & -1 & -1 \\ -1 & D+1 & -1 \\ -1 & -1 & D-1 \end{vmatrix} = D^3 + D^2 - 4D - 4$$

故应含有三个独立的常数, 对增广算子矩阵作行变换, 有

$$\begin{bmatrix} D+1 & -1 & -1 & | & 0 \\ -1 & D+1 & -1 & | & 0 \\ -1 & -1 & D-1 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} D+1 & -1 & -1 & | & 0 \\ D^2 - D - 4 & 2 & 0 & | & 0 \\ D^3 + D^2 - 4D - 4 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

从而得到  $(D^3 + D^2 - 4D - 4)x = 0$  或有

$$x''' + x'' - 4x' - 4x = 0$$

算得它的通解为

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t}$$

进而又得

$$y = \frac{1}{2}(-x'' + x' + 4x) = c_1 e^{-t} + c_1 e^{2t} - c_3 e^{-2t}$$

$$z = \frac{1}{2}(x'' + x' - 2x) = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t}$$

例 3 求方程组

$$\begin{cases} y' = y + z + x \\ z' = -4y - 3z + 2x \end{cases}$$

满足初始条件  $y(0) = 1, z(0) = 0$  的特解.

解 令  $D = \frac{d}{dt}$  得算子方程组

$$\begin{cases} (D-1)y - z = x \\ 4y + (D+3)z = 2x \end{cases}$$

故有

$$\begin{vmatrix} D-1 & -1 \\ 4 & D+3 \end{vmatrix} = D^2 + 2D + 1$$

含两个独立的任意常数,对增广算子矩阵作行变换,有

$$\left[ \begin{array}{cc|c} D-1 & -1 & x \\ 4 & D+3 & 2x \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} D-1 & -1 & x \\ D^2+2D+1 & 0 & 5x+1 \end{array} \right]$$

于是得到

$$(D^2 + 2D + 1)y = 5x + 1$$

或有

$$y'' + 2y' + y = 5x + 1$$

这是一个常系数非齐次线性方程,它的通解是

$$y = (c_1 + c_2x)e^{-x} + 5x - 9$$

从而求得

$$z = y' - y - x = (c_2 - 2c_1 - 2c_2x)e^{-x} - 6x + 14$$

为使其满足初始条件,应取  $c_1$  及  $c_2$  为方程组

$$\begin{cases} c_1 - 9 = 1 \\ c_2 - 2c_1 + 14 = 0 \end{cases}$$

的解. 算得  $c_1 = 10, c_2 = 6$ . 从而所要求的特解就是

$$y = (10 + 6x)e^{-x} + 5x - 9$$

$$z = (-14 - 12x)e^{-x} - 6x + 14$$

对于高阶微分方程组,有时也可直接用消元升阶法求解.

利用高阶方程与一阶方程组之间的关系立即可以推出一般  $n$  阶微分方程的初值问题解的存在定理.

**定理** 若在初始值  $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$  的邻域内, 函数  $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  连续且对  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$  有连续的偏微商, 则  $n$  阶微分方程

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

在点  $x_0$  的附近存在唯一的解  $y(x)$  满足初始条件

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

特别推得  $n$  阶线性微分方程

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = f(x)$$

在系数  $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x), f(x)$  连续的区间上存在唯一的解  $y(x)$  满足条件

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

### 12.6.3 第一积分法

设有一阶微分方程组

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

如果消元升阶法难于应用时,可试着利用这个方程组的一些方程,进行加、减、乘、除后,凑出全微分形式的方程

$$d\Phi(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$$

从而得出

$$\Phi(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = c$$

它是未知函数  $y_1, y_2, \dots, y_n$  之间的一个确定的关系式,称为所给方程组的第一积分.容易看出,如果已知方程组(1)的一个第一积分,则此方程组就能减少一个待求的未知函数,而化成含有  $n-1$  个未知函数的方程组.如果能设法求出方程组(1)的  $n$  个第一积分

$$\Phi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = c_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

且

$$\frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \neq 0$$

就称它们是方程组(1)的  $n$  个独立的第一积分.则这些积分就以隐函数的形式级出了方程组(1)的通解.

如果已知方程组(1)的  $k$  个独立的第一积分

$$\Phi_i(x, y_1, \dots, y_n) = c_i \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

其中  $k \leq n$ .这时可解得

$$y_i = \varphi_i(x, c_1, \dots, c_k, y_{k+1}, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

余下的  $(n-k)$  个未知函数  $y_{k+1}, \dots, y_n$  再由  $n-k$  个一阶方程组

$$y_l' = f_l(x, \varphi_1, \dots, \varphi_k, y_{k+1}, \dots, y_n) \quad (l = k+1, \dots, n)$$

确定.

**例 1** 求解方程

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -z + y(y^2 + z^2 - 1) \\ \frac{dz}{dx} = y + z(y^2 + z^2 - 1) \end{cases}$$

解 以  $y$  乘第一方程,  $z$  乘第二方程, 然后相加得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx}(y^2 + z^2) = (y^2 + z^2)(y^2 + z^2 - 1)$$

分离变量后给出

$$\frac{d(y^2 + z^2)}{(y^2 + z^2)(y^2 + z^2 - 1)} = 2dx$$

等式左端分解成简单分式得

$$\frac{d(y^2 + z^2)}{y^2 + z^2 - 1} - \frac{d(y^2 + z^2)}{y^2 + z^2} = 2dx$$

由此得到一个第一积分为

$$\ln |y^2 + z^2 - 1| - \ln(y^2 + z^2) = 2x + c_0$$

或

$$\frac{y^2 + z^2 - 1}{y^2 + z^2} e^{-2x} = c_1 \quad (c_1 = \pm e^{c_0})$$

再以  $z$  乘第一方程,  $y$  乘第二方程, 然后相减得

$$z \frac{dy}{dx} - y \frac{dz}{dx} = -(y^2 + z^2)$$

两端同除以  $y^2$  后分离变量有

$$\frac{d\left(\frac{z}{y}\right)}{1 + \left(\frac{z}{y}\right)^2} = dx$$

积分之又得另一个第一积分

$$\arctan \frac{z}{y} = x + c_2$$

这些第一积分就给出了所给方程组之隐形式的通解.

## 例 2 试解方程组

$$\begin{cases} (z-y)^2 \frac{dy}{dx} = z \\ (z-y)^2 \frac{dz}{dx} = y \end{cases}$$

解 先把方程组改写成对称的形式

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}$$

从它就容易得出变量  $x, y, z$  的全微分. 事实上, 由后一等式得

$$ydy - zdz = \frac{1}{2}d(y^2 - z^2) = 0$$

由此给出一个第一积分为

$$y^2 - z^2 = c_1$$

再由对称形式的后一等式按分子分母分别相减, 即有

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dy - dz}{z - y}$$

或化简后得

$$dx + (z-y)d(z-y) = 0$$

积分之又得另一个第一积分

$$x + \frac{1}{2}(z-y)^2 = c_2$$

若将  $z$  视为自变量. 从这些第一积分即可解得原方程组的通解为

$$x = -\frac{1}{2}(z \mp \sqrt{z^2 + c_1})^2 + c_2$$

$$y = \pm z^2 + c_1$$

例 3 求解微分方程组

$$\begin{cases} \alpha \frac{du}{dt} = (\beta - \gamma)vw \\ \beta \frac{dv}{dt} = (\gamma - \alpha)wu \\ \gamma \frac{dw}{dt} = (\alpha - \beta)uv \end{cases}$$

其中  $\alpha > \beta > \gamma > 0$  是已给的常数.

解 分别用  $u, v, w$  乘方程组的各方程并相加, 可得

$$\alpha u \frac{du}{dt} + \beta v \frac{dv}{dt} + \gamma w \frac{dw}{dt} = 0$$

由此求得一个第一积分为

$$\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 = c_1$$

再分别用  $\alpha u, \beta v, \gamma w$  乘方程组的各方程并相加, 则得

$$\alpha^2 u \frac{du}{dt} + \beta^2 v \frac{dv}{dt} + \gamma^2 w \frac{dw}{dt} = 0$$

积分后又得另一个第一积分

$$\alpha^2 u^2 + \beta^2 v^2 + \gamma^2 w^2 = c_2$$

利用这些第一积分可以解出  $u$  与  $v$  为

$$u = \sqrt{a_1 w^2 + b_1}, v = \sqrt{-a_2 w^2 + b_2}$$

其中

$$a_1 = \frac{\gamma(\beta - \gamma)}{\alpha(\alpha - \beta)}, a_2 = \frac{\gamma(\alpha - \gamma)}{\beta(\alpha - \beta)}$$

是正数; 而  $b_1$  与  $b_2$  是同  $c_1$  与  $c_2$  有关的常数. 代入方程组的第三方程给出

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\alpha - \beta}{\gamma} \sqrt{(a_1 w^2 + b_1)(-a_2 w^2 + b_2)}$$

分离变量后并积分即得

$$\int \frac{dw}{\sqrt{(a_1 w^2 + b_1)(-a_2 w^2 + b_2)}} = \frac{\alpha - \beta}{\gamma} t + c$$

在物理学中, 微分方程组的第一积分常有明确的物理意义. 它表现为能量、动量矩在运动过程中守恒. 现以本节一开始所提及的行星绕太阳运行的两体问题为例来加以说明. 因为行星的运动方程为

$$\begin{cases} \ddot{x} = -kM \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \ddot{y} = -kM \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \ddot{z} = -kM \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

用  $y$  乘第三方程减去用  $z$  乘第二方程得

$$y\ddot{z} - z\ddot{y} = 0$$

积分之得第一积分

$$y\dot{z} - z\dot{y} = c_1$$

同样可得其余第一积分

$$z\dot{x} - x\dot{z} = c_2$$

$$x\dot{y} - y\dot{x} = c_3$$

从而由这些第一积分不难得出

$$c_1x + c_2y + c_3z = 0$$

可见在万有引力的作用下,行星在过日心的某一平面上运行.

若令  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ,  $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ ,  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ , 则上面三个第一积分可统一表示成向量形式

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{c}$$

它表明行星对日心的动量矩守恒.

再以  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  依次乘运动方程组的各方程, 然后相加得

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = -kM \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

此即为

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = -kM \frac{\frac{d}{dt} (x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

积分后并乘以质量  $m$  又得另一个第一积分

$$\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - k \frac{mM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = H$$

其中  $H$  是任意常数. 通常把这个积分简写成

$$\frac{1}{2}mv^2 - k\frac{mM}{r} = H$$

它表明行星运行时能量总是守恒的.

为确定行星运行的规律, 不妨选取参考系的  $Oxy$  平面与轨道平面相合, 这时有  $z = 0$ . 引进极坐标变换  $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ , 于是由能量积分得

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 - \frac{2kM}{r} = H_0$$

其中  $H_0 = \frac{2H}{m}$ . 由动量矩积分得

$$r^2\dot{\varphi} = c_3$$

由此推知

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r^2}{c_3} \sqrt{H_0 + \frac{2kM}{r} - \left(\frac{c_3}{r}\right)^2}$$

分离变量后给出

$$-\frac{d\left(\frac{c_3}{r}\right)}{\sqrt{H_0 + \left(\frac{kM}{c_3}\right)^2 - \left(\frac{c_3}{r} - \frac{kM}{c_3}\right)^2}} = d\varphi$$

积分得

$$\arccos \frac{\frac{c_3}{r} - \frac{kM}{c_3}}{\sqrt{H_0 + \left(\frac{kM}{c_3}\right)^2}} = \varphi - \varphi_0$$

于是可解出

$$r = \frac{\frac{c_3^2}{kM}}{1 + \sqrt{1 + H_0 \left(\frac{c_3}{kM}\right)^2} \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

这就是行星运行的轨道方程. 它表示一条离心率为

$$e = \sqrt{1 + H_0 \left( \frac{c_3}{kM} \right)^2}$$

的二次曲线,即行星的轨道是椭圆、抛物线或双曲线.

#### 12.6.4 线性方程组解的结构

设有一阶线性微分方程组

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}(x)y_1 + a_{i2}(x)y_2 + \cdots + a_{in}(x)y_n + f(x) \quad (1)$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

相应的齐次方程组是

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}(x)y_1 + a_{i2}(x)y_2 + \cdots + a_{in}(x)y_n \quad (2)$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

它们的通解如同线性微分方程一样有简单的结构. 为说明这个结论, 须引进  $n$  维向量函数

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \cdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

的线性相关与线性无关的概念.

**定义** 设在区间  $(a, b)$  上给定  $m$  个  $n$  维向量函数

$$\boldsymbol{\varphi}_1(x), \boldsymbol{\varphi}_2(x), \cdots, \boldsymbol{\varphi}_m(x)$$

若存在  $m$  个不全为零的常数  $c_1, c_2, \cdots, c_m$ , 使对于区间  $(a, b)$  内的一切  $x$ , 都有

$$c_1 \boldsymbol{\varphi}_1(x) + c_2 \boldsymbol{\varphi}_2(x) + \cdots + c_m \boldsymbol{\varphi}_m(x) = \mathbf{0}$$

则称这组向量函数在区间  $(\alpha, \beta)$  上是线性相关的; 否则就称它们在区间  $(\alpha, \beta)$  上是线性无关的.

作为此定义的特别情形, 考虑在区间  $(a, b)$  上线性相关的  $n$  个  $n$  维向量函数,  $\boldsymbol{\varphi}_1(x), \boldsymbol{\varphi}_2(x), \cdots, \boldsymbol{\varphi}_n(x)$ , 这时存在不全为零的数

$c_1, c_2, \dots, c_n$ , 使得

$$c_1 \boldsymbol{\varphi}_1(x) + c_2 \boldsymbol{\varphi}_2(x) + \dots + c_n \boldsymbol{\varphi}_n(x) = \mathbf{0}$$

在区间  $(a, b)$  上恒成立. 令

$$\boldsymbol{\varphi}_1(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x) \\ \varphi_{21}(x) \\ \vdots \\ \varphi_{n1}(x) \end{pmatrix}, \boldsymbol{\varphi}_2(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{12}(x) \\ \varphi_{22}(x) \\ \vdots \\ \varphi_{n2}(x) \end{pmatrix}, \dots, \boldsymbol{\varphi}_n(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{2n}(x) \\ \vdots \\ \varphi_{mn}(x) \end{pmatrix}$$

上式可写成分量的形式

$$\begin{cases} c_1 \varphi_{11}(x) + c_2 \varphi_{12}(x) + \dots + c_n \varphi_{1n}(x) = 0 \\ c_1 \varphi_{21}(x) + c_2 \varphi_{22}(x) + \dots + c_n \varphi_{2n}(x) = 0 \\ \dots \\ c_1 \varphi_{n1}(x) + c_2 \varphi_{n2}(x) + \dots + c_n \varphi_{nm}(x) = 0 \end{cases}$$

这是一个关于  $c_1, c_2, \dots, c_n$  的线性齐次代数方程组, 并且有非零解, 所以它的系数行列式在区间  $(a, b)$  上恒为零, 即有

$$w(x) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \dots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) & \dots & \varphi_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \dots & \varphi_{nm}(x) \end{vmatrix} = 0$$

$(a < x < b)$

这个  $n$  阶行列式  $w(x)$  也称为向量函数  $\boldsymbol{\varphi}_1(x), \boldsymbol{\varphi}_2(x), \dots, \boldsymbol{\varphi}_n(x)$  的朗斯基行列式. 反之也容易证明, 若向量函数  $\boldsymbol{\varphi}_1(x), \boldsymbol{\varphi}_2(x), \dots, \boldsymbol{\varphi}_n(x)$  是线性微分方程组(2)的解, 且这组解向量构成的朗斯基行列式  $w(x)$  在  $(a, b)$  上恒为零, 则它们就在区间  $(a, b)$  上是线性相关的. 由此就能判定  $n$  个解向量的线性无关性, 并可推出线性微分方程组(2)与(1)通解的结构定理.

**定理 1** 如果向量函数  $\mathbf{y}_1(x), \mathbf{y}_2(x), \dots, \mathbf{y}_n(x)$  是线性齐次方程组(2)的  $n$  个线性无关的解, 而  $c_1, c_2, \dots, c_n$  是  $n$  个任意常数, 则向量函数

$$c_1 \mathbf{y}_1(x) + c_2 \mathbf{y}_2(x) + \dots + c_n \mathbf{y}_n(x)$$

也是这个方程组的解. 反之, 方程组(2)的任意一个解向量  $y(x)$  必可表成

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

这种形式.

可见方程组(2)的通解  $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$  就表达了它的一切解.

**定理 2** 设向量函数  $y^*(x)$  是线性非齐次方程组(1)的一个特解, 而向量函数  $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$  是对应的线性齐次方程组(2)的  $n$  个线性无关解, 则对任意常数  $c_1, c_2, \cdots, c_n$ , 通解

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y^*(x)$$

就表达了方程组(1)的一切解.

这些定理的证明与二阶线性方程的相应定理的证明十分类似, 就把它留给读者自己去完成.

于是欲求一阶线性非齐次方程组(1)的通解应先求出它的一个特解  $y^*(x)$ , 然后再加上对应齐次方程组(2)的通解  $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$ , 这又必须去求方程组(2)的  $n$  个线性无关的解  $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ . 后者一般说来是十分困难的. 可是当方程组(2)的系数是常数时, 就可以不用积分而只用代数的方法得出它的解来.

### 12.6.5 代数求解法

设给定线性齐次方程组

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \cdots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{cases} \quad (1)$$

其中  $y_1, y_2, \dots, y_n$  是未知函数,  $x$  是自变量, 而  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) 均为实常数. 因为应用消元升阶法所得到的是高阶常系数线性方程, 所以自然要求这个方程组具有指数函数形式的解, 即令

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} e^{kx} = \mathbf{r} e^{kx}$$

其中  $r_1, r_2, \dots, r_n$  及  $k$  都是待定的常数. 将它代入到方程组(1), 消去  $e^{kx}$  并合并同类项就得到

$$\begin{cases} (a_{11} - k)r_1 + a_{12}r_2 + \dots + a_{1n}r_n = 0 \\ a_{21}r_1 + (a_{22} - k)r_2 + \dots + a_{2n}r_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}r_1 + a_{n2}r_2 + \dots + (a_{nn} - k)r_n = 0 \end{cases}$$

这是一个未知数为  $r_1, r_2, \dots, r_n$  的线性齐次代数方程组. 若要它有非零解, 就必须系数行列式为零. 从而得到确定  $k$  的方程

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0$$

它称为微分方程组(1)的特征方程. 对于特征方程的每一根  $k$ , 可从上面所得的代数方程组求出常向量  $\mathbf{r}$ , 于是向量函数  $\mathbf{y} = \mathbf{r} e^{kx}$  就是微分方程组(1)的一个特解.

如果特征方程有  $n$  个相异的实根  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , 则微分方程组(1)相应的特解是

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{r}_1 e^{k_1 x}, \mathbf{y}_2 = \mathbf{r}_2 e^{k_2 x}, \dots, \mathbf{y}_n = \mathbf{r}_n e^{k_n x}$$

这  $n$  个向量函数线性无关, 所以方程组(1)的一切解这时可以表为

$$\mathbf{y} = c_1 \mathbf{r}_1 e^{k_1 x} + c_2 \mathbf{r}_2 e^{k_2 x} + \dots + c_n \mathbf{r}_n e^{k_n x}$$

如果特征方程有一对共轭的复根  $k_1 = \alpha + i\beta$  与  $k_2 = \alpha - i\beta$ , 则微分方程组(1)相应的复值特解为

$$y_1 = r_1 e^{(\alpha+i\beta)x}, y_2 = r_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$$

并总可选取  $r_1$  与  $r_2$ , 使其成为共轭的复向量. 由此分离实部与虚部得到微分方程组的两个线性无关的实值特解.

如果特征方程有实重根, 则对于每个  $s$  重实根  $k$ , 一般可令微分方程组(1) 有如下形式的特解

$$y = (r_0 + r_1 x + \cdots + r_{s-1} x^{s-1}) e^{kx}$$

代入方程组(1) 后可定出  $r_0, r_1, \cdots, r_{s-1}$ , 并得到  $s$  个线性无关的特解.

如果特征方程有复重根, 则对应于每个  $s$  重共轭复根  $\alpha + i\beta$  与  $\alpha - i\beta$  亦可求得方程组(1) 的  $2s$  个线性无关的实值特解, 它们一般可表示成

$$y = (r_0 + r_1 x + \cdots + r_{s-1} x^{s-1}) e^{\alpha x} \begin{cases} \cos \beta x \\ \sin \beta x \end{cases}$$

### 例 1 解方程组

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y - 5z \\ \frac{dz}{dx} = 2y - z \end{cases}$$

**解** 这是常系数线性齐次方程组, 可设它有指数函数形式的解, 即设

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} e^{kx}$$

其中  $\alpha, \beta, k$  是待定常数. 代入方程组后可得

$$\begin{cases} (1-k)\alpha - 5\beta = 0 \\ 2\alpha - (1+k)\beta = 0 \end{cases}$$

于是特征方程为

$$\begin{vmatrix} 1-k & -5 \\ 2 & -1-k \end{vmatrix} = 0$$

即  $k^2 + 9 = 0$ . 它以  $k_1 = 3i, k_2 = -3i$  为一对共轭复根. 为定出  $\alpha$  与

$\beta$ , 把  $k_{1,2} = \pm 3i$  代入到上面所得的代数方程中, 只得一个独立的方程

$$(1 - 3i)\alpha - 5\beta = 0$$

由此可取  $\alpha = 5, \beta = 1 - 3i$  得解为

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 - 3i \end{pmatrix} e^{3ix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 - 3i \end{pmatrix} (\cos 3x + i \sin 3x)$$

分离实部与虚部得到所给方程组的两个特解是

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cos 3x \\ \cos 3x + 3 \sin 3x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \sin 3x \\ -3 \cos 3x + \sin 3x \end{pmatrix}$$

从而它的一切解就可表示成

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5c_1 \cos 3x + 5c_2 \sin 3x \\ c_1 (\cos 3x + 3 \sin 3x) + c_2 (-3 \cos 3x + \sin 3x) \end{pmatrix}$$

例 2 求解方程组(12.6.1 例 3).

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z \\ \frac{dy}{dt} = z + x \\ \frac{dz}{dt} = x + y \end{cases}$$

解 设方程组存在形如

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} e^{kt}$$

的特解. 这时确定  $\alpha, \beta, \gamma$  的代数方程组为

$$\begin{cases} -k\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - k\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta - k\gamma = 0 \end{cases}$$

令其系数行列式等于零得到

$$\begin{vmatrix} -k & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & -k \end{vmatrix} = 0$$

或

$$k^3 - 3k - 2 = 0$$

这个特征方程的根为  $k_1 = 2, k_2 = k_3 = -1$ . 其单根  $k_1 = 2$  对应于含  $\alpha, \beta, \gamma$  的两个独立的方程

$$\begin{cases} -2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - 2\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

由此可取  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ , 并得到所给方程组的一个特解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

若把重根  $k_2 = k_3 = -1$  代入上述代数方程组中, 则确定  $\alpha, \beta, \gamma$  的三个方程就成为一个方程

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

再取  $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = -1$  或  $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = -1$ , 又可分别得到所给方程组其它两个线性无关的特解

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

而通解就是

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} \\ c_1 e^{2t} + c_3 e^{-t} \\ c_1 e^{2t} - (c_2 + c_3) e^{-t} \end{pmatrix}.$$

从这个例子可以看出,微分方程组的特征方程虽然有重根,但它的通解也可能不含  $te^{kt}$  的项. 一般说来,若未知函数在方程组中出现是对称的,就会发生这样的情形.

例 3 求线性微分方程组

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -y + 4z \\ z' = -4z + x \end{cases}$$

的通解.

解 特征方程是

$$\begin{vmatrix} -1-k & 1 & 0 \\ 0 & -1-k & 4 \\ 1 & 0 & -4-k \end{vmatrix} = 0$$

或化简成

$$k^3 + 6k^2 + 9k = k(k+3)^2 = 0$$

若将单根  $k=0$  的解写成

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

把它代入到所给的微分方程就得到确定  $\alpha, \beta, \gamma$  的三个方程,但其中只有两个方程是独立的,例如取

$$\begin{cases} -\alpha + \beta = 0 \\ \beta - 4\gamma = 0 \end{cases}$$

并且令  $\alpha = 4, \beta = 4, \gamma = 1$ , 就得到对应于  $k=0$  的一个解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

又因  $k = -3$  是二重根,故可设对应于此根的解具有形式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 t \\ \beta_1 + \beta_2 t \\ \gamma_1 + \gamma_2 t \end{pmatrix} e^{-3t}$$

代入所给的微分方程组,并消去因子  $e^{-3t}$ ,就得到

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 3\alpha_2 t - \alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_2 t + \beta_1 + \beta_2 t = 0 \\ 3\beta_1 + 3\beta_2 t - \beta_2 - \beta_1 - \beta_2 t + 4\gamma_1 + 4\gamma_2 t = 0 \\ 3\gamma_1 + 3\gamma_2 t - \gamma_2 - 4\gamma_1 - 4\gamma_2 t + \alpha_1 + \alpha_2 t = 0 \end{cases}$$

比较这些等式两端常数项及一次项  $t$  的系数,给出六个方程

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 + \beta_1 = 0 \\ 2\beta_1 - \beta_2 + 4\gamma_1 = 0 \\ \gamma_1 + \gamma_2 - \alpha_1 = 0 \end{cases} \begin{cases} 2\alpha_2 + \beta_2 = 0 \\ 2\beta_2 + 4\gamma_2 = 0 \\ -\gamma_2 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

由此可取  $\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = 0, \alpha_1 = 1, \beta_1 = -2, \gamma_1 = 1$ ,求得对应于重根  $k = -3$  的一个解是

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

如果再取  $\alpha_2 = 1, \beta_2 = -2, \gamma_2 = 1, \alpha_1 = 0, \beta_1 = 1, \gamma_1 = -1$ ,又得对应于重根  $k = -3$  的另一个解

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -2t + 1 \\ t - 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

这些解是线性无关的,故所给方程组的通解为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= c_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4c_1 + (c_2 + c_3 t)e^{-3t} \\ 4c_1 + [-2c_2 + c_3(1 - 2t)]e^{-3t} \\ c_1 + [c_2 + c_3(-1 + t)]e^{-3t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

关于线性非齐次方程组的求解在 12.6.4 中已归结为求它的一个特解与对应的齐次方程组的通解. 而这个特解也可通过常数变易法求得. 这里仅举一例以示一般.

例 4 求线性非齐次方程组

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y - 5z + \csc x \\ \frac{dz}{dx} = y - 2z + \sec x \end{cases}$$

的通解.

解 容易求出对应齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 5\cos x \\ 2\cos x + \sin x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5\sin x \\ -\cos x + 2\sin x \end{pmatrix}$$

将此通解的任意常数  $c_1$  与  $c_2$  代之以  $x$  的待定函数  $c_1(x)$  与  $c_2(x)$ , 而假设所给非齐次方程组有形如

$$\begin{pmatrix} y^* \\ z^* \end{pmatrix} = c_1(x) \begin{pmatrix} -5\cos x \\ 2\cos x + \sin x \end{pmatrix} + c_2(x) \begin{pmatrix} 5\sin x \\ -\cos x + 2\sin x \end{pmatrix}$$

的特解. 代入之后给出

$$\begin{cases} 5c_1'(x)\cos x + 5c_2'(x)\sin x = \csc x \\ c_1'(x)(2\cos x + \sin x) + c_2'(x)(-\cos x + 2\sin x) = \sec x \end{cases}$$

由此解得

$$\begin{cases} c_1'(x) = \frac{1}{5}(\cot x + 5\tan x - 2) \\ c_2'(x) = \frac{1}{5}(2\cot x - 4) \end{cases}$$

积分之, 有

$$\begin{cases} c_1(x) = \frac{1}{5} \left( \ln \left| \frac{\sin x}{\cos^5 x} \right| - 2x \right) \\ c_2(x) = \frac{1}{5} (2\ln |\sin x| - 4x) \end{cases}$$

于是非齐次方程组的一个特解是

$$\begin{pmatrix} y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \left( \ln \left| \frac{\sin x}{\cos^5 x} \right| - 2x \right) \begin{pmatrix} 5\cos x \\ 2\cos x + \sin x \end{pmatrix} \\ + \frac{1}{5} (2\ln |\sin x| - 4x) \begin{pmatrix} 5\sin x \\ -\cos x + 2\sin x \end{pmatrix}$$

而它的通解是

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \left( \ln \left| \frac{\sin x}{\cos^5 x} \right| - 2x + c_1 \right) \begin{pmatrix} 5\cos x \\ 2\cos x + \sin x \end{pmatrix} \\ + \frac{1}{5} (2\ln |\sin x| - 4x + c_2) \begin{pmatrix} 5\sin x \\ -\cos x + 2\sin x \end{pmatrix}$$

### 习题 12.6

1. 用消元升阶法或第一积分法或代数求解法求下列方程组的通解:

$$(1) \begin{cases} x' + 2x - y = 0 \\ y' + x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x' + y = \cos t \\ y' + x = \sin t \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x' = -x + y + z \\ y' = x - y + z \\ z' = x + y - z \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x' = 2x - y - z - 3t - 1 \\ y' = 3x - 2y - 3z - t^2 + 2t - 4 \\ z' = -x + y + 2z + t^2 - 5t + 3 \end{cases}$$

2. 求下列方程组满足所指定的初始条件的解:

$$(1) \begin{cases} x'' + 2y' - x = 0 \\ x' + y = 0 \\ x(0) = 1, y(0) = 0, x'(0) = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1'' = x_2 \\ x_2'' = x_1 \\ x_1(0) = x_2(0) = x_1'(0) = x_2'(0) = 2 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = -6x - 11y - 6z + e^{-t} \\ x(0) = y(0) = z(0) = 0 \end{cases}$$

3. 质量为  $m$  的物体从水平速度为  $v_0$  的飞机中抛出, 设空气阻力与速度成正比(比例系数为  $k$ ), 求该物体的运动方程及运动轨道.

4. 放射性同位素 A 衰变为放射性同位素 B, B 又衰变成 C, C 不再衰变. 设 A, B, C 三种元素在时刻  $t$  的原子个数分别为  $N_1(t)$ ,  $N_2(t)$ ,  $N_3(t)$ , 则衰变规律满足方程组

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \\ \frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 \end{cases}$$

设  $t = 0$  时只有同位素 A, 其原子个数为  $k$ , 而 B, C 均没有, 求此问题的解( $\lambda_1, \lambda_2$  分别是 A, B 的衰变常数):

## 习题参考答案

### 习题 6.1

2.  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 当  $x > 0$  且  $y \geq 0$  时,  $\theta = \arctan \frac{y}{x}$ ; 当  $x = 0$  且  $y > 0$  时,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ; 当  $x < 0$  时,  $\theta = \pi + \arctan \frac{y}{x}$ ; 当  $x = 0$  且  $y < 0$  时,  $\theta = \frac{3}{2}\pi$ ; 当  $x > 0$  且  $y \leq 0$  时,  $\theta = 2\pi + \arctan \frac{y}{x}$ .

3.  $f(0, 1) = 0, f(1, 1) = 1, f(x, x) = 2, f(y, x) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ ,  
 $f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, f(t, s) = \frac{2ts}{t^2 + s^2}$ .

4.  $f(x, y) = \frac{(1-y)x^2}{1+y}$ .

5. (1)  $|x| \leq 1$ , 闭区域;

(2)  $(2k\pi)^2 \leq x^2 + y^2 \leq [(2k+1)\pi]^2, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ ,  
不是区域;

(3)  $(x-1)^2 + y^2 < 1$ , 开区域;

(4) 圆锥面  $z^2 = x^2 + y^2$  内部, 上下两部分, 不是区域;

(5)  $x^2 + y^2 + (z-a)^2 \leq a^2$ , 闭区域(闭球);

(6)  $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ , 开区域(开球).

7.  $F(t) = \tan 2t$ .

8.  $F(t) = \begin{cases} 1 & 2k\pi + \frac{\pi}{4} \leq t \leq (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4} \\ 0 & (2k-1)\pi + \frac{\pi}{4} < t < 2k\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}, k = 0, \pm 1,$

$\pm 2, \dots$ .

9.  $z = r^2 + \tan\theta$ .

10.  $(x+y)^{x-y}, x^y + x - y, x + y - x^y$ .

13. (1) 0, 1; (2)  $\frac{1}{2}, 1$ ; (3) 0, 1; (4) 0, 1.

14. (1) 0; (2)  $a$ ; (3) 0; (4)  $e$ ; (5) 0; (6) 0; (7) 0; (8)  $\ln 2$ ; (9) 2; (10) 不存在; (11) 不存在; (12) 不存在.

15. (1)  $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3}{2}\pi$ ; (2)  $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3}{4}\pi$  或  $\frac{5\pi}{4} < \varphi < \frac{7}{4}\pi$ .

16. (1) 直线  $y = x$  上的全部点; (2) 全  $x$  轴上除去坐标原点外的全部点.

17. (1) 全平面上点点连续; (2) 当  $x + y \neq 0$  时连续, 当  $x + y = 0$  时间断.

### 习题 6.2

1. (1)  $\frac{2}{5}$ ; (2)  $\frac{1}{2}$ ; (3)  $\frac{1}{3}$ ; (4)  $-2\pi$ .

2. (1)  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^y}{y^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = xe^y \left( \frac{1}{y^2} - \frac{2}{y^3} \right)$ ;

(2)  $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$ ;

(3)  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \left( \frac{1}{3} \right)^{-\frac{y}{x}} \ln 3, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} \left( \frac{1}{3} \right)^{-\frac{y}{x}} \ln 3$ ;

(4)  $\frac{\partial u}{\partial v} = -\frac{w}{v^2 + w^2}, \frac{\partial u}{\partial w} = \frac{v}{v^2 + w^2}$ ;

(5)  $\frac{\partial z}{\partial x} = y^2(1 + xy)^{y-1}$ ,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xy(1 + xy)^{y-1} + (1 + xy)^y \ln(1 + xy);$$

$$(6) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2} \sin \frac{x}{y} \sin \frac{y}{x} + \frac{1}{y} \cos \frac{y}{x} \cos \frac{x}{y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x} - \frac{1}{x} \sin \frac{x}{y} \sin \frac{y}{x};$$

$$(7) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{xy\sqrt{2}}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 - y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2\sqrt{2}}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 - y^2}};$$

$$(8) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + \ln y}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y(x + \ln y)};$$

$$(9) \frac{\partial z}{\partial x} = y \ln(x + y) + \frac{xy}{x + y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \ln(x + y) + \frac{xy}{x + y};$$

$$(10) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2 + x\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$(11) \frac{\partial u}{\partial x} = (3x^2 + y^2 + z^2)e^{x(x^2 + y^2 + z^2)}, \frac{\partial u}{\partial y} = 2xye^{x(x^2 + y^2 + z^2)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2xz e^{x(x^2 + y^2 + z^2)};$$

$$(12) \frac{\partial u}{\partial x} = y + z, \frac{\partial u}{\partial y} = x + z, \frac{\partial u}{\partial z} = y + x;$$

$$(13) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$(14) \frac{\partial u}{\partial x} = y^z x^{y^z - 1}, \frac{\partial u}{\partial y} = zy^{z-1} x^{y^z} \ln x, \frac{\partial u}{\partial z} = y^z x^{y^z} \ln x \ln y;$$

$$(15) \frac{\partial u}{\partial \rho} = e^{t^\rho}, \frac{\partial u}{\partial t} = \rho t^{\rho-1} e^{t^\rho}, \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \rho t e^{t^\rho} - e^{-\varphi};$$

$$(16) \frac{\partial \theta}{\partial x} = e^{-t} + \frac{1}{x}, \frac{\partial \theta}{\partial t} = -xe^{-t} + 1, \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{y}.$$

$$3. \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(x,1)} = -\frac{1}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x-x^2}};$$

$$z_y'(x,1) = -\frac{x}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x-x^2}}.$$

$$4. f_x'(1,y) = \frac{y^2+2y}{\sqrt{1+(y^2+y)^2}}; \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(1,y)} = \frac{1+2y}{\sqrt{1+(y^2+y)^2}}.$$

$$5. \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2\sin x^2 y}{x}; \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sin x^2 y}{y}.$$

$$6. \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=b} = \frac{3b}{z} \sqrt{\frac{ab}{b^2-a^2}}; \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{z=b} = -\frac{3a}{z} \sqrt{\frac{ab}{b^2-a^2}}.$$

$$7. \frac{\pi}{4}. \quad 8. 3. \quad 9. \frac{\pi}{6}. \quad 10. \arctan \frac{4}{7}, \arctan\left(-\frac{4}{7}\right).$$

$$11. (1) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y^2 \sin xy, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos xy - xy \sin xy,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x^2 \sin xy;$$

$$(2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2};$$

$$(3) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{4y}{(x+y)^3}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{4x}{(x+y)^3};$$

$$(4) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^3 + (x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{3/2}(x+\sqrt{x^2+y^2})^2};$$

$$(5) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2};$$

$$(6) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2a^2 \cos 2(ax+by), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2ab \cos 2(ax+by),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2b^2 \cos 2(ax + by);$$

$$(7) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\ln y (\ln y - 1)}{x^2} e^{\ln x \ln y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\ln x \ln y + 1}{xy} e^{\ln x \ln y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\ln x (\ln x - 1)}{y^2} e^{\ln x \ln y};$$

$$(8) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{xy^3}{(1 - x^2 y^2)^{3/2}}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{(1 - x^2 y^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^3 y}{(1 - x^2 y^2)^{3/2}}.$$

$$12. \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{4x(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3}.$$

$$13. \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (x^2 y^2 z^2 + 3xyz + 1)e^{xyz}.$$

$$17. (1) \frac{2}{x^2 + y^2} (x dx + y dy);$$

$$(2) \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} (-y dx + x dy);$$

$$(3) \frac{2}{(s - t)^2} (s dt - t ds);$$

$$(4) \frac{1}{x^2 + y^2} (x dy - y dx);$$

$$(5) (x dy + y dx) \cos(xy);$$

$$(6) x^{x-1} (yz dx + zx \ln x dy + xy \ln x dz);$$

$$(7) (y + z) dx + (x + z) dy + (y + x) dz;$$

$$(8) \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} [-2xz dx - 2yz dy + (x^2 + y^2) dz].$$

$$18. \Delta z \approx -0.20404, dz = -0.2.$$

$$19. \Delta z = 22.75, dz = 22.4, \text{相对误差} = 1.5\%.$$

$$20. \Delta z = 0.0714, dz = 0.075.$$

$$21. dz = 0.25e.$$

$$22. dz = 0.04.$$

23. (1) 2.95; (2) 0.0117; (3) 108.908; (4) 1.08;  
(5) 1.054.

24. (1)  $(1+x)^n(1+y)^m \approx 1+nx+my$ ;

(2)  $\ln \frac{1+x}{1+y} \approx x-y$ .

25. 0.006.

26. -5 厘米.

27. 14.8 立方米.

28. -0.167 米.

### 习题 6.3

1.  $\frac{\partial u}{\partial r} = 3r^2 \operatorname{sincoss}(\operatorname{coss} - \operatorname{sins})$ ;  $\frac{\partial u}{\partial s} = -2r^3 \operatorname{sincoss}(\operatorname{sins} + \operatorname{coss}) + r^3(\sin^3 s + \cos^3 s)$ .

2.  $\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{2s}{1+(1+s^2-t^2)^2}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{-2t}{1+(1+s^2-t^2)^2}$ .

3.  $\frac{\partial u}{\partial r} = e^{r^{s+2}} r^{s+1}(s+2)$ ;  $\frac{\partial u}{\partial s} = e^{r^{s+2}} r^{s+2} \ln r$ .

4.  $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{v^2} \ln(3u-2v) + \frac{3u^2}{v^2(3u-2v)}$ ;  
 $\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{2u^2}{v^3} \ln(3u-2v) - \frac{2u^2}{v^2(3u-2v)}$ .

5.  $\frac{3-12t^2}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}$ .

6.  $\frac{2\left(e^{2t} + t + \frac{1}{t} \ln t\right)}{e^{2t} + t^2 + \ln^2 t}$ .

7.  $\frac{1+e^{e^x}}{1+e^{e^x-x}}$ .

8.  $\frac{1}{1+x^2}$ .

9.  $e^{ax} \sin x$ .

$$10. \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1 + y \cos xy}{\sqrt{1 - (x + y + \sin xy)^2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1 + x \cos xy}{\sqrt{1 - (x + y + \sin xy)^2}},$$

$$11. \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 2(\varphi + \theta \tan(\varphi \theta) \sec^2(\varphi \theta));$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = 2(\theta + \varphi \tan(\varphi \theta) \sec^2(\varphi \theta)).$$

$$12. 3t^2 \frac{\partial f}{\partial \xi} + 4t \frac{\partial f}{\partial \eta}.$$

$$13. \frac{\partial f}{\partial x} \cos t - \frac{\partial f}{\partial y} \sin t - \frac{\partial f}{\partial z} e^t.$$

$$14. \frac{\partial u}{\partial x} = f_1' + 2xf_2', \frac{\partial u}{\partial y} = f_1' + 2yf_2', \frac{\partial u}{\partial z} = f_1' + 2zf_2',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_{11}'' + 4xf_{12}'' + 4x^2 f_{22}'' + 2f_2',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f_{11}'' + 4yf_{12}'' + 4y^2 f_{22}'' + 2f_2',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f_{11}'' + 4zf_{12}'' + 4z^2 f_{22}'' + 2f_2',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f_{11}'' + 2(x + y)f_{12}'' + 4xyf_{22}''.$$

$$15. \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y}f_1', \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}f_1' + \frac{1}{z}f_2',$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2}f_2', \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{x}{y^3}f_{11}'' + \frac{1}{yz}f_{12}'' - \frac{1}{y^2}f_1'.$$

$$16. \frac{\partial z}{\partial x} = 2xf_1' + ye^{xy}f_2', \frac{\partial z}{\partial y} = -2yf_1' + xe^{xy}f_2',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4xyf_{11}'' + 2e^{xy}(x^2 - y^2)f_{12}'' + xye^{2xy}f_{22}'' + e^{xy}(1$$

$$+ xy)f_2'.$$

$$17. \frac{\partial u}{\partial x} = f_1' + yf_2' + yzf_3', \frac{\partial u}{\partial y} = xf_2' + xzf_3', \frac{\partial u}{\partial z} = xyf_3',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_{11}'' + 2yf_{12}'' + 2yzf_{13}'' + y^2 f_{22}'' + 2y^2 z f_{23}'' + y^2 z^2 f_{33}'', \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 f_{22}'' + 2x^2 z f_{23}'' + x^2 z^2 f_{33}'', \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = x^2 y^2 f_{33}'', \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f_2' + z f_3' + x f_{12}'' + x z f_{13}'' + x y f_{22}'' + 2 x y z f_{23}'' + x y z^2 f_{33}''.$$

$$28. z = 1 + x^2 y + y^2 - 2x^4.$$

$$29. \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2}.$$

$$30. u_{xx}''(x, 2x) = u_{yy}''(x, 2x) = -\frac{4}{3}x, u_{xy}''(x, 2x) = \frac{5}{3}x.$$

$$31. (1) u = x\varphi(y) + \psi(y); \quad (2) u = \varphi(x) + \psi(y); \quad (3) u = y\varphi(x) + \psi(x).$$

$$32. (1) du = f'(t)(dx + dy);$$

$$(2) du = f'(t)(yz dx + xz dy + xy dz);$$

$$(3) du = 2f'(t)(x dx + y dy + z dz);$$

$$(4) du = a f_1' dx + b f_2' dy;$$

$$(5) du = f_1' \cdot (y dx + x dy) + f_2' \cdot \frac{y dx - x dy}{y^2};$$

$$(6) du = (f_1' + 2t f_2' + 3t^2 f_3') dt;$$

$$(7) du = f_1' \cdot (dx + dy + dz) + 2f_2' \cdot (x dx + y dy + z dz);$$

$$(8) du = 2f_1' \cdot (x dx + y dy) + 2f_2' \cdot (x dx - y dy) + 2f_3' \cdot (y dx + x dy).$$

#### 习题 6.4

$$2. (1) \frac{dy}{dx} = \frac{y e^{xy} - y e^x - e^y}{x e^y - e^x - x e^{xy}};$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \cdot \frac{2x + e^{xy} - \cos xy}{\cos xy - e^{xy} - x};$$

$$(3) y' = \frac{x+y}{x-y}, y'' = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3};$$

$$(4) y' = \frac{y^2}{x^2} \cdot \frac{\ln x - 1}{\ln y - 1}.$$

$$y'' =$$

$$\frac{y^2 [x(\ln y - 1)^2 + 2(x-y)(\ln x - 1)(\ln y - 1) - y(\ln x - 1)^2]}{x^4 (\ln y - 1)^3}$$

$$3. (1) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{e^z - xy}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{yz}{e^z - xy}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{z(z^2 - 2z + 2)}{x^2(z-1)^3};$$

$$(2) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z^2}{2y - 3xz}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-z}{2y - 3xz}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{z},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2z^3(5y - 6xz)}{(2y - 3xz)^3};$$

$$(3) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{ayz - x^2}{z^2 - axy}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{ayz - y^2}{z^2 - axy}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{ayz - y^2}{x^2 - ayz},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2xy^3z(1 - a^3)}{(z^2 - axy)^3};$$

$$(4) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x+z}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2}{y(x+z)}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z}{y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{z^2}{(x+z)^2}.$$

$$10. dz = -\frac{1}{\sin 2z}(\sin 2x dx + \sin 2y dy).$$

$$11. dz = -\frac{(1-yz)dx + (1-xz)dy}{1-xy}.$$

$$12. du = \frac{u^2(dx+dy) - z^2 dz}{u[2(x+y) - u]}.$$

$$13. 0.49875.$$

$$14. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{4(x-z)(y-z)}{(F_1' + 2zF_2')^3} [(F_2')^2 F_{11}'' - 2F_1' F_2' F_{12}'' +$$

$$(F_1')^2 F_{22}'' - \frac{2(F_1' + 2xF_2')(F_1' + 2yF_2')F_2'}{(F_1' + 2zF_2')^3}.$$

$$15. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F_1' - F_3'}{F_2' - F_3'}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{F_2' - F_1'}{F_2' - F_3'}.$$

$$16. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -(xF_1' + yF_2')^{-3} [y^2 z^2 (F_2'^2 F_{11}'' - 2F_1' F_2' F_{12}'' + F_1'^2 F_{22}'') - 2z(xF_2' + yF_2') F_1'^2].$$

$$17. \frac{dy}{dx} = -\frac{(6z+1)x}{(6z+2)y}, \frac{dz}{dx} = \frac{x}{3z+1}.$$

$$18. \frac{dy}{dx} = \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)} / \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}, \frac{dz}{dx} = \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} / \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}.$$

$$19. \frac{dx}{dz} = \frac{y-z}{x-y}, \frac{dy}{dz} = \frac{z-x}{x-y}.$$

$$20. \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v-x}{u-v}, \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x-u}{u-v}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v-y}{u-v}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y-u}{u-v}.$$

$$21. \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{xu+yv}{x^2+y^2}, \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{yu-xv}{x^2+y^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xv-yu}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{xu+yv}{x^2+y^2} \quad (x^2+y^2 > 0).$$

$$22. du = \frac{(\sin v + x \cos v) dx - (\sin u - x \cos u) dy}{x \cos v + y \cos u},$$

$$dv = \frac{-(\sin v - y \cos u) dx + (\sin u + y \cos u) dy}{x \cos v + y \cos u}.$$

$$23. \frac{dy}{dx} = 2\left(t + \frac{1}{t}\right), \frac{dz}{dx} = 3\left(t^2 + \frac{1}{t^2} + 1\right).$$

$$24. \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial v} / \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial y}{\partial u} / \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial x}{\partial v} / \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial u} / \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

$$25. \frac{dz}{dx} = \frac{2(x^2 - y^2)}{x - 2y}, \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{4x - 2y}{x - 2y} + \frac{6y}{(x - 2y)^3}.$$

$$26. \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{df}{du} \left( \frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial x} \right)}{\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{df}{du}}, \text{其中 } u = x + t.$$

$$28. \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial(h, f)}{\partial(z, t)} / \frac{\partial(g, h)}{\partial(z, t)}.$$

### 习题 6.5

$$2. \mathbf{r}' = (a \cos t, a \sin t, 2bt), \mathbf{r}'' = (-a \sin t, a \cos t, 2b).$$

3. 是简单曲线, 是光滑曲线

$$\text{切线: } \frac{x - \frac{1}{2}}{1} = \frac{y - 2}{-4} = \frac{z - 1}{8},$$

$$\text{法平面: } \left(x - \frac{1}{2}\right) - 4(y - 2) + 8(z - 1) = 0 \text{ 或 } 2x - 8y + 16z = 1.$$

$$6. \text{该点为 } (-1, 1, -1) \text{ 或者 } \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}\right).$$

$$7. \mathbf{r}'_{\theta} = (a \cos \theta \cos \varphi, b \cos \theta \sin \varphi, -c \sin \theta),$$

$$\mathbf{r}'_{\varphi} = (-a \sin \theta \sin \varphi, b \sin \theta \cos \varphi, 0),$$

$$\mathbf{n} = (bc \sin^2 \theta \cos \varphi, ac \sin^2 \theta \sin \varphi, ab \sin \theta \cos \theta).$$

$$8. \mathbf{r}'_u = (\cos v, \sin v, 0),$$

$$\mathbf{r}'_v = (-u \sin v, u \cos v, 1),$$

$$\mathbf{n} = (\sin v, -\cos v, u).$$

$$9. 17x + 11y + 5z = 60, \frac{x-3}{17} = \frac{y-4}{11} = \frac{z+7}{5}.$$

$$10. \mathbf{n} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right), \cos \theta = \frac{1}{3} \sqrt{6}.$$

$$11. x + 2y - 4 = 0, \mathbf{n} = (1, 2, 0).$$

$$12. 5x + 4y + z - 28 = 0, \frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-6}{1}.$$

$$13. x - y + 2z = \pm \sqrt{\frac{11}{2}}.$$

$$14. (-3, -1, 3), \frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{1}.$$

$$18. x + y - 2 = 0, y = x.$$

$$19. x + 2y - 1 = 0, 2x - y - 2 = 0.$$

$$20. \frac{x-1}{12} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-4}{3}, 12x - 4y + 3z - 12 = 0.$$

$$21. \frac{x+2}{27} = \frac{y-1}{28} = \frac{z-6}{4}, 27x + 28y + 4z + 2 = 0.$$

$$22. S = \frac{\pi}{2}(a^2 + 2), \text{其中 } a \text{ 是 } M_0 \text{ 点到单位圆圆心的距离.}$$

$$23. \text{最远点} \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \text{最近点} \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

$$24. abr.$$

$$25. abcr^2 \sin\theta.$$

### 习题 6.6

$$1. f(x, y) = 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2.$$

$$2. \Delta f = 15h^2 - 6hk + k^2 + h^3.$$

$$3. \Delta f = h - 3k + (-h^2 - 2hk + k^2) + (h^2k + hk^2).$$

$$4. f(x, y) = y + \frac{1}{2!}(2xy - y^2) + \frac{1}{3!}(3x^2y - 3xy^2 + 2y^3) +$$

$R_3.$

$$5. f(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{4}\left[\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right) + \left(y - \frac{\pi}{4}\right)^2\right] + R_2.$$

其中

$$R_2 =$$

$$-\frac{1}{6}\left[\cos\xi\sin\eta\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + 3\sin\xi\cos\eta\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\left(y - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$+ 3\cos\xi\sin\eta\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \sin\xi\cos\eta\left(y - \frac{\pi}{4}\right)^3 \Big]$$

$$6. x^y = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + R_2.$$

$$8. z = 1 + 2(x-1) - (y-1) - 8(x-1)^2 + 10(x-1)(y-1) - 3(y-1)^2 + R_2.$$

$$9. e^{x+y} = 1 + (x+y) + \frac{1}{2!}(x^2 + y^2 + 2xy) + \dots + \frac{1}{n!}[x^n + C_n^1 x^{n-1}y + \dots + y^n] + R_n$$

$$\text{其中 } R_n = \frac{e^{\theta(x+y)}}{(n+1)!}[x^{n+1} + C_{n+1}^1 x^n y + \dots + y^{n+1}], 0 < \theta < 1.$$

$$10. \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (x^2 + y^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2k+2}.$$

$$11. 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{8}(x^2 + y^2)^2 + R_2.$$

$$12. 1 + (x+y) + \dots + \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x-y} + R_n.$$

$$13. (1) \text{ 极大 } f(2, -2) = 8; (2) \text{ 极小 } f(5, 2) = 30;$$

$$(3) \text{ 极小 } f\left(\frac{1}{2}, -1\right) = -\frac{e}{2}; (4) \text{ 无极值.}$$

$$14. \text{ 极大 } z(1, -1) = 6, \text{ 极小 } z(1, -1) = -2.$$

$$15. (1) \text{ 极小 } u\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right) = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2};$$

$$(2) \text{ 极小 } u(3, 3, 3) = 9;$$

$$(3) \text{ 极大 } u\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{8};$$

$$(4) \text{ 有两个变量都等于 } \frac{1}{\sqrt{6}}, \text{ 第三个等于 } -\frac{2}{\sqrt{6}} \text{ 时, 有极小值 } -\frac{1}{3\sqrt{6}}; \text{ 有两个变量都等于 } -\frac{1}{\sqrt{6}}, \text{ 第三个等于 } \frac{2}{\sqrt{6}} \text{ 时, 有极大值 } \frac{1}{3\sqrt{6}}.$$

$$16. \left(\frac{21}{13}, 2, \frac{63}{26}\right).$$

18.  $a^3$ .

19.  $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right), \min A = ab$ .

20.  $x_0 = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, y_0 = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$ .

### 总复习题 6

1. 在  $x \neq y$  时, 或  $x = y = 2k\pi$  ( $k$  为整数) 时  $f(x, y)$  连续; 其它点间断.

4.  $f_x'(x, y, z) + f_y'(x, y, z) \cdot \varphi_x'(x, r) + f_z'(x, y, z)h_x'(x, y, r) + f_z'(x, y, z)h_y'(x, y, r) \cdot \varphi_x'(x, r)$ .

10.  $\mathbf{n} = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right)$ , 其中

$$\frac{\partial z}{\partial x} = F_x' - F_u' \cdot \frac{\frac{\partial(H, G)}{\partial(x, v)}}{\frac{\partial(H, G)}{\partial(u, v)}} - F_v' \cdot \frac{\frac{\partial(H, G)}{\partial(u, x)}}{\frac{\partial(H, G)}{\partial(u, v)}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = F_y' - F_u' \cdot \frac{\frac{\partial(H, G)}{\partial(y, v)}}{\frac{\partial(H, G)}{\partial(u, v)}} - F_v' \cdot \frac{\frac{\partial(H, G)}{\partial(u, y)}}{\frac{\partial(H, G)}{\partial(u, v)}}$$

11. (1) 极大  $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ , 极小

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}};$$

(2) 极大  $f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$ ;

(3) 极大  $u(\sqrt{3}a, \sqrt{3}a, \sqrt{3}a) = \frac{\sqrt{3}}{a}$ ,

极小  $u(-\sqrt{3}a, -\sqrt{3}a, -\sqrt{3}a) = -\frac{\sqrt{3}}{a}$ .

12. 极大  $z\left(\frac{16}{7}, 0\right) = -\frac{8}{7}$ , 极小  $z(-2, 0) = 1$ .

13.  $\frac{7}{4\sqrt{2}}$ .

14. 当  $n$  个正数都等于  $\frac{a}{n}$  时, 乘积最大.

15.  $H = 2R = 2\sqrt{\frac{s}{3\pi}}$ .

### 习题 7.1

1. (1)  $\int_a^b dx \int_c^{c+x} f(x, y) dy$  或

$$\int_c^{c+a} dy \int_a^b f(x, y) dx + \int_{c+a}^{c+b} dy \int_{y-c}^b f(x, y) dx;$$

(2)  $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$  或  $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx;$

(3)  $\int_0^2 dx \int_{1-\sqrt{2x-x^2}}^{1+\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$  或  $\int_0^2 dy \int_{1-\sqrt{2y-y^2}}^{1+\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx;$

(4)  $\int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} f(x, y) dy$  或

$$\int_0^1 dy \int_{\frac{y}{2}}^{2y} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y}{2}} f(x, y) dx.$$

2. (1)  $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx;$

(2)  $\int_0^4 dy \int_0^{\frac{y}{2}} f(x, y) dx + \int_4^6 dy \int_0^{6-y} f(x, y) dx;$

(3)  $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} f(x, y) dx;$

(4)  $\int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y) dy;$

(5)  $\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy;$

$$(6) \int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy.$$

$$3. (1) \int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x, y) dx;$$

$$(2) \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx;$$

$$(3) \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx;$$

$$(4) \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^y f(x, y) dx.$$

$$4. (1) 0; \quad (2) 2 \frac{2}{3}; \quad (3) 0; \quad (4) \frac{2}{15}.$$

$$5. (1) \frac{3}{2}; \quad (2) \ln \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}; \quad (3) (e-1)^2; \quad (4) \frac{\pi}{12};$$

$$(5) -2; \quad (6) 1 \frac{11}{21}; \quad (7) \frac{2}{3} a^3; \quad (8) a^2(7a-2); \quad (9) 1 - \sin 1 \\ \approx 0.1585; \quad (10) -\frac{\pi}{16}; \quad (11) \frac{9}{4}.$$

$$6. (1) \frac{\pi}{4} [(1+R^2)\ln(1+R^2) - R^2]; \quad (2) \frac{1}{15}; \quad (3) \frac{3}{4} \pi R^4;$$

$$(4) \frac{R^3}{2}; \quad (5) \frac{2}{9} a^3.$$

$$7. (1) \frac{2\pi}{3}; \quad (2) \frac{\pi}{2} (b^4 - a^4); \quad (3) \frac{8}{9} \sqrt{2};$$

$$(4) \frac{8}{3} ab \arctan \frac{a}{b}; \quad (5) \frac{3\pi}{16}.$$

$$8. (1) \frac{9}{8}; \quad (2) \frac{1}{3} (a-b)(m-n); \quad (3) \frac{1}{6} (b^2 - a^2) \ln \frac{d}{c};$$

$$(4) \frac{\pi}{4}.$$

$$9. f(0, 0).$$

$$10. (1) \frac{3\sqrt{2}}{2} \left( \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \arcsin \sqrt{\frac{1}{3}} \right) - \ln 2; \quad (2) 2a^2 \pi;$$

(3)  $\frac{3}{8}\pi a^2$ ; (4)  $\frac{1}{6}a^2$ ; (5)  $\pi a^2$ ; (6)  $\frac{5}{8}\pi a^2$ ; (7)  $\frac{a^2 b^2}{2c^2}$ ;

(8)  $\frac{b^2 - a^2}{2} \frac{m - k}{(m + 1)(k + 1)}$ .

12. (1)  $2\pi$ ; (2) 当  $\alpha > 2$  时,  $\frac{1}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}$ ; 当  $\alpha \leq 2$  发散.

### 习题 7.2

1. (1)  $-\frac{9}{8}$ ; (2)  $\frac{1}{364}$ ; (3)  $\frac{19}{18}$ ; (4)  $\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$ ; (5)  $\frac{1}{2}$ ;

(6) 0; (7) 0; (8)  $\frac{1}{8}a^4$ .

2. (1)  $\frac{8}{9}a^2$ ; (2)  $\frac{4}{15}\pi R^5$ ; (3)  $\frac{\pi}{8}$ ; (4)  $\frac{\pi}{15}(2\sqrt{2} - 1)$ .

3. (1)  $\frac{1}{3}\pi a^3$ ; (2)  $\frac{8}{5}\pi abc$ ; (3)  $\frac{\sqrt{2}}{8}\pi^2 a^3$ ; (4)  $\frac{1}{2}$ ;

(5)  $\frac{\pi^2}{4}abc$ ; (6)  $2\pi abc$ .

4. (1)  $\frac{16\pi}{3}$ ; (2)  $\frac{\pi}{6}$ ; (3) 0; (4)  $\frac{1}{48}$ ; (5)  $\frac{13}{4}\pi$ ;

(6)  $\frac{\pi}{10}$ ; (7)  $\frac{4}{15}\pi(R^5 - r^5)$ ; (8)  $\frac{\pi^2}{4}abc$ ; (9)  $\frac{\pi}{3}$ ; (10)  $\frac{7}{216}$ .

5. (1) 12; (2)  $3\pi$ ; (3)  $\pi a^3$ ; (4)  $\frac{\pi}{3}(2 - \sqrt{2})(b^3 - a^3)$ ;

(5)  $\frac{3}{35}$ ; (6)  $\frac{2}{3}(2 - \sqrt{2})\pi abc$ ; (7)  $8\frac{1}{6}$ ; (8)  $\frac{3\pi}{2}$ ;

(9)  $\frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)R^3$ ; (10)  $4\frac{1}{2}$ .

6.  $\bar{f} = \frac{6}{5}$ .

### 习题 7.3

1. (1)  $\sqrt{3}(e^{2\pi} - 1)$ ; (2) 5; (3)  $a \ln(1 + \sqrt{2}) = a \ln \tan \frac{3\pi}{8}$ ;

(4)  $4a$ ; (5)  $z\sqrt{2}$ .

2. (1)  $\frac{256}{15}a^3$ ; (2)  $1 + \sqrt{2}$ ; (3)  $\sqrt{5}\ln 2$ ; (4)  $4\pi a\sqrt{a}$ ;

(5)  $2(e^a - 1) + \frac{\pi}{4}ae^a$ ; (6)  $\frac{2ka^2\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$ ; (7)  $\frac{8\sqrt{2}}{3}a\pi^3$ ;

(8)  $2\sqrt{2}\pi^2 + \frac{3}{2}$ ; (9)  $\frac{1}{3}[(2+t_0^2)^{3/2} - 2^{3/2}]$ ; (10)  $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$ ;

(11)  $2\pi a^{2n+1}$ ; (12)  $\frac{2\pi a^3}{3}$ .

3.  $\sqrt{3}(1 - e^{-t})$ .

#### 习题 7.4

1. (1)  $\sqrt{2}\pi$ ; (2)  $2a^2$ ; (3)  $\frac{\pi}{6}[(1+R^2)^{3/2} - 1]$ ;

(4)  $4\pi R(R - \sqrt{R^2 - \rho^2})$ ; (5)  $8a^2$ ; (6)  $\frac{2}{3}\pi ab[(1+c^2)^{3/2} -$

$1]$ ; (7)  $\frac{16}{3}\pi a^2$ ; (8)  $\frac{\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$ ; (9)  $8\pi$ ; (10)  $\frac{\pi a^2}{2}$ .

2.  $\pi \left[ a\sqrt{a^2+h^2} + h^2 \ln \frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{h} \right]$ .

3.  $a(\varphi_2 - \varphi_1)[b(\psi_2 - \psi_1) + a(\sin\psi_2 - \sin\psi_1)]$ ;  $4\pi^2 ab$ .

4.  $\frac{\pi^2 a^2}{2}$ .

5.  $V = \frac{4}{9}a^2h$ ;  $S = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2ah + \frac{\pi}{4}a^2\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}$ .

6. (1)  $\frac{8}{3}\pi R^4$ ; (2)  $\pi a^3$ ; (3)  $9$ ; (4)  $\frac{\sqrt{3}}{120}$ ; (5)  $\frac{\pi}{2}(1 +$

$\sqrt{2})$ ; (6)  $\frac{3-\sqrt{3}}{2} + (\sqrt{3}-1)\ln 2$ ; (7)  $\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$ ; (8)  $6\sqrt{61}$ ;

(9)  $2\pi \arctan \frac{H}{R}$ ; (10)  $\sqrt{2}\pi$ .

### 习题 7.5

1.  $\frac{2}{15}(1 + 6\sqrt{3})\pi.$

2.  $\frac{\pi}{2}ab.$

3.  $2\pi r(R - r).$

4. 取圆盘中心为坐标原点,  $x$  轴正向通过小圆中心, 则

$$x_G = \frac{-6a}{5(3\pi - 2)}, y_G = 0.$$

5. 重心  $G(0, 0, \frac{4}{3\pi}R).$

6.  $b = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$

7.  $2k\pi(R^2 - r^2).$

8.  $x_G = y_G = 0, z_G = \frac{3}{4}c.$

9.  $x_G = y_G = 0, z_G = \frac{4}{5}a.$

10.  $\frac{\sqrt{2}}{2}a.$

11.  $\frac{4}{9}MR^2.$

12. (1)  $\frac{1}{12}ml^2, \frac{1}{3}ml^2;$

(2)  $\frac{1}{2}mR^2, \frac{1}{4}mR^2;$

(3)  $\frac{2}{5}mR^2, \frac{7}{5}mR^2.$

13.  $\frac{8}{3}\pi\rho R^4.$

$$15. I_x = I_y = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3}\right) \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}, I_z = a^2 \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}.$$

$$16. F_x = 0, F_y = \frac{2k\rho m}{a}.$$

17. 取圆心为坐标原点, 细棒在  $z$  轴的正方向上, 则

$$F_x = F_y = 0,$$

$$F_z = -2\pi k\rho\mu [1 + \sqrt{R^2 + a^2} - \sqrt{R^2 + (a+l)^2}].$$

18. 取锥体顶点为坐标原点,  $z$  轴正向为锥体轴线, 则

$$F_x = F_y = 0, F_z = k\pi\rho R \sin^2 \alpha.$$

19. 当质点在球壳内部, 引力等于零; 当质点在球壳外部, 则引力象把球壳质量集中于球心时一样.

$$20. F_x = F_y = 0, F_z = k\pi\rho m \ln \frac{b}{a}.$$

### 总复习题 7

$$1. (1) \frac{2}{15}\pi abc(3-\sqrt{5}); \quad (2) \frac{88}{105}; \quad (3) \frac{2}{3}abc; \quad (4) 16\frac{1}{5}.$$

$$2. 3(e-2).$$

$$3. \frac{8}{|\Delta|} h_1 h_2 h_3, \text{ 其中 } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

4. 圆周  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$  和圆周  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  所围在  $0 \leq y \leq 1$  内的那一部分区域.

$$5. \frac{7}{3}\pi(2-\sqrt{2}).$$

$$6. x_G = y_G = 0, z_G = \frac{1}{8}.$$

$$7. \left(0, 0, \frac{47}{140}\right).$$

$$8. 4\pi.$$

### 习题 8.1

1.  $-\frac{3}{\sqrt{11}}$ .

2.  $\sqrt{3} + 5$  及  $-\sqrt{3} - 5$ .

3.  $\frac{1}{2}$ .

4.  $\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\max} = 2\sqrt{14}$ ,  $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,1,-1)} = 3\sqrt{2}$ .

5.  $\text{grad}u|_{(1,1,-1)} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$ ,  $\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\max} = 3\sqrt{21}$ .

6.  $\text{grad}u|_{(1,1)} = (1, 1)$ ,  $\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{(1,1)} = \cos\alpha + \cos\beta$ ,

沿方向  $\mathbf{l} = \pm(1, 1)$  分别达到最大(小)值  $\pm\sqrt{2}$ , 沿方向  $\mathbf{l} = \pm(1, -1)$  等于 0.

7. (1)  $-\frac{2}{r^4}\mathbf{r}$ ; (2)  $\frac{1}{r^2}\mathbf{r}$ .

8.  $\text{grad}\varphi|_{(1,2,4)} = \left(-\frac{1}{21}, -\frac{2}{21}, -\frac{4}{21}\right)$ ,

$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial l}\right|_{(1,2,4)} = -\frac{\sqrt{3}}{9}$ .

9. 球面  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 1$  上的所有点.

12.  $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\text{grad}u \cdot \text{grad}v}{|\text{grad}v|}$ ; 当  $\text{grad}u \perp \text{grad}v$  时  $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$ .

### 习题 8.2

1. (1)  $\frac{1}{12}$ ; (2)  $\frac{1}{12}$ ; (3)  $\frac{1}{12}$ ; (4)  $\frac{1}{4}$ .

2. (1) 0; (2) 0; (3)  $\frac{4}{3}\pi abc$ ; (4) 0.

3.  $\frac{2}{105}\pi R^7$ .

4.  $\frac{1}{3}R^3h^2$ .

5. 0.

6.  $abc \left[ \frac{f(a) - f(0)}{a} + \frac{g(b) - g(0)}{b} + \frac{h(c) - h(0)}{c} \right]$ .

7.  $\frac{1}{3}abc(a^2 + 3)$ .

8.  $\frac{2}{5}\pi a^5$ .

9. (1) 6; (2) 1; (3) 8; (4)  $2x\sin y + 2y\sin(xz) - xysin z \cos(\cos z)$ .

10. (1)  $\omega^2 = \omega \cdot \omega$ ; (2)  $4\omega \cdot r$ ; (3)  $\frac{2}{r}$ ; (4) 0; (5)  $2r \cdot \omega$ ; (6)  $3f(r) + f'(r)r$ .

11. (1)  $2xy^2(3y^2z^2 + 6x^2z^2 + x^2y^2)$ ;

(2)  $e^{x+y+z}(3xyz + 2xy + 2zx + 2yz)$ .

12. (1)  $\frac{12}{5}\pi R^5$ ; (2)  $\frac{1}{8}$ ; (3)  $4\pi abc$ ; (4)  $\frac{\pi}{2}$ ;

(5)  $\frac{8}{3}\pi(a+b+c)R^3$ ; (6)  $\frac{1}{2}$ ; (7)  $\frac{\pi}{15}$ ; (8)  $\frac{\pi}{2}a^4$ .

13. (1)  $-4\pi km$ ; (2) 0; (3)  $-2\pi km$ .

14.  $4\pi a$ .

15. (1)  $4\pi\varphi(1)$ ; (2)  $\varphi(r) \equiv 1$ .

16.  $\frac{4\pi}{abc}(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)$ .

17.  $\pi$ .

18.  $\frac{4}{5}\pi R^5$ .

19.  $\pi ab$ .

### 习题 8.3

1.  $-\frac{14}{15}$ .

2.  $\frac{1}{2}k(a^2 - b^2)$ .

3. 3.

4.  $\frac{4}{3}$ .

5. 0.

6.  $\frac{1}{35}$ .

7. 0.

8. 1.

9.  $e(\sqrt{e} - 1)$ .

10. (1)  $-2\sqrt{2}\pi$ ; (2)  $-\pi$ .

11. (1)  $-12$ ; (2) 0; (3)  $\frac{1}{2}\pi R^4$ ; (4) 0; (5)  $\frac{4}{15}$ ;

(6)  $\frac{2}{3}$ ; (7)  $\frac{\pi m a^2}{3}$ ; (8)  $mS + [f(y_2) - f(y_1)] + m(y_1 - y_2)$ .

12. (1)  $-\frac{3}{2}$ ; (2)  $\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi a^3$ ; (3)  $-2\pi a(a + h)$ ;

(4)  $-\frac{9a^3}{2}$ ; (5) 0; (6)  $\sqrt{3}\pi a^2$ .

13.  $-\frac{\pi R^6}{8}$ .

14. (1)  $\operatorname{rot} v = -2(xi + xj + yK)$ ;

(2)  $\operatorname{rot} v = x(z - y)i + y(x - z)j + z(y - x)K$ ;

(3)  $\operatorname{rot} A = -i + j$ ;

(4)  $\operatorname{rot} E = 2ze^y j - (1 + xe^y)K$ .

15. 最大涡量  $= 2\sqrt{3}$ ; 绕方向  $(1, 1, 0)$  的涡量  $= -2\sqrt{2}$ .

16. 最大涡量  $= \sqrt{2}$ ; 绕方向  $(1, 0, 1)$  的涡量  $= \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

17. 最大涡量  $= \sqrt{3}$ ; 最小涡量  $= -\sqrt{3}$ .

18. (1)  $2\boldsymbol{\omega}$ ; (2) 0; (3)  $\frac{f'(r)}{r}(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega})$ ; (4) 0.

20.  $-4\pi a^2$ .

21.  $\sqrt{3}\pi R^2$ .

22. 当闭曲线不围绕原点时,  $\Gamma = 0$ ; 当沿围绕原点的闭曲线反时针方向时,  $\Gamma = 4\pi I$ ; 当原点在光滑闭曲线上,  $\Gamma = 2\pi I$ .

23. (1)  $\frac{3\pi}{8}a^2$ ; (2)  $3\pi a^2$ .

24. (1) 0; (2)  $2\pi Rr^2$ .

#### 习题 8.4

1. (1)  $\text{rot}\mathbf{F} \neq 0$ , 曲线积分与路径有关,

$$-1, \frac{1}{3}, 0, 1.$$

(2)  $\text{rot}\mathbf{F} = 0$ , 曲线积分与路径无关, 都等于 1.

2. (1)  $\varphi = x^2 \cos y + y^2 \cos x$ ;

(2)  $\varphi = x^2 yz + y^2 zx + z^2 xy$ ;

(3)  $\varphi = \frac{1}{r}$ ;

(4)  $\varphi = \frac{1}{4}r^4$ ;

(5)  $\varphi = x^2 yz^2 + \sin yz$ .

3. (1)  $-4a^2$ ; (2)  $\frac{h^3}{3}$ .

4.  $\alpha = 1, \varphi = \frac{1}{3}x^3 + 5xy + 3xyz - 2y - 2z^2$ .

5.  $f(y, z) = yz + c, \varphi = xyz + c.$

6.  $\varphi = \int_{r_0}^r f(r) dr, r_0$  可以任意取定.

7.  $\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i}, r_i = |\mathbf{r}_i|, \mathbf{r}_i = \overrightarrow{M_i M}, M$  是空间中异于  $M_i$  的任

意点.

8. (1) 8; (2) 9; (3) -49; (4) 2.

9. (1)  $u = x^3 + 3x^2y^2 - y^4 + c;$  (2)  $u = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz + c.$

11.  $\frac{3}{2}.$

13. 当  $f(r) = \frac{c}{r^3} (r \neq 0)$  时,  $\mathbf{F}$  是无源场, 其中  $c$  是任意常数.

14.  $\left(\frac{1}{2}z^2 - zx\right)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}z^2 - xy - yz\right)\mathbf{j}.$

15.  $a = 2, b = -1, c = -2,$

$(-yz + xy^2z)\mathbf{i} - (xz^2 + x^2z)\mathbf{j}.$

### 习题 8.5

1. (1)  $f(r)\boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r};$

(2) 0;

(3)  $(2f(r) + rf'(r))\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}.$

### 习题 8.6

1. (1)  $7z^2 dy \wedge dz - x dz \wedge dx - (x \sin 3x + 7yz^2) dx \wedge dy;$

(2)  $dx \wedge dy;$

(3)  $-21 dx \wedge dy \wedge dz.$

2. (1)  $(-\cos x + \sin y) dx \wedge dy;$

(2) 0;

(3)  $(x+6)dx \wedge dy \wedge dz$ .

### 习题 8.7

1.  $\eta = \text{常数}$ , 椭圆柱面;  $\varphi = \text{常数}$ , 抛物柱面;  $z = \text{常数}$ , 平面.

若  $q_1 = \eta, q_2 = \varphi, q_3 = z$ , 则:

$$H_1^2 = H_2^2 = a^2(\text{ch}^2 \eta - \cos^2 \varphi), H_3 = 1;$$

$$\text{gradu} = \frac{1}{a(\text{ch}^2 \eta - \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \eta} e_\eta + \frac{\partial u}{\partial \varphi} e_\varphi \right\} + \frac{\partial u}{\partial z} e_z;$$

$$\begin{aligned} \text{divv} &= \frac{1}{a(\text{ch}^2 \eta - \cos^2 \varphi)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} [(\text{ch}^2 \eta - \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} \cdot v_\eta] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \varphi} [(\text{ch}^2 \eta - \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} \cdot v_\varphi] \right\} + \frac{\partial v_z}{\partial z}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{rotv} &= \frac{1}{\text{ch}^2 \eta - \cos^2 \varphi} \\ &\cdot \begin{vmatrix} (\text{ch}^2 \eta - \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} e_\eta & (\text{ch}^2 \eta - \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} e_\varphi & \frac{1}{a} e_z \\ \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (\text{ch}^2 \eta - \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} v_\eta & (\text{ch}^2 \eta - \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} v_\varphi & \frac{1}{a} v_z \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

2.  $\eta = \text{常数}$ , 旋转椭球面;  $\theta = \text{常数}$ , 双叶双曲面;  $\varphi = \text{常数}$ , 半平面.

当  $q_1 = \eta, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$ , 则:

$$H_1^2 = H_2^2 = a^2(\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta), H_3^2 = a^2 \text{sh}^2 \eta \sin^2 \theta;$$

$$\text{gradu} = \frac{1}{a(\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} \left[ \frac{\partial u}{\partial \eta} e_\eta + \frac{\partial u}{\partial \theta} e_\theta \right] + \frac{1}{a \text{sh} \eta \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} e_\varphi;$$

$$\begin{aligned} \text{divv} &= \frac{1}{a(\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)} \left\{ \frac{1}{\text{sh} \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} [(\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}} \text{sh} \eta \cdot v_\eta] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [(\text{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}} \sin \theta \cdot v_\theta] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{a \operatorname{sh} \eta \cdot \sin \theta} \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \varphi}; \\
\operatorname{rot} v &= \frac{1}{a(\operatorname{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta) \operatorname{sh} \eta \cdot \sin \theta} \\
& \cdot \begin{vmatrix} (\operatorname{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}} e_{\eta} & (\operatorname{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}} e_{\theta} & \operatorname{sh} \eta \sin \theta e_{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ (\operatorname{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}} v_{\eta} & (\operatorname{sh}^2 \eta + \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}} \cdot v_{\theta} & \operatorname{sh} \eta \sin \theta \cdot v_{\varphi} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

### 总复习题 8

1.  $2\pi$ .
2.  $4\pi$ .
3.  $f(x) = 1 = g(x); xz(1+y)$ .

### 习题 9.1

7. (1) 散 (2) 敛 (3) 散 (4) 散 (5) 敛 (6) 散  
 (7) 散 (8) 散 (9) 敛 (10) 敛 (11) 敛 (12) 敛  
 (13) 敛 (14)  $k > 1$ , 敛;  $k \leq 1$ , 散 (15) 敛 (16)  $a < 1$ , 敛;  
 $a \geq 1$ , 散

8. (1) 对任意  $x$  都收敛 (2) 敛 (3) 敛 (4) 敛

9. (1) 绝对收敛 (2) 绝对收敛 (3) 条件收敛 (4) 条件收敛  
 (5) 条件收敛 (6)  $p > 1$ , 绝对收敛;  $0 < p \leq 1$ , 条件收敛;  
 $p \leq 0$ , 发散

### 习题 9.2

1. (1)  $x > 0$  (2)  $|x| < e$  (3)  $|x| \leq 1$  (4)  $x \geq 0$   
 (5)  $x > 0$  (6)  $|x| > \frac{1}{2}$  (7)  $0 < x < 6$  (8)  $|x| < 1$

2. (1) 一致收敛 (2) 一致收敛 (3) a) 一致收敛 b) 不

一致收斂 (4) 一致收斂 (5) 一致收斂 (6) 不一致收斂  
 (7) 一致收斂 (8) 一致收斂

5.  $1$  及  $-\frac{1}{4}$ .

6.  $\frac{1}{2}$

习题 9.3

1. (1) 2 (2) 1 (3) 1 (4) 4 (5)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (6)  $\max(a, b)$

2. (1)  $\arctan x, -1 \leq x \leq 1$  (2)  $\frac{1}{(1-x)^2}, -1 < x < 1$

(3)  $\frac{2}{(1-x)^3}, |x| < 1$  (4)  $1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x), |x| \leq 1$

(5)  $e^{\frac{1}{2}x^2} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$

3. (1)  $-3 + 4(x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3, |x| < +\infty$

(2)  $e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n! a^n}, |x| < +\infty$

(3)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}, 0 < x \leq 2$

(4)  $\frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^n}{n!}, |x| < +\infty$

(5)  $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}, |x| < 1$

(6)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n - 1}{n} x^n, -\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}$

(7)  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) (x+4)^n, -6 < x < -2$

4. (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, |x| < +\infty$

$$(2) x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, |x| \leq 1$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, |x| < 1$$

$$(4) x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}, |x| \leq 1$$

$$5. (1) c + \ln |x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!n}, x \neq 0$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(2n)!(4n+1)}, |x| < +\infty$$

$$6. y(x) \approx \frac{1}{1+\lambda}x + \frac{\lambda}{3!(1+\lambda)^4}x^3$$

#### 习题 9.4

1.  $0.24488, 10^{-5}$

2. (1) 0.487 (2) 0.494

3. (1) 1 (2) e

4. (1) 发散 (2)  $p > \frac{3}{2}$ , 收敛;  $p \leq \frac{3}{2}$ , 发散

#### 总复习题 9

3. (1) 绝对收敛 (2) 条件收敛 (3) 条件收敛 (4) 条件收敛 (5) 绝对收敛 (6) 条件收敛 (7)  $|a| > 1$ , 绝对收敛;  $|a| = 1$ , 条件收敛;  $|a| < 1$ , 发散 (8)  $a > e$ , 绝对收敛;  $1 < a \leq e$ , 条件收敛;  $0 < a \leq 1$ , 发散

4. (1) 一致收敛 (2) 一致收敛

9. (1)  $\frac{1}{3} \left( \ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right)$  (2)  $5e$

10. (1)  $\frac{x}{(x-1)^2}, |x| > 1$

$$(2) \frac{3(x+4)}{(2-x)^3}, -4 < x < 2$$

$$(3) \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}, |x| < \sqrt{2}$$

$$(4) \frac{x-1}{2(x+1)} \ln \frac{1+x}{2}, x \geq 0$$

$$11. (1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}, |x| \leq 1$$

$$(2) x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, |x| \leq 1$$

$$(3) \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{x^{4n+2}}{2^{4n+2}}, |x| \leq 2$$

$$12. (1) c + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}, |x| < +\infty$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1}, |x| < +\infty$$

$$(3) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$(4) 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

### 习题 10.1

1. (1) 收敛 (2) 发散 (3) 收敛 (4) 收敛 (5) 发散  
 (6) 发散 (7) 收敛 (8) 收敛 (9) 发散 (10) 收敛  
 (11) 收敛 (12) 发散 (13) 收敛 (14) 收敛 (15) 发散  
 (16)  $p > 1$  时收敛,  $p \leq 1$  发散 (17)  $0 < \alpha < 1$ , 收敛  
 (18)  $1 < \mu < 2$ , 收敛

3. (1) 绝对收敛 (2) 条件收敛 (3) 条件收敛 (4) 绝对收敛

### 习题 10.2

1. (1) 1 (2)  $\frac{\pi}{4}$

2. (1)  $\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} \sqrt{1-x^2} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}} dx - (\sin\alpha \cdot e^{x|\sin\alpha|} + \cos\alpha \cdot e^{\alpha|\cos\alpha|})$

(2)  $\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{b+\alpha}\right) \sin[\alpha(b+\alpha)] - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{a+\alpha}\right) \sin[\alpha(a+\alpha)]$

(3)  $\frac{2}{\alpha} \ln(1+\alpha^2)$

(4)  $\int_0^a [f_u'(u,v) - f_v'(u,v)] dx + f(2\alpha, 0)$  其中  $u = x + \alpha$ ,

$v = x - \alpha$

4. (1)  $\pi \ln \frac{|a| + |b|}{2}$

(2) 当  $|a| \leq 1$ , 为 0; 当  $|a| > 1$ , 为  $\pi \ln a^2$

(3)  $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha \ln(1 + |\alpha|)$

(4)  $\pi \arcsin a$

### 习题 10.3

1. (1) 处处发散 (2)  $u < -1$  (3)  $u > 1$  (4)  $u < 1$   
 (5)  $0 < \alpha < 3$  (6)  $1 < \alpha < 3$

2. (1) 一致收敛 (2) a) 一致收敛 b) 非一致收敛  
 (3) 非一致收敛 (4) 非一致收敛 (5) 一致收敛 (6) 一致收敛

5. (1)  $\ln \frac{\beta+1}{\alpha+1}$  (2)  $\ln(a+1)$  (3)  $\sqrt{\pi a}$  (4)  $\frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{\alpha}$

(5)  $\frac{\pi}{2} \ln(1+a)$ , 当  $a \geq 0$ ;  $-\frac{\pi}{2} \ln(1-a)$ , 当  $a < 0$  (6)  $\sqrt{\pi}(b-a)$

6. (1)  $a$  (2)  $-\sigma^2$  (3)  $\frac{\pi}{2}$ , 当  $a > b$ ;  $\frac{\pi}{4}$ , 当  $a = b$ ;  $0$ , 当  $a < b$   
 (4)  $\frac{\pi}{2}$  (5)  $\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$  (6)  $\frac{\pi}{4}$

### 习题 10.4

2. (1)  $\frac{\pi}{8}$  (2)  $\frac{a^4}{16}\pi$  (3)  $\frac{3}{512}\pi$  (4)  $\frac{1}{m}B\left(\frac{n}{m}, q\right)$   
 (5)  $\frac{1}{\sqrt{a}}$  (6)  $\frac{\pi}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}$  (7)  $\sqrt{2\pi}$  (8)  $(b-a)p \cdot \frac{\pi}{\sin p\pi}$   
 3.  $\frac{a^2}{2n}\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)/\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)$

### 总复习题 10

7. (1)  $\frac{1}{2}\arctan\alpha \cdot \ln(1+\alpha^2)$  (2)  $\frac{\pi}{4}$  (3)  $2a\ln 2$   
 (4)  $\frac{1}{2}\ln\frac{m^2+\beta^2}{m^2+\alpha^2}$  (5)  $\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})$   
 8. (1)  $\frac{\pi}{4}$  (2)  $\frac{n!}{2}$  (3)  $\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2a^{2n-1}}$   
 (4)  $\frac{\pi^2}{4}\frac{\sin\frac{\pi a}{2}}{\cos^2\frac{\pi a}{2}}$  (5)  $1$  (6)  $1$

### 习题 11.1

1. (1)  $|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1} (-\infty < x < \infty)$   
 (2)  $-\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n - 1}{n} \cos nx + \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin nx \right]$

$$= \begin{cases} -\pi, & -\pi \leq x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \\ 0, & x = \pm \pi \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

$$(3) x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos nx \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

$$(4) \cos \frac{x}{2} = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2 - 1} \cos nx \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

$$(5) f(x) = \frac{1 + \pi - e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1 - (-1)^n e^{-\pi}}{1 + n^2} \cos nx + \left[ \frac{-n + (-1)^n n e^{-\pi}}{1 + n^2} + \frac{1}{n} (1 - (-1)^n) \right] \sin nx \right\} \quad (-\pi < x < \pi)$$

$$2. (1) 1 - \sin \frac{x}{2} = 1 - \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{16n^2 - 1} \cos 2nx + \frac{4n}{16n^2 - 1} \sin 2nx \right] \quad (0 < x < \pi)$$

$$(2) \frac{x}{3} = \frac{T}{6} - \frac{T}{3\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{2n\pi x}{T} \quad (0 < x < T)$$

$$(3) e^{ax} = 2\text{sh}(al) + \left[ \frac{1}{2al} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \pi^2 + a^2 l^2} \left( al \cos \frac{n\pi x}{l} - n\pi \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \right] \quad (-l < x < l)$$

$$(4) \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cos \frac{(2n-1)\pi}{2} x = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ -1, & 1 < |x| \leq 2 \\ 0, & x = \pm 1 \end{cases}$$

$$(5) f(x) = \frac{2}{3} - \frac{3}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n-1} \cos \frac{n\pi}{3}}{n^2} \cos \frac{2n\pi}{3} x \quad (0 \leq x \leq$$

3)

$$3. (1) f(x) = 1 - \frac{1}{2} \cos x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - 1} \cos nx \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \sin x - \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2 - 1)^2} \sin 2nx \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

$$(2) f(x) = \frac{2}{3} \pi^2 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\frac{2}{n^3} + (-1)^n \left( \frac{2}{n^3} - \frac{\pi^2}{n} \right) \right] \sin nx \quad (0 \leq x < \pi)$$

$$(3) f(x) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos \frac{(2n+1)\pi}{l} x$$

$$(0 \leq x < \frac{l}{2}, \frac{l}{2} < x \leq l)$$

$$f(x) = \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \frac{n\pi}{2}}{n} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (0 < x < \frac{l}{2}, \frac{l}{2} < x < l)$$

$$(4) f(x) = \frac{h}{\pi} + \frac{1}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos 2nh}{n^2} \cos nx \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nh - \sin 2nh}{n^2} \sin nx \quad (0 < x \leq \pi)$$

$$6. 1 - x^2 = \left(1 - \frac{\pi^2}{3}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} 4 \cos nx \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

$$(1) \frac{\pi^2}{12} \quad (2) \frac{\pi^4}{90}$$

$$7. \operatorname{sgn} x = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \quad (0 < |x| < \pi); \frac{\pi}{4}$$

$$8. \frac{H\tau}{T} + \left( \sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \right) \frac{H}{k\pi} \sin \frac{k\pi\tau}{T} e^{i\frac{2k\pi x}{T}}$$

$$9. f(x) = \frac{a}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin na \cos nx$$

$$(1) \frac{a(\pi - a)}{2} \quad (2) \frac{\pi^2 - 3\pi a + 3a^2}{6}$$

习题 11.2

$$2. \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n 4l}{(2n+1)\pi} - \frac{8l}{(2n+1)^2 \pi^2} \right] \cos \frac{2n+1}{2l} \pi x$$

习题 11.3

$$1. (1) \int_0^{+\infty} (A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda = \begin{cases} f(x), & x \neq T \\ \frac{kT}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

$$\text{其中 } A(\lambda) = \frac{k}{\pi \lambda^2} [\lambda T \sin \lambda T + \cos \lambda T - 1], B(\lambda) = \frac{k}{\pi \lambda^2} [\sin \lambda T$$

$$- \lambda T \cos \lambda T]$$

$$(2) \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} (1 - \cos \lambda) \sin \lambda x d\lambda$$

$$(3) \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-a\lambda} \cos \lambda x d\lambda$$

$$2. (1) \frac{4ia\lambda}{(a^2 + \lambda^2)^2}$$

$$(2) \frac{a}{(\lambda - b)^2 + a^2} + \frac{a}{(\lambda + b)^2 + a^2}$$

$$(3) \frac{2 \cos \frac{\lambda}{2} \pi}{1 - \lambda^2}$$

$$3. (1) \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{1 + \lambda^2} d\lambda = e^{-x} (x \geq 0)$$

$$(2) \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda \sin \lambda x}{1 + \lambda^2} d\lambda = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$5. -\frac{2\beta x i}{\pi(\beta^2 + x^2)^2}$$

### 总复习题 11

4.  $-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x$

5.  $G(\lambda) = -2\sin\lambda\pi/\lambda^2 - 1$

### 习题 12.1

1. (1)  $y = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - x - 1$  (2)  $y = \frac{1}{2}e^x$

2.  $y = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} + \frac{x^{11}}{4400}$

3. 0.31

### 习题 12.2

1. (1) 无关 (2) 无关 (3) 相关 (4) 无关

2.  $y'' - 2\cot 2xy' = 0$

3. (1)  $y = \frac{1}{x}(c_1 \sin x + c_2 \cos x)$

(2)  $y = c_2 + (c_1 - c_2 x) \cot x$

(3)  $y = c_1 x \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c_2 x - 2c_2$

(4)  $y = c_1(4x^3 - 3x) + c_2 \sqrt{1-x^2}(4x^2 - 1)$

4. (1)  $y = c_1 x + c_2 x^2$

(2)  $y = c_1 e^x + c_2(x+1)$

(3)  $y = c_1 x + c_2(x^2 - 1)$

(4)  $y = c_1 \sin x + c_2 \left( 1 - \sin x \ln \left| \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| \right)$

5.  $y = x^2 - e^{x-1}$

6. (1)  $c_1 + c_2 x^2 + x^3$

(2)  $c_1 e^x + c_2 x - (x^2 + 1)$

$$(3) c_1 e^{-x^2} + c_2 x e^{-x^2} + \frac{x^2}{2} e^{-x^2}$$

$$(4) c_1 \cos kx + c_2 \sin kx + \frac{1}{k} \int_{x_0}^x f(t) \sin k(x-t) dt$$

$$7. c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

$$8. \pi - 1 + 4 \arctan x + x^2$$

$$9. (1) c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!!} x^{2n+1} + c_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!!} x^{2n}$$

$$(2) c_1 \left( x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{30} + \dots \right) + c_2 \left( 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \dots \right)$$

$$(3) c_1 (1+x) + c_2 e^x$$

### 习题 12.3

$$1. (1) c_1 e^{(1+\sqrt{2})x} + c_2 e^{(1-\sqrt{2})x}$$

$$(2) e^x \left( c_1 \cos \frac{x}{2} + c_2 \sin \frac{x}{2} \right)$$

$$(3) e^{\frac{x}{2}} \left( c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$$

$$(4) e^x (c_1 + c_2 x)$$

$$(5) c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

$$(6) |\lambda| > 2 \text{ 时, } y = c_1 e^{\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} x} + c_2 e^{\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} x}; |\lambda| = 2 \text{ 时,}$$

$$y = e^{-\frac{\lambda}{2} x} (c_1 + c_2 x); |\lambda| < 2 \text{ 时, } y = e^{-\frac{\lambda}{2} x} \left( c_1 \cos \frac{\sqrt{4 - \lambda^2}}{2} x + \right.$$

$$\left. c_2 \sin \frac{\sqrt{4 - \lambda^2}}{2} x \right)$$

$$2. (1) s = e^{-t} (\cos 2t + \sin 2t)$$

$$(2) s = 4e^t + 2e^{3t}$$

$$(3) y = 3e^{-2x} \sin 5x$$

$$(4) y = (x+2)e^{-\frac{x}{2}}$$

3. (1)  $4\sin \frac{x}{2}$   
 (2)  $(x+3)e^{2x}$   
 (3)  $x(2x+1)e^x$   
 (4)  $\frac{8}{5}e^x\left(\cos \frac{x}{2} + 2\sin \frac{x}{2}\right)$   
 (5)  $\frac{x}{2}\sin x$   
 (6)  $\frac{3}{2}x^2e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$   
 (7)  $\frac{1}{9}(3x\sin x - 2\cos x)$   
 (8)  $-\frac{e^x}{500}(50x^2 + 30x + 19)$   
 (9)  $\left(x - \frac{3}{2}\right)\cos x + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\sin x$   
 (10)  $\frac{x}{10} + \frac{1}{164}(-4\cos 2x + 5\sin 2x)$   
 (11)  $\frac{e^x}{25}[(5x-2)\cos x + (10x-14)\sin x]$   
 (12)  $-\frac{1}{16}\cos 3x + \frac{x}{4}\sin x$
4. (1)  $\frac{1}{x}(c_1\cos \ln x^2 + c_2\sin \ln x^2)$   
 (2)  $|x|(c_1 + c_2\ln |x|)$   
 (3)  $c_1|x|^3 + c_2|x|^7$   
 (4)  $R = c_1r^n + c_2r^{-(n+1)}$
5. (1)  $c_1 + c_2x^2 + |x|^3$   
 (2)  $x(c_1\cos \ln x + c_2\sin \ln x + \ln x)$   
 (3)  $c_1|x| + c_2x^2 + |x|^3 + |x|\ln |x|$   
 (4)  $c_1\cos \ln(1+x) + c_2\sin \ln(1+x) + 2\ln(1+x)\sin \ln(1+x)$

### 习题 12.4

1. 取水平轴为  $x$  轴, 质点的平衡位置为原点.

(i)  $\ddot{x} + 9x = 3\sin 3t, x(0) = \dot{x}(0) = 0;$

(ii)  $x = \frac{1}{6}\sin 3t - \frac{1}{2}t\cos 3t;$

(iii) 产生共振现象.

2.  $\theta = A\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t + B\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t$

3.  $v = \sqrt{v_0^2 + 2k\left(\frac{1}{a-s} - \frac{1}{a}\right)}$

### 习题 12.5

1. (1)  $c_1 + c_2\cos 3x + c_3\sin 3x$

(2)  $e^x(c_1 + c_2x + c_3x^2)$

(3)  $c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + c_3e^{3x} + c_4e^{-3x}$

(4)  $c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + c_3\cos 2x + c_4\sin 2x$

(5)  $c_1 + c_2x + (c_3 + c_4x)e^{-x}$

(6)  $e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + c_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(c_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + c_4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$

2. (1)  $\cos x$

(2)  $\frac{x}{20}(\sin 2x - 2\cos 2x)$

(3)  $\frac{x}{20}e^x(3\sin x - \cos x)$

(4)  $\frac{x^3}{6} + x^2$

(5)  $xe^{-2x} + 2x^2e^{2x}$

3. (1)  $c_1|x| + c_2|x|\ln|x| + c_3x^{-2}$

(2)  $|x|(c_1 + c_2\ln|x|) + c_3x^2 + \frac{1}{4}|x|^3 - \frac{3}{2}|x|\ln^2|x|$

习题 12.6

$$1. (1) x = c_1 e^{\sqrt{3}t} + c_2 e^{-\sqrt{3}t}, y = (2 + \sqrt{3}c_1 e^{\sqrt{3}t} + (2 - \sqrt{3}c_2 e^{-\sqrt{3}t}))$$

$$(2) x = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \sin t, y = -c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

$$(3) x = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}, y = c_1 e^t + c_3 e^{-2t},$$

$$z = c_1 e^t - (c_2 + c_3) e^{-2t}$$

$$(4) x = c_1 + c_2 e^t + 3t, y = 3c_1 + c_3 e^t + t^2 - 8,$$

$$z = -c_1 + (c_2 - c_3) e^t - t^2 + 3t + 4$$

$$2. (1) x = \cos t, y = \sin t$$

$$(2) x_1 = 2e^t, x_2 = 2e^t$$

$$(3) x = \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right) e^{-t} + e^{-2t} - \frac{1}{4} e^{-3t}$$

$$y = \left(-\frac{t}{2} + \frac{5}{4}\right) e^{-t} - 2e^{-2t} + \frac{3}{4} e^{-3t}$$

$$z = \left(\frac{t}{2} - \frac{7}{4}\right) e^{-t} + 4e^{-2t} - \frac{9}{4} e^{-3t}$$

$$3. x = \frac{mv_0}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

$$y = -\frac{m^2 g}{k^2} (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) + \frac{mg}{k} t$$

$$\text{或 } y = -\frac{mg}{kv_0} x - \frac{m^2 g}{k^2} \ln\left(1 - \frac{kx}{mv_0}\right)$$

$$4. N_1 = ke^{-\lambda_1 t}, N_2 = \frac{\lambda_1 k}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

$$N_3 = \frac{k}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{-\lambda_1 t}) + k$$

[ G e n e r a l I n f o r m a t i o n ]

书名= 高等数学导论 (下册)

作者= 中国科学技术大学高等数学教研室

页数= 600

出版社= 中国科学技术大学出版社

出版日期= 2008.2

S S 号= 11959978

D X 号= 000006335696

u r l = h t t p : / / b o o k 1 . d u x i u . c o m / b o o k

D e t a i l . j s p ? d x N u m b e r = 0 0 0 0 0 6 3 3 5 6 9

6 & d = 3 4 8 0 E 9 A 5 8 D 0 6 0 9 2 9 D 9 C 1 F 8 A 4 3 D E

7 2 8 A 1 & f e n l e i = 1 3 0 1 0 7 & s w = % B 8 % D F % B

5 % C 8 % C A % F D % D 1 % A 7 % B 5 % B C % C 2 % D B

6	多变量函数的微分学
6 . 1	多变量函数的极限与连续
6 . 1 . 1	映射和多变量函数
6 . 1 . 2	平面点集的一些概念
6 . 1 . 3	平面点列极限与二元函数极限
6 . 1 . 4	二元函数的连续性
6 . 1 . 5	区域上定义的连续函数的性质
6 . 1 . 6	$n$ 维欧氏空间, $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 映射的连续性
6 . 1 . 7	连续函数性质定理的证明
	复习思考题
	习题6 . 1
6 . 2	多元函数的偏微商与全微分
6 . 2 . 1	偏微商
6 . 2 . 2	全微分
6 . 2 . 3	高阶偏微商
6 . 2 . 4	函数值的近似计算
6 . 2 . 5	误差估计
	复习思考题
	习题6 . 2
6 . 3	复合函数的微分法
6 . 3 . 1	复合函数微商的链式法则
6 . 3 . 2	微分的运算, 一阶全微分形式的不变性
6 . 3 . 3	复合函数的全微商, 偏微商记号的用法
6 . 3 . 4	复合函数的高阶微商
	复习思考题
	习题6 . 3
6 . 4	隐函数的微分法
6 . 4 . 1	多元方程所确定的隐函数及其微商
6 . 4 . 2	方程组所确定的隐函数组及其微商
	复习思考题
	习题6 . 4
6 . 5	向量值函数的求导, 空间曲线的切向量和空间曲面的法向量
6 . 5 . 1	一元向量值函数及其微商
6 . 5 . 2	简单曲线与逐段光滑曲线, 空间曲线的切向量
6 . 5 . 3	二元向量值函数的偏微商, 空间曲面的法向量
6 . 5 . 4	隐式曲面的法向量, 两隐式曲面交线的切向量
6 . 5 . 5	$\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的映射, 雅可比矩阵, 雅可比行列式及其性质

复习思考题

习题6 . 5

- 6 . 6 多元函数的泰勒公式与极值
  - 6 . 6 . 1 二元函数的泰勒公式
  - 6 . 6 . 2 多元函数的极值
  - 6 . 6 . 3 最小二乘法
  - 6 . 6 . 4 条件极值
  - 6 . 6 . 5 例

复习思考题

习题6 . 6

复习题

7 多变量函数的积分学

7 . 1 二重积分

- 7 . 1 . 1 二重积分概念的导出
- 7 . 1 . 2 二重积分的定义与可积函数
- 7 . 1 . 3 二重积分的性质
- 7 . 1 . 4 直角坐标系下二重积分的累次积分法
- 7 . 1 . 5 极坐标系下二重积分的累次积分法
- 7 . 1 . 6 二重积分的一般曲线坐标代换
- 7 . 1 . 7 广义二重积分

复习思考题

习题7 . 1

7 . 2 三重积分

- 7 . 2 . 1 三重积分的概念
- 7 . 2 . 2 直角坐标系下三重积分的累次积分法
- 7 . 2 . 3 柱坐标下三重积分的计算
- 7 . 2 . 4 球坐标下三重积分的计算
- 7 . 2 . 5 三重积分一般的变量代换

复习思考题

习题7 . 2

7 . 3 曲线弧长与第一型曲线积分

- 7 . 3 . 1 空间曲线的弧长
- 7 . 3 . 2 第一型曲线积分

复习思考题

习题7 . 3

7 . 4 曲面面积与第一型曲面积分

- 7 . 4 . 1 曲面的面积
- 7 . 4 . 2 第一型曲面积分

复习思考题

习题7 . 4

7 . 5 重积分、线积分与面积分的应用

- 7 . 5 . 1 重心与转动惯量
- 7 . 5 . 2 物体的引力

复习思考题

习题7 . 5

复习题

8

场论

8 . 1 数量场的方向导数与梯度

8 . 1 . 1 场的概念

8 . 1 . 2 数量场的方向微商

8 . 1 . 3 梯度

复习思考题

习题8 . 1

8 . 2 向量场的通量与散度

8 . 2 . 1 双侧曲面及其定侧

8 . 2 . 2 向量场的通量

8 . 2 . 3 第二型曲面积分

8 . 2 . 4 散度

8 . 2 . 5 高斯定理

复习思考题

习题8 . 2

8 . 3 向量场的环量与旋度

8 . 3 . 1 向量场沿有向曲线的积分及其计算

8 . 3 . 2 第二型曲线积分

8 . 3 . 3 环量与旋度的概念

8 . 3 . 4 格林定理与斯托克斯定理

8 . 3 . 5 旋度的计算

复习思考题

习题8 . 3

8 . 4 保守场和无源场

8 . 4 . 1 保守场和势函数

8 . 4 . 2 无源场与向量势

复习思考题

习题8 . 4

8 . 5 哈密顿算符及其运算公式

8 . 5 . 1 算符 $\nabla$ 作用在一个场上的运算

8 . 5 . 2 算符 $\nabla$ 作用在两个场乘积上的运算

8 . 5 . 3 高斯公式与斯托克斯公式的其它形式

习题8 . 5

8 . 6 外微分形式

8 . 6 . 1 外微分形式的外积

8 . 6 . 2 外微分形式的外微分

8 . 6 . 3 一般的斯托克斯定理

习题8 . 6

8 . 7 梯度、散度与旋度在正交曲线坐标系下的表达式

8 . 7 . 1 曲线坐标的概念

- 8 . 7 . 2 梯度的表达式
- 8 . 7 . 3 散度的表达式
- 8 . 7 . 4 旋度的表达式
- 习题8 . 7

复习题

9 无穷级数

9 . 1 数项级数

- 9 . 1 . 1 无穷级数的基本概念
- 9 . 1 . 2 正项级数
- 9 . 1 . 3 交错级数
- 9 . 1 . 4 级数收敛的一般判别法
- 9 . 1 . 5 绝对收敛与条件收敛

复习思考题

习题9 . 1

9 . 2 函数项级数

- 9 . 2 . 1 函数项级数的收敛概念
- 9 . 2 . 2 函数项级数的一致收敛性及判别法
- 9 . 2 . 3 一致收敛级数的性质

复习思考题

习题9 . 2

9 . 3 幂级数与泰勒展开式

- 9 . 3 . 1 幂级数的收敛半径
- 9 . 3 . 2 幂级数的性质
- 9 . 3 . 3 函数的泰勒展开式
- 9 . 3 . 4 初等函数的泰勒展开式
- 9 . 3 . 5 幂级数的运算

复习思考题

习题9 . 3

9 . 4 级数的应用

- 9 . 4 . 1 幂级数应用于近似计算
- 9 . 4 . 2 司特林公式
- 9 . 4 . 3 连续函数的多项式逼近
- 9 . 4 . 4 隐函数存在定理

习题9 . 4

复习题

1 0 含参变量的积分

1 0 . 1 广义积分的收敛性判别

- 1 0 . 1 . 1 无穷区间积分的收敛判别法
- 1 0 . 1 . 2 收敛性的精细判别法
- 1 0 . 1 . 3 无界函数积分的收敛判别法

复习思考题

习题1 0 . 1

1 0 . 2 含参变量的常义积分

1 0 . 2 . 1	含参变量的常义积分的性质
1 0 . 2 . 2	积分限依赖于参变量的积分的性质
习题1 0 . 2	
1 0 . 3	含参变量的广义积分
1 0 . 3 . 1	积分的一致收敛概念
1 0 . 3 . 2	一致收敛积分的性质
1 0 . 3 . 3	几个重要的积分
习题1 0 . 3	
1 0 . 4	欧拉积分
1 0 . 4 . 1	$\Gamma$ 函数的性质
1 0 . 4 . 2	B 函数的性质
习题1 0 . 4	
复习题	
1 1	富里叶分析
1 1 . 1	周期函数的富里叶级数
1 1 . 1 . 1	周期函数、三角函数的正交性
1 1 . 1 . 2	富里叶级数
1 1 . 1 . 3	偶函数与奇函数的富里叶级数
1 1 . 1 . 4	任意周期的情形
1 1 . 1 . 5	有限区间上的函数的富里叶级数
1 1 . 1 . 6	富里叶级数的复数形式
1 1 . 1 . 7	贝塞尔不等式
1 1 . 1 . 8	富里叶级数的收敛性
复习思考题	
习题1 1 . 1	
1 1 . 2	广义富里叶级数
1 1 . 2 . 1	么正函数系
1 1 . 2 . 2	广义富里叶级数及平方平均收敛
复习思考题	
习题1 1 . 2	
1 1 . 3	富里叶变换
1 1 . 3 . 1	富里叶积分
1 1 . 3 . 2	富里叶变换
1 1 . 3 . 3	富里叶变换的性质
复习思考题	
习题1 1 . 3	
复习题	
1 2	线性微分方程
1 2 . 1	微分方程解的存在性与唯一性定理
1 2 . 1 . 1	皮卡 (P i c a r d ) 逐次逼近法, 微分方程解的存在性与唯一性定理
1 2 . 1 . 2	欧拉 (E u l e r ) 折线法
1 2 . 1 . 3	解的延拓

	1 2 . 1 . 4	解对初值的连续性与可微性
	习题1 2 . 1	
1 2 . 2		二阶线性微分方程的一般理论
	1 2 . 2 . 1	线性齐次方程解的结构
	1 2 . 2 . 2	线性非齐次方程解的结构
	1 2 . 2 . 3	应用幂级数求解方程
	习题1 2 . 2	
1 2 . 3		二阶常系数线性微分方程
	1 2 . 3 . 1	常系数线性齐次方程
	1 2 . 3 . 2	常系数线性非齐次方程
	1 2 . 3 . 3	欧拉 (E u l e r ) 方程
	习题1 2 . 3	
1 2 . 4		质点的振动
	1 2 . 4 . 1	自由简谐振动
	1 2 . 4 . 2	自由阻尼振动
	1 2 . 4 . 3	无阻尼的强迫振动
	1 2 . 4 . 4	有阻尼的强迫振动
	习题1 2 . 4	
	1 2 . 5	$n$ 阶线性微分方程
	1 2 . 5 . 1	$n$ 阶线性方程解的结构
	1 2 . 5 . 2	$n$ 阶常系数线性方程的求解
	习题1 2 . 5	
1 2 . 6		微分方程组
	1 2 . 6 . 1	一般概念
	1 2 . 6 . 2	消元升阶法
	1 2 . 6 . 3	第一积分法
	1 2 . 6 . 4	线性方程组解的结构
	1 2 . 6 . 5	代数求解法
	习题1 2 . 6	
	习题参考答案	